hecha al azar, como estamos convencidos de ello, no nos dará sino una probabilidad, jamás una certidumbre; pero la probabilidad aumentará por nosotros á medida que el número de pases sea mayor.

Si hay tantas cartas rojas como negras, advertirémoslo por la casi identidad de los números de uno y otro color, y por la variabilidad del sentido de las diferencias que se manifiesten entre esos dos números; pero no lo estamos tan pronto para afirmar que la igualdad es rigurosa en el número de cartas que contiene el paquete del mismo color. He tenido la paciencia de jugar muchos cientos de pases con un juego de cincuenta y dos cartas al que había quitado el as de bastos. En ningún momento he podido notar diferencia que me permitiera creer que había en él una carta roja más; y también, muchas veces se han encontrado en él en exceso. Nuestra ley de los grandes números no tiene, pues, una precisión tan grande; permítenos sólo pensar que hay una casi identidad entre los números rojos y los negros; no tenemos en ella un instrumento de indagación de gran sensibilidad, si bien es cierto que los grandes números sobre los que operamos no son muy grandes.

Si hay el doble de cartas rojas que negras, una serie suficiente de pases nos lo indicará en seguida; pero no me parece posible que nuestro juego sea bastante preciso para distinguir un caso en el que hay trece negras y veintiséis rojas, de un caso en que hubiera veinticinco rojas solamente contra trece negras. Deducimos con verosimilitud, de un gran número de pases, que la relación del número de cartas rojas respecto del número de cartas negras viene á ser la mitad, y eso será todo. Nuestro método de investigación parece muy grosero para darnos al cabo de un buen número finito de pases un resultado preciso sobre el que pudiéramos calcular.

No hay costumbre, es cierto, para darse cuenta de la composición de un juego de cartas, de entregarse al pequeño juego que acabamos de estudiar; es mucho más fácil mirar los naipes uno por uno por el derecho. Pero es lo contrario lo que se hace. Dado un juego de cartas, cuya composición se conoce, se juega al juego de rojo y negro y se trata de prever lo que ocurrirá. Pero ningún pase, entiéndase bien, puede preverse; se puede prever groseramente la proporción del número de rojas salidas sobre el número de negras cuando se haya jugado bastante tiempo. Habrá, pues, que jugar muchísimo tiempo y el resultado no será jamás seguro; si, por ejemplo, se sirve uno de un juego que contenga trece rojas y veintiséis negras no habrá que sorprenderse al ver salir primeramente seis rojas; y á la larga la proporción promedia se manifestará con más precisión. No será inútil tomar el problema por el otro extremo, porque muchísimas gentes se sorprenden ante el misterio de la ley de los grandes números; estamos, así, obligados ahora á efectuar en su provecho la demostración al absurdo y decir: Si el paquete contiene un número igual de cartas rojas y negras, no hay razón para que salga mayor número de unas que de otras, pues si salieran siempre rojas concluiríase que hay más rojas en las barajas del paquete, lo que es contrario á la hipótesis. Á esa explicación poco satisfactoria, sustituímosla volviendo la cuestión, exponiendo un método extraño de investigación, método que consiste en jugar al negro y al rojo para llegar á conocer el contenido de un paquete de cartas; hemos consignado que tal método es grosero y que no podría permitirnos evaluar con precisión absoluta la relación del número de rojas y de negras. Todo misterio desaparece y quedamos sólo en presencia de un método muy grosero de investigación.

§ 62.—LA PROBABILIDAD ESTADÍSTICA.

Al jugar al rojo y negro con un paquete de cartas de composición conocida, no podemos prever ningún golpe aislado, pero tenemos

una idea aproximada del número de rojas y de negras que ha salido al cabo de algunos millares de pases. Eso es lo que se llama una probabilidad. El paquete de cartas es de composición conocida, y no estamos en un caso de ignorancia total, como ocurriría si la composición del paquete nos fuera ignorada. Eso no duraría, sin embargo, indefinidamente, pues al cabo de un gran número de pases uno habría adivinado la composición del juego y habría que hacer otro.

Las Compañías de seguros sobre la vida tienen que resolver problemas de probabilidad; pero no se encuentran, tampoco, en el caso de ignorancia total, pudiendo así fijar sus primas. Supongamos que, sin conocer la longevidad media de las cotorras, los propietarios de esos desagradables volátiles quieren constituir una Compañía de seguros de vida de sus respectivos animales; hallaránse en la imposibilidad de fijar con alguna precisión las primas que habrán de pagarse. Al contrario, cuando se trata de la vida humana en un país dado, cuenta uno con estadísticas perfectamente hechas; se sabe lo que ha ocurrido en un millón de casos dados, y se tiene el derecho de prever que, en condiciones análogas, una mortalidad semejante se manifestará en un millón de casos parecidos á los precedentes. Así las Compañías hállanse aseguradas en sus beneficios, salvo el caso imprevisto de una epidemia nueva que produzca inesperados estragos. Aun ahí se trata de una probabilidad tomada sobre una media, y si se sacaran conclusiones individuales, cometeríase un error comparable al de los jugadores que, tras seis pases rojos, apuntan ciegamente al negro.

De una estadística hecha en un país dado, conclúyese, por ejemplo, que la media de la longevidades de cuarenta y siete años para los que han alcanzado los treinta y seis; un habitante tomado al azar ¿tendrá el derecho de decir, el día que llegue á los treinta y seis, que vivirá hasta los cuarenta y siete? Eso sería absurdo; morirá acaso al día siguiente, ó vivirá noventa y cinco años. La única cosa de que está seguro es de que no morirá antes de los treinta y seis. No se le impedirá, sin embargo, decir que *tiene probabilidades* de vivir hasta los cuarenta y siete, según las estadísticas. ¡Oh el de la suerte! El que compra cincuenta billetes de la lotería tiene, según el lenguaje corriente, cincuenta *probabilidades* más de que le toque que el lleva sólo uno. Esa superioridad, puramente verbal, dura sólo hasta el día del sorteo, en que el premio gordo cae al «tío Fulano, que sólo juega un número». La superioridad real no se manifestará más que, si hay un gran número de billetes

premiados, cuando se pueda razonar sobre el promedio; pero el premio gordo, único interesante, no cae más que en uno.

Es siempre el mismo error: las leyes de probabilidad no son válidas sino para los promedios y se las aplica á los casos particulares. Los más grandes entendimientos de la humanidad han errado así, pues tan poderosa es la magia del lenguaje corriente que habla de *probabilidades* como de cosas que tienen existencia real. Hé aquí un pasaje de Laplace: «Supongamos que se arroja al aire una pieza grande y delgadísima cuyas dos superficies, que llamamos cara y cruz, fueran perfectamente semejantes. Tenemos la probabilidad de obtener cruz, una vez por lo menos, en dos tiradas. Es claro que pueden ocurrir cuatro casos igualmente posibles á saber: cruz en la primera y segunda tirada, cruz en la primera y cara en la segunda, cara en la primera y cruz en la segunda y, en fin, cara en la primera y en la segunda. Los tres primeros casos son favorables al suceso cuya probabilidad es, por consiguiente, igual á 3/4; de suerte que hay tres probabilidades contra una para que salga cruz al menos una vez cada dos tiradas» (1). Tal razonamiento tendría valor si se repitiera muchas veces la experiencia; sería en-

(1) De Laplace, *Ensayo sobre las probabilidades*, p. 12.

tonces problema de los promedios, y siendo la homogeneidad del juego perfecta, en cuanto á cara y cruz, podríase prever el resultado casi y apostar en consecuencia. Si no se debe jugar más que una vez, el que apuesta tres contra una ganará ó perderá. Si gana, no gana más que un tercio de su postura; y si pierde, pierde su postura entera, y es para él un pequeño consuelo haber tenido antes de la jugada tres suertes sobre cuatro que jugar. Tales suertes son moneda perdida cuando se trata de un golpe aislado.

Renunciando á ocuparse de la precisión imposible de un golpe de azar estudiado solo, podría darse, sin convención alguna, una definición de la probabilidad. Esa definición sería, como todas las buenas definiciones humanas, una definición *á posteriori*, un resultado de la experiencia. De un juego homogéneo rojo y negro he obtenido, durante quinientos pases, números casi equivalentes de uno y otro color; es probable que en otros quinientos se manifieste la misma equivalencia. Hé ahí la verdadera ley de los promedios. Pero si traduzco esa ley en el lenguaje relativo á la previsión de un golpe aislado, si digo que la probabilidad para obtener un rojo *esta vez* es igual á 1/2, digo una cosa que no tiene sentido; el pase dará un resultado sólo, será rojo ó negro; hé ahí, todo lo que tenemos derecho de decir. El valor de la

palabra *suerte* no es real si no se juega un gran número de pases. Es, pues, por lo menos inútil expresar de antemano la ley de probabilidad respecto de un golpe aislado, pues debe estarse obligado en seguida á considerar un gran número de ellos para dar un sentido á esa ley. Pero la palabra suerte es muy corriente, y no valdrá razonar de esta manera!

§ 63.—LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y EL PROBLEMA DE LA ESCALA.

La historia de la teoría cinética de los gases es interesantísima desde el punto de vista de los problemas de probabilidad. «La teoría cinética de los gases, dice M. Poincaré (1), es una hipótesis conocidísima, en la que cada molécula gaseosa supónese describe una trayectoria extremadamente complicada, pero en la que, por el efecto de los grandes números, los fenómenos medios, únicos observables, obedecen á leyes sencillas como la de Mariotte y de Gay-Lussac.»

Es porque los gases verifican las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac por lo que se ha llegado á hacer sobre su naturaleza la hipótesis de la teoría cinética. Se han escogido las pro-

(1) *La Ciencia y la hipótesis.*

piedades de proyectiles hipotéticos de dimensión molecular, de manera que fuera de seguida posible prever que los choques del conjunto de esos proyectiles sobre una pared determinan presiones comprobando la ley de Mariotte.

Eso es exactamente lo que hacemos siempre cuando, habiendo obtenido por medio del paquete de cartas de composición desconocida un número de pases rojos y negros casi equivalente, emitimos la hipótesis de la composición homogénea del paquete en rojas y negras. Admitida esa hipótesis, pudimos prever que, en casos iguales, una nueva serie de un gran número de pases daría también casi los mismos números de rojas y negras.

Pero ya hemos hecho notar que nuestro juego de rojo y negro era un método grosero y poco satisfactorio para llegar á conocer la composición del paquete; del mismo modo la ley de Mariotte es un documento muy insuficiente para permitir el descubrimiento de las particularidades que hay en los gases de dimensión molecular. La prueba de ello es que diversos sabios han emitido sobre los proyectiles moleculares de los gases hipótesis diferentes.

Lo que hay de común á todas las hipótesis relativas á la constitución de los gases es al menos que para un gas homogéneo todas las moléculas tienen propiedades idénticas. Esas

moléculas son idénticas desde el punto de vista de los choques que pueden determinar sobre una pared, como las cartas de una baraja son idénticas para los dedos del operador que juega. Para los juegos de colores, insensibles á los dedos, hemos podido crear, por lo visto, diferencias enormes entre diferentes cartas; pero para un operador dotado sólo de sensibilidad táctil las cartas no difieren unas de otras y todas las jugadas de rojo y negro son idénticas. Podremos, del mismo modo, suponer que cada molécula gaseosa tiene una individualidad que la distingue de las demás; podríamos suponer que un observador, de la misma dimensión que ellas, ha dotado á cada una de un número y ha sido bastante loco para arriesgar toda su fortuna con la esperanza del contacto del número 2.743 con la pared del vaso. Ese observador habrá instituído, así, á su escala, un gigantesco juego de lotería, y se encontrará exactamente en el mismo caso que nosotros con nuestros juegos de azar.

Si en vez de atenerse á un golpe aislado toma en cuenta un grandísimo número de golpes, llegará á comprobar, á pesar del azar perfecto que preside en la elección de los números que han de chocar con la pared, una ley de los grandes números, que será nuestra ley de Mariotte.

Esta sencilla comparación hácenos palpar la importancia del problema de la escala en la interpretación de las cuestiones de probabilidad. Nuestro juego de cartas, con sus diferencias individuales insensibles al tacto, habrá sido un modelo artificial que nos habrá llevado á una observación más seria que puede formularse así: la indeterminación en los elementos de un fenómeno observados en una escala puede corresponder á una determinación perfecta del fenómeno total observado en una escala superior. Lo que es el azar, en un gas, para un observador de la dimensión de las moléculas, es ley para nosotros, porque observamos una síntesis en la que el *homunculus* observa los elementos.

No ha de creerse, sin embargo, que la *ley* observada en nuestra escala pueda resultar de una indeterminación absoluta de los movimientos de la escala inferior. Las moléculas cualesquiera animadas de un movimiento cualquiera, no llevarán á la ley de Mariotte (1); pero dada la ley de Mariotte, podemos imaginar un gran número de modelos de movimientos de las moléculas gaseosas, tales que la síntesis de esos movimientos en nuestra escala verifique la ley de

(1) En otros términos, será fácil imaginar moléculas cuyo conjunto compruebe otra cosa que la ley de Mariotte, igual que puede constituirse un juego de cartas en el que el número de pases rojos difiera del de los negros.

Mariotte. Bastará sujetar nuestras moléculas á cierto número de condiciones que dejarán en ellas muchas otras indeterminadas; las condiciones indeterminadas, que para el observador en la escala molecular darán para cada trayecto de molécula una indeterminación perfecta, *deberán desaparecer* en la síntesis cuyo resultado conocemos en la escala superior. Todo modelo que llene ese *desideratum* será bueno.

Lo mismo ocurre con nuestro juego de cartas. Un juego de cartas *cualquiera*, sirviendo para jugar al rojo y negro, nos hubiera llevado á una equivalencia aproximativa de los números de pases rojos y negros. La observación *a posteriori* de esa equivalencia nos ha permitido, en cambio, adivinar la *homogeneidad* del juego de cartas. Así el misterio se aclara. La indeterminación nos parecía absoluta para un golpe aislado, y es de hecho absoluta para el observador que se coloca únicamente en el punto de vista de ese golpe. Que haya una causa de indeterminación permitiendo vacilar entre el rojo y el negro, ó que haya veinte la situación del jugador que apuesta sobre un golpe será la misma. Pero si no hay sino una causa de indeterminación, y esa causa se recoge *de tal manera que desaparece en la síntesis del número total de golpes*, resultará de ella una ley para el tahur que, en vez de atenerse á un golpe aisladamente, se atendrá á la balanza de un gran número de ellos.

Con una indeterminación absoluta, el tahur se arruinaría tan seguramente como la mayoría de los jugadores.

En otros términos, la ley de los grandes números es la comprobación en su escala superior de una LEY que, observada en la escala inferior, está *disfrazada* por fenómenos accesorios. Creer que un orden cualquiera puede provenir de un desorden perfecto es sencillamente un absurdo. El orden en una escala puede, por lo contrario, provenir del orden en la escala inferior, aunque ese orden esté disfrazado en la escala inferior por las causas de desorden que se anulan en la síntesis. La sorpresa de los filósofos ante la misteriosa *ley de los grandes números* es la misma que la de los niños ante este juego de adivinación, que los intriga altamente: «Piense usted un número; duplíquele usted; añádale usted 14; divídalo por 2. *Retire usted del resultado el número que ha pensado*». Y cuando la operación está hecha, operación tanto más misteriosa que el niño apenas puede hacerla, y olvida fácilmente la serie de cosas que se le han pedido, el adivino dice: «Le quedan á usted 7». Y el niño llénase de admiración de que el adivino haya podido leer así en su pensamiento.

Estamos en la misma situación ante la ley de los grandes números. Sorprendémonos de que la indeterminación absoluta conduzca á un resultado preciso, porque no observamos que la indeterminación es parcial y desaparece en la síntesis. La verdadera indeterminación en el rojo y negro efectuaríase si se jugara con un paquete de cartas de composición desconocida y si se cambiara de paquete antes que la comprobación del resultado de un gran número de pases permitiera adquirir sobre su composición una presunción de ley, antes que hubiera podido decirse, por ejemplo: hay el doble de cartas rojas ú otra cosa por el estilo.

He indicado ya anteriormente que las Compañías de seguros explotan así, no una indeterminación absoluta, sino una *Ley* conocida por una prolongada observación; si la longevidad del hombre fuera cualquiera, no habría tampoco previsión posible para la fijación de las primas. Mostraré en seguida que Darwin, creyendo construir sobre el azar su teoría de la formación de las especies, ha puesto sencillamente en evidencia, sin darse cuenta de ello, las leyes rigurosas que los azares individuales no pueden eludir. Es principalmente en esta historia del darwinismo en la que el problema de la escala será de una importancia evidente.