

descansan nuestras matemáticas (euclidianas) no sean considerados como los únicos postulados posibles y necesarios de la matemática racional. La teoría de Poincaré critica, pues, a la vez un racionalismo demasiado estrecho y el pragmatismo consecuente, es decir, el *empirismo radical* de la práctica (W. James), y esta crítica ha podido exponerse aquí con tanta más libertad cuanto que no se adoptarán todas sus conclusiones.

§ 7.—*La relación de las ciencias matemáticas con las otras ciencias de la naturaleza.*

Las conclusiones de este libro serán racionalistas, intelectualistas.

Para decirlo con más precisión, serán científicas, para arrebatara a ciertos adversarios un barbarismo expresivo. Yo pienso, en efecto, que el racionalismo y el intelectualismo, por lo mismo que son la justificación absoluta de la ciencia, deben apoyarse en ésta y no superarla. Deben ser también ellos rigurosamente científicos. Y creo además que la psicología, gracias precisamente a los trabajos de los pragmatistas, algunos de los cuales son excelentes psicólogos, aporta hoy correcciones necesarias, tanto a la concepción de la razón como a la de la experiencia. Y sin querer proponer una solución sistemática harto prematura en el estado actual de la ciencia, las indicaciones que me limitaré a reunir en estas conclusiones parciales o en la conclusión final, serán sacadas todas ellas

de las transformaciones, a veces profundas, arrancadas por las ciencias contemporáneas a la tradición racionalista, a la que, sin embargo, sostienen en su dirección general. ¿Por qué habrían de repugnarle al racionalismo, por lo demás, estas correcciones necesarias? Una tradición inmutable, ¿no es en seguida una tradición muerta?

¿Concede la teoría de Poincaré a la experiencia la parte que parece debe corresponderle? ¡Cosa extraña! Yo diré de grado a los pragmatistas que constantemente han recurrido a esta teoría y se han servido del nombre de su autor como de una máquina de guerra, que a mí me parece demasiado poco pragmatista.

Ante todo, el historiador de las ciencias nos advertiría que Poincaré se inclina de un modo quizás excesivo a separar las matemáticas de las otras ciencias. Para ello se apoya en los caracteres específicos del método matemático, que es racional y deductivo. Para emplear términos más fácilmente comprensibles, diremos que es exclusivamente lógico y nunca recurre a la experiencia. Pero Mach ha enunciado con frecuencia esta idea, que encontramos en algunos pragmatistas, como Le Roy, y que parece la expresión misma de la verdad histórica: toda ciencia tiende a tomar una forma exclusivamente lógica y racional, una forma matemática. Y el historiador erudito que es Mach no deja de mostrar que la mecánica fué en su origen una ciencia completamente empírica, aunque ahora tenga la forma de un puro desarrollo analítico, de una promoción directa de la geometría. Todavía es fácil ver que la física tiende a

ser expuesta, a medida que la experiencia le proporciona resultados más exactos, bajo una forma matemática.

Por otra parte, ¿no se presentan en su origen los rudimentos de la matemática vulgar como resultados de experiencias particularísimas? La numeración, la aritmética, la geometría, fueron al principio completamente materiales. No se podía contar sin objetos tangibles, sin aparatos especiales, como el *ábaco*, recordado vagamente todavía por el cuadro en que los jugadores de billar cuentan sus puntos. El teorema de Pitágoras, el famoso *punte de los asnos*, fué al principio una relación experimental verificada solamente en el triángulo rectángulo cuyos lados comprendieran respectivamente 3, 4 y 5 unidades de longitud. El arquitecto y el agrimensor egipcio o chino servíanse de él para determinar ángulos rectos en el terreno. Los teoremas relativos a las áreas fueron resueltos durante mucho tiempo de una manera muy aproximada mediante experiencias de agrimensura. El agricultor de hoy sigue aplicando, para evaluar a ojo de buen cubero la superficie de un campo triangular, esta añeja y errónea fórmula de la ciencia egipcia y babilónica: la superficie de un triángulo es igual a la mitad del producto del lado mayor por el más pequeño. Y, sin embargo, estos resultados, que recuerdan absolutamente la forma y la naturaleza de los que obtenemos en las ciencias experimentales, representan ya conquistas científicas. Pero antes de medir sin duda se apreciaban las cantidades de una manera bastante más tosca: de una manera totalmente cualitativa, si así

puede decirse, mediante la sensación individual corregida progresivamente, desindividualizada y empezando a adquirir una generalidad y una abstracción objetivas gracias a los testimonios de otro. Así es cómo un niño o un primitivo consideran que un conjunto bastante considerable de fichas poco numerosas, pero muy gruesas, suma más piezas que un conjunto de fichas en realidad más numerosas, pero más pequeñas: apreciación cualitativa.

De este modo, las ciencias del número y la extensión, las ciencias exclusivamente lógicas y racionales hoy, han pasado verosímilmente por etapas que recuerdan bastante las etapas atravesadas por las ciencias que distinguimos de aquellas demasiado netamente calificándolas de experimentales o descriptivas. Y, siempre que nos atenemos a sus grandes rasgos, puede hablarse de una evolución general del espíritu y de los métodos de la ciencia—sin distinguir las diferentes ciencias—lo que acaso permita dar, dicho sea de paso, algunas indicaciones útiles para la solución del problema tan controvertido de la clasificación de las ciencias. No insistiré sobre este punto, para el cual sería menester todo un libro y sobre el que se han escrito ya tantos. Voy a hacer notar simplemente de modo muy sucinto las principales etapas que franquean, a mi juicio, deteniéndose en ellas más o menos tiempo, todas las ciencias sin excepción: esto importa al objeto que perseguimos aquí.

§ 8.—*Indicaciones relativas a la evolución general del método y de los conocimientos científicos.*

1.º Toda ciencia parece empezar por una descripción cualitativa, vaga y tosca, pero que se va precisando y afirmando.

2.º Se descubren analogías cualitativas entre los hechos estudiados y se establecen relaciones cualitativas de coexistencia: recuérdese la época en que la física clasificaba los elementos y la época mucho más cercana en que zoología, botánica y mineralogía se limitaban a clasificaciones metodológicas.

Estas dos primeras etapas constituyen la fase descriptiva del método científico. Ahora va a empezar la fase explicativa.

3.º La explicación empieza por ser también cualitativa; se establecen relaciones cualitativas de causalidad que son simplemente la constatación cualitativa de una sucesión constante. Pero todavía no se sabe dar la expresión precisa de esta relación, es decir, medirla (esto es frecuente aún en las ciencias biológicas).

4.º Poco a poco se llega a apreciar exactamente estas relaciones de coexistencia y sucesión (las primeras son, sobre todo, las que importan), gracias a un análisis abstractivo llevado muy lejos. He de hacer notar que la palabra "abstractivo" no tiene aquí nada de comparable con la abstracción escolástica y verbal. Es ésta una abstracción con-

creta en el sentido de que descompone una realidad dada (esta realidad es siempre, en el fondo, una relación compleja) en sus elementos (es decir, en relaciones más simples o, mejor dicho, más precisas).

En esta fase la ciencia tórnase exacta, matemática. Puede ordenar lógicamente sus resultados reconstituyéndolos mediante una complicación metodológica.

Si esto está de acuerdo con la verdad histórica, definir las matemáticas como la ciencia de la medida no es muy correcto, ya que toda ciencia es ciencia de la medida. Como ha dicho Le Dantec: *No hay otra ciencia que la de lo mensurable*. Las matemáticas han sido al principio la ciencia de ciertas medidas o la medida de ciertas relaciones, y sólo después, con la ayuda de la abstracción y la generalización, han podido desarrollarse como una ciencia puramente formal de las relaciones métricas. La dificultad que encontraron los griegos, esos partidarios a ultranza de la lógica y la abstracción, para separar el número de las consideraciones geométricas, tiene todos los aires de confirmar esta apreciación: antes de ser la ciencia del número y la medida, la matemática fué la ciencia de las relaciones de situación (y, por consiguiente, de orden), un cálculo materialísimo, un sistema métrico muy tosco.

5.º El hecho de que se haya convertido en la ciencia de la medida y de que merced a los desarrollos más arbitrarios, más imaginarios o, mejor dicho, más conceptuales, facilite hoy relaciones métricas que se adaptan a la expresión de re-

laciones reales muy complejas y de unà infinidad de otras relaciones igualmente complejas, pero que nunca hemos encontrado en lo real, este hecho merece atraer la atención porque señala una quinta etapa en la evolución científica; aquella en que una ciencia proporciona una técnica y se convierte en un *arte*.

Desde el momento en que una ciencia conoce algunas relaciones reales puede permitirnos inventar, con ayuda de estas relaciones y con arreglo a sus modelos, pero de una manera más simplista y abstracta a la vez, dispositivos que adaptemos a nuestras necesidades. Esta consecuencia *pragmática* de la ciencia, que la pone al servicio de nuestra utilidad, es de una importancia humana colosal. Demasiado desdeñada en otro tiempo por el intelectualismo, hoy ha atraído casi toda la atención gracias a la paradoja pragmatista. Pero parece ser que Poincaré ha visto con bastante más justeza al mostrar que esta paradoja no era más que un equívoco: cualquiera que sea la importancia de la técnica facilitada por toda ciencia bastante avanzada, esta técnica no es sino una consecuencia de las verdades que la ciencia pura ha conquistado. Y si la ciencia se desarrolla luego gracias a su comodidad material, no hay que olvidar que si se quiere conocer las cosas es por su comodidad intelectual y por la satisfacción desinteresada de la razón y que en su origen se ha desligado de un empirismo grosero, con el fin de constituir la verdadera ciencia. La ciencia empieza por hacernos conocer la realidad antes de permitirnos obrar sobre ella. Y es menester que nos la

haga conocer *primero* para permitirnos obrar *después*.

Así, desarrollando nociones descubiertas primitivamente con ocasión de la experiencia y en la experiencia, el espíritu ha podido organizar lógicamente cierto número de conocimientos estableciendo principios y desarrollando sus consecuencias.

Pero, ¡gracias a la fecundidad natural del espíritu, agujoneada por las necesidades prácticas, este desarrollo ha superado poco a poco lo real de donde salía. El espíritu ha inventado una técnica científica, un arte racional. En las matemáticas esto es el conjunto de los procedimientos de medida; todas las formas posibles de medida se deducen lógicamente de los primeros principios de las matemáticas, porque estos principios eran, en el fondo, los principios mismos de toda medida, descubiertos por el espíritu en los esfuerzos suscitados por algunas medidas reales.

No significando la medida otra cosa que la expresión de una relación, las matemáticas suministran una serie indefinida de cuadros, de formas, que se prestan a expresar exacta y precisamente todas las relaciones posibles de las cosas. Con esto se explica al mismo tiempo que todas las ciencias, que nunca tienen otro fin que establecer y formular relaciones de una manera exacta y precisa, sean tributarias de las matemáticas y tiendan a arrebatarles las formas necesarias en que vaciar su contenido. Las matemáticas han venido a ser instrumento y método para otras investigaciones científicas más complejas a las cuales resultan servir

de apoyo sus principios y los conocimientos que nos proporcionan.

Y no vaya a creerse que el ciclo se defiende ahí. Estas ciencias en cuya ayuda han venido las matemáticas, facilitarán a su vez un instrumento, una técnica a investigaciones más complejas todavía, y crearán artes, es decir, una serie de dispositivos inventados por el espíritu y no realizados espontáneamente en la naturaleza. Entre todos estos dispositivos posibles habrá algunos que se adaptarán muy bien a representar relaciones adquiridas por otras ciencias y a hacérselas comprender, es decir, a darnos la experiencia exacta de ellas que llamamos *medida*; así, la mecánica general para las ciencias fisico-químicas, las ciencias fisico-químicas para la biología, ésta para la psicología, etc. Y siempre los principios de la ciencia dominante servirán de punto de apoyo a la ciencia consecutiva. Las investigaciones de esta última aparecerán como un fragmento de lo posible que la razón tiene derecho a deducir de la ciencia dominante.

De todo esto resulta: 1.º Que cada ciencia tiende, a medida que progresa, a aparecer cada vez más como la promoción de otra ciencia más avanzada. 2.º Que no puede constituirse verdaderamente como ciencia hasta que la otra se encuentra ya suficientemente avanzada y que no seguirá progresando a no ser que la otra siga progresando también; de aquí el hecho de experiencia histórica de que el orden cronológico de la aparición de las ciencias y el orden de su complicación es también su orden lógico de clasificación, como lo ha visto Augusto Comte. 3.º Que las ciencias se distinguen

unas de otras, no por formar compartimentos separados, sino por venir a complicar las relaciones (lo que en lenguaje cualitativo grosero se llaman las propiedades) que afrontaba la ciencia precedente. Las ciencias son como un desarrollo particular y específico de dichas relaciones. Este carácter específico distingue a la ciencia considerada de aquella que continúa porque a los principios establecidos por la primera y que ella se ve obligada a aceptar añade otros nuevos que le son propios.

Así, el conjunto de las ciencias forma como los capítulos sucesivos de una obra bien ordenada. Y en este sentido es cómo la expresión *la Ciencia* no es una mera palabra, sino una realidad, un organismo vivo, a pesar de la diferenciación de sus órganos, que están, como en todo organismo, subordinados jerárquicamente.

Si cada hecho abarca el infinito, como ha dicho Leibnitz y como parece mostrarlo la reflexión más vulgar sobre la experiencia, la Ciencia es *una* como lo real.

§ 9.—*Las ideas de Mach (1), la razón y la adaptación del pensamiento.*

¿No nos da esto una preciosa indicación sobre la naturaleza y el alcance de lo lógico y lo racional por cuya pura emanación han pasado siempre las

(1) *La Connaissance et l'Erreur*, por Ernst Mach, profesor de la Universidad de Viena (París, Flammarion, 1907).

matemáticas? Y acaso nos la dé también sobre la naturaleza y el alcance de la razón. No nos hallamos lejos de descubrir el pensamiento de Mach (1), del que también se ha hecho a menudo un pragmático *avant la lettre*.

A nosotros nos parece hallarse bastante más cerca del racionalismo tal como creemos que debe concebirse éste en lo sucesivo; un racionalismo que no excluye en modo alguno una historia psicológica de la razón con sus oportunidades y sus contingencias temporales y, sobre todo, que no debilita de ninguna manera el papel de la experiencia, no siendo la razón sino la experiencia codificada y recíprocamente el código necesario y universal de toda la experiencia, teniéndose en cuenta a la vez el momento de la evolución y la organización psicológica humana.

El principio de la teoría de Mach, al cual tendremos ocasión de volver a menudo, es la adaptación del pensamiento. Este principio nos facilita una teoría biológica de la ciencia y la razón. No quiero examinar aquí de una manera objetiva las ideas de Mach. Ya lo he hecho en otro lugar (2). Quiero hacer notar simplemente algunas de las reflexiones que parecen poder sugerir. Por teoría biológica de la razón se permite entender una teoría que asi-

(1) Cf. sobre todo: *La Mécanique* (París, Hermann).—*Conférences scientifiques populaires*, publicadas en alemán: *Populär-Wissenschaftliche Vorlesungen*.—*La Connaissance et l'Erreur*, citada anteriormente.

(2) *La Théorie de la Physique chez les Physiciens contemporains*, París, Alcan, 1907.

mila razón al instinto de todo ser vivo. Lo mismo que todo ser vivo, es más, lo mismo que todo lo que existe, puede considerarse al hombre como un sistema determinado en continua relación con otros sistemas. El complejísimo conjunto de estos últimos se define a su vez como un solo sistema al cual se ha dado el nombre de medio. Existir no es otra cosa para un sistema dado que estar constantemente en equilibrio con el medio.

Sobre todo en el ser vivo, la acción y reacción perpetuas de estos dos sistemas y sus cambios desnivelan a cada instante este inestabilísimo equilibrio. Todas las funciones del ser vivo y, por consiguiente, todos sus órganos dan por resultado nuevas equilibraciones tras estas desnivelaciones. La razón y la ciencia no son otra cosa en la actividad del hombre que funciones de este género. Si ahora aplicamos a esta equilibración un nombre más preciso para distinguirla de las otras equilibraciones mecánicas, físicas y químicas, por ejemplo, la daremos el nombre, como los biólogos, de adaptación, o la llamaremos, como ciertos psicólogos, correspondencia. ¿Por qué? Porque el órgano y las funciones biológicas considerados hacen *apto* al ser vivo para continuar viviendo en condiciones dadas o porque las funciones psicológicas dan por resultado establecer entre el medio y el ser ciertas *correspondencias* necesarias al equilibrio, a la adaptación del ser a su medio.

La razón parece ser, pues—ya volveré a ello al hablar del problema psicológico—un producto de la evolución, determinado, de un lado, por la constitución de la especie humana, y de otro, por

el medio. Es, en primer lugar, el resultado de la adaptación del ser al medio, adaptación que establece una correspondencia entre las circunstancias de la acción y el ser que actúa. Después, una vez establecida, esta correspondencia se fortifica y se precisa mediante el ejercicio (como todas las funciones orgánicas) y se convierte en un instrumento progresivo de progresiva adaptación—exactamente lo mismo que el instinto animal—. La razón es, en suma, el instrumento o instinto específico de la humanidad.

Así se concibe que la razón, analizada abstractamente en la conciencia del ser razonable, sea susceptible de concordar, mediante los principios que en ella se descubren y por el desarrollo ideal de estos principios, con las leyes del medio y pueda expresarlas. Concíbese también que dado lo que nosotros somos y lo que es el medio, ella no pueda ser distinta de lo que es; es, pues, como pretende el racionalismo, necesaria y universal. Es incluso, en cierto sentido, absoluta, pero entendiendo esta palabra de otro modo que el racionalismo tradicional. Para este último, esto significa que las cosas existen tal como la razón las concibe. En el sentido en que lo tomamos nosotros, significa, por el contrario, que no sabemos cómo existen las cosas en sí mismas, y en esta medida es como el relativismo kantiano o positivista tiene su razón de ser. Pero tenemos derecho a decir que si en un ser de constitución totalmente distinta las necesidades de la evolución hubieran establecido una correspondencia con el medio distinta de la nuestra (puesto que uno de los dos factores de

que sería el producto sería de por sí diferente) podría establecer, sin embargo, un sistema de traducción tal que las haría coincidir entre sí. La hipótesis no es absurda, porque en cierta medida esto es lo que debe pasar entre un animal doméstico y nosotros.

Entonces se derrumba naturalmente la gran objeción que podría hacerse a esta teoría absolutamente realista de las ciencias matemáticas: se pueden construir otras matemáticas distintas a la nuestra. ¿Otras? No, en verdad, sino desarrollos diferentes de la única matemática que autorizan la razón y la experiencia cuando se modifica el lenguaje en que la expresamos.

Así, pues, razón y experiencia son un solo y mismo término; la diferencia sólo es de punto de vista, y la matemática, ciencia racional, es también ciencia de experiencia. Salida de las exigencias de la práctica, es en sí misma algo completamente distinto a un arte práctico, puesto que es el resultado de una correspondencia unívoca y absoluta con las cosas en relación con la especie humana. Si más allá de lo real, las matemáticas parecen abrir el campo infinito de lo posible, y si por otra parte ciertos posibles resultan ser de aplicación a ciertas relaciones reales, es que el punto de partida de donde se deducen estos posibles era un trozo de la realidad. El número y la extensión, a pesar de su abstracción, se derivan de la naturaleza de lo real, porque este real es multiplicidad y extensión, porque las relaciones del espacio son relaciones reales que se derivan de la naturaleza de las cosas.

¿No parece entonces que pueden deducirse de

estas primeras proposiciones otras consecuencias muy importantes? Frecuentemente se ha considerado la abstracción científica como sinónimo de irrealidad. El progreso en la abstracción sería entonces una marcha ininterrumpida por fuera de lo real y nos alejaría de éste cada vez más. ¿Es esto exacto?

Al alejarse progresivamente de los espacios sensibles para elevarse al espacio geométrico, la matemática no se aleja del espacio real, es decir, de las verdaderas relaciones entre las cosas. Más bien se aproxima a él. Según los trabajos de la psicología moderna, cada sentido parece darnos *a su manera* la extensión y la duración (es decir, ciertas conexiones o soluciones de lo real). La percepción empieza a eliminar esta subjetividad que depende del individuo o de los accidentes de la estructura de la especie construyendo un espacio homogéneo y único, así como una duración uniforme, síntesis de todas las nociones sensibles y diversas que de ello teníamos. ¿Por qué el trabajo científico no habría de proseguir esta marcha hacia la objetividad? En todo caso, su precisión, su exactitud, su universalidad (o su necesidad, es todo uno) son otros tantos argumentos en favor de la objetividad de sus resultados. Número, orden, extensión, pueden ser considerados, pues, a pesar de nuestros hábitos criticistas y subjetivistas, como propiedades de las cosas, es decir, como relaciones reales, y tanto más reales cuanto que la ciencia les ha librado poco a poco de las deformaciones individuales y subjetivas con que nos habían sido dadas primitivamente en las sensaciones

concretas e inmediatas. ¿No se nos aparece entonces con razón el residuo de todas estas abstracciones como el fondo real y permanente que se impone a toda la especie con la misma necesidad porque no depende ni del individuo, ni del momento, ni del punto de vista?

§ 10.—*Lo que nos enseñan las matemáticas.*

Si se acepta lo que hemos dicho respecto al método de las ciencias matemáticas, se ve que éste nos ofrece todas las garantías deseables en lo que concierne a la verdad de los resultados a que permite llegar. Ahora puede preguntarse en qué consisten estos resultados, es decir, de un modo general, qué es lo que nos enseñan las matemáticas.

Para responder a esta pregunta no está de más referirnos brevemente a la historia de las matemáticas, puesto que éstas son en suma el resultado de una adaptación recíproca de nuestro pensamiento y de ciertas propiedades de las cosas y un conocimiento cada vez más completo de estas propiedades.

Según la definición de las matemáticas, las propiedades naturales que constituyen su objeto son: el orden, el número y la extensión. Como hemos visto, la ciencia de la extensión, con la geometría griega, ha precedido históricamente como ciencia a todas las otras especulaciones matemáticas.

Por su parte, la psicología nos enseña que todas nuestras sensaciones (que son los datos inmediatos y últimos de la experiencia) tienen una propie-

dad: la extensividad o la extensión. Esta propiedad no se parece en nada a la extensión geométrica, sobre todo si consideramos las sensaciones más afectivas.

Los psicólogos nos dicen además que el espacio fisiológico, es decir, el que sirve para dirigir nuestros movimientos (con anterioridad a toda concepción geométrica) es el resultado de la interpretación de todas nuestras sensaciones, en particular de nuestras sensaciones táctiles y musculares, por medio de las sensaciones visuales. Dicho de otro modo, traducimos el espacio táctil o muscular en espacio óptico.

¿Diremos que este espacio óptico es el objeto de la geometría y que ésta determina las diferentes relaciones de nuestras sensaciones visuales consideradas tan sólo desde el punto de vista de la extensividad? Mach ha demostrado de modo muy plausible que esta conclusión sería prematura.

El espacio geométrico es el resultado de una interpretación abstracta del espacio óptico, de forma que desindividualice, generalice y haga más manejables para el espíritu las relaciones que implica este espacio óptico. De buen grado añadiríamos al pensamiento de Mach que esta operación ha tenido por objeto dar a estas relaciones su expresión más exacta, más precisa, una expresión universal y necesaria, y por lo tanto, su expresión objetiva. Así, el espacio geométrico es la meta de una evolución que ha adaptado cada vez mejor nuestro pensamiento a ciertas propiedades del medio. Es ésta una experiencia prolongada y continua en la que el éxito ha fortificado constante-

mente ciertos hábitos que han venido a ser los principios de nuestra geometría.

Ya hemos dicho que filósofos como Bergson y biólogos como Le Dantec se han complacido en hacer notar el lugar que ocupaba la consideración de los sólidos en nuestra geometría, y, por consiguiente, en nuestras matemáticas y hasta en nuestra lógica. Y es que, en efecto, todas nuestras sensaciones visuales, táctiles y musculares nos son procuradas poco más o menos por los cuerpos sólidos. ¿Qué tiene entonces de extraño que habiéndose referido las experiencias primordiales a los sólidos estas experiencias hayan impreso a nuestra ciencia ulterior una huella indeleble?

La geometría nos enseña, pues, todo lo que puede considerarse en las cosas desde el punto de vista de la extensión y siempre analiza, más profundamente cada vez, esa propiedad de nuestras sensaciones que se ha llamado extensividad.

Otro tanto podría decirse de la aritmética y del álgebra con respecto al orden y al número: éstos son propiedades secundarias de nuestras sensaciones derivadas de la propiedad que tienen éstas de ser extendidas y situadas, de tener cada cual una posición en el espacio y formar así colecciones y multiplicidades, a no ser que estas nociones de orden y número tengan un origen más elemental todavía en los actos de atención que nos sirven para discernir groseramente unas de otras nuestras sensaciones.

En favor de la primera hipótesis, puede recordarse de nuevo que los griegos apenas supieron calcular al principio más que geoméricamente y

que les costó mucho trabajo abstraer la idea de número de la intuición geométrica. No obstante, por difícil y lenta que haya sido esta abstracción, ha acabado por operarse casi por completo y la aritmética y el álgebra se han desarrollado independientemente de la geometría, pero con arreglo a principios generales análogos. Para recoger una expresión querida a Mach, diremos que la aritmética y el álgebra llevan el análisis de nuestras sensaciones todavía más lejos que la geometría. Aquéllas descubren relaciones que parecen tener un carácter de universalidad más avanzado y estas relaciones parecerían prestas a reunirse, como piensan los matemáticos modernos, por ejemplo, Russel, con las relaciones lógicas.

Así, pues, lo que nos enseñan las matemáticas son las relaciones de las cosas desde el punto de vista del orden, el número y la extensión.

A fuerza de analizar las relaciones reales que existen entre las cosas nuestro espíritu adquiere naturalmente la facultad de formar otras semejantes merced a las asociaciones por semejanza. Puede, pues, inventar combinaciones que no encontramos en la realidad partiendo de las que hallamos en ella. Después de haber formado nociones que son copias de lo real podemos formar nociones que son modelos, como dice Taine en un sentido algo diferente.

Cuanto más antigua es una ciencia, es decir, cuanto más simple es el objeto que se ha propuesto, más fácil es su estudio y por consiguiente más rápidos son sus progresos y más desarrollada está la parte técnica. Hoy día, en las matemáticas,

ésta concentra casi únicamente la actividad de los matemáticos. Estos crean constante y arbitrariamente nuevas combinaciones y estas combinaciones tienen de singular que, como las máquinas de los físicos, a veces pueden encontrar aplicación. Por ejemplo, la física utiliza a menudo especulaciones matemáticas que al principio eran puramente imaginarias.

La matemática crea, pues, un arte que es el arte de expresar todas las relaciones posibles. Llega a convertirse en la ciencia de las funciones y entonces puede aspirar, según la profunda idea de Descartes, a llegar a ser la matemática universal, es decir, a proporcionar los medios necesarios para la expresión precisa de todas las leyes naturales.

§ 11.—Resumen y conclusión.

Se comprende, pues, bastante bien que las matemáticas, al principio ciencias de lo real, puedan presentarse actualmente a los ojos del matemático como el producto de la actividad arbitraria del espíritu. Su origen histórico no las impide en modo alguno haber adquirido hoy ese carácter y el hecho de que lo hayan adquirido tampoco las impide ser, por sus fundamentos y sus partes elementales, una ciencia de lo real que nos enseña sus propiedades más generales y más simples.

Se comprende también que, inventadas al principio con ayuda de la imaginación y la intuición, fuentes de toda adaptación nueva, pueden presentarse después como el desarrollo rigurosamente

lógico de sus proposiciones preliminares. La intuición se elimina aparentemente para ceder el sitio a la deducción racional como toda adaptación inventiva cede el sitio a los hábitos estereotipados a medida que triunfa.

El conflicto metodológico que ha surgido desde hace algún tiempo entre matemáticos intuitivos y matemáticos puramente deductivos, ¿no tiene una explicación similar? La intuición y la deducción, lejos de excluirse, se completan, y no sólo hay intuición en el geómetra, sino hasta en el algebrista puro a cada nuevo descubrimiento.

Entonces se explica, aun cuando no se crea poder aceptarla, la posición del racionalismo absoluto: son las matemáticas promoción de la lógica, simple desarrollo analítico de las leyes de la razón; pero al mismo tiempo base inquebrantable de todos nuestros conocimientos (Couturat, Russel). Esta teoría ha tomado simplemente el punto de llegada del trabajo psicológico por su punto de partida. E invirtiendo la escala verdadera de los valores lógicos concede a la razón, que es un producto derivado, una resultante de la adaptación recíproca entre nuestra actividad y la del medio, el papel de un factor primitivo, aislado y simple.

El racionalismo absoluto parece tener razón al pretender por una especie de realismo idealista que las leyes de la razón coinciden con las leyes de las cosas. Pero ¿no se equivoca al separar la razón y las cosas y creer que por sí sola y en un aislamiento espléndido es como la razón extrae el conocimiento de las leyes que gobiernan las cosas? Es preciso admitir entonces que merced a una

concordancia o a una gracia milagrosa poseemos dentro de nosotros, por lo menos en germen, la intuición de estas leyes. El mito platónico de la reminiscencia parece una hipótesis muy gratuita y poco económica a la vez para rejuvenecerlo ahora.

Si; el análisis de la razón viene a ser coextensivo al análisis de la naturaleza. Si; las matemáticas, al proceder al primero, proceden también al segundo o, si se prefiere, facilitan a éste algunos de los elementos necesarios. Pero ¿no es más sencillo suponer esto debido a que nuestra actividad psicológica se forma poco a poco acomodándose al medio y a las circunstancias en que ha de ser ejercida? ¿Se establecen y se precisan así las leyes fundamentales del conocimiento, ese sistema lógico que llamamos nuestra razón y del que nuestras matemáticas no son sino su desarrollo complejo? Nuestra razón es hija del instinto animal, nuestra evolución psicológica no hace más que continuar la evolución biológica. En el fondo constituye una sola con ésta, y en ningún momento se aísla lo psicológico de lo biológico; la actividad mental, de la actividad viviente y práctica.

Sólo que, como un ser más complejo necesita, si quiere vivir, un conocimiento cada vez más exacto y más seguro del medio, el instinto se transforma en inteligencia, en razón, y la actividad práctica, en saber.

Esta es la causa de que si bien son muy grandes las diferencias que existen entre el racionalismo absoluto y la teoría que ha sido bosquejada aquí sobre la cuestión de origen e historia, en cuanto al valor y alcance de las matemáticas llegamos, por

el contrario, a resultados muy próximos: este valor y este alcance son *absolutos*, humanamente hablando. En cuanto a hablar más que humanamente y desde un punto de vista transcendental, confieso que todavía no conozco su secreto y que me importa muy poco el conocerlo. La posibilidad de tener toda la infeligibilidad humana de las cosas, su traducción fiel en el lenguaje de los hombres, me basta.

Ciertamente, hemos empezado por aprender las leyes que conciernen a lo más usual de nuestra experiencia y hemos sido moldeados primitivamente por estas leyes sin dejar de interpretarlas con arreglo a nuestras necesidades, nuestras tendencias, en una palabra, nuestra naturaleza biopsicológica.

Pero porque hayamos empezado por ahí, ¿ha de decirse que nuestra ciencia no es un saber verdadero y que se limita a algunas recetas particulares respecto a ciertos particulares objetos?

¿No es esta conclusión superficial y demasiado mezquina? El pagmatismo me da toda la impresión de caer en una exageración diametralmente opuesta a aquella en que incurre el racionalismo tradicional. Este había tomado el punto de llegada por el punto de partida y concluido del término a los orígenes. El otro, por el contrario, aproxima hasta confundirlos el punto de llegada al punto de partida y describe el término con arreglo a los orígenes. ¿No es más razonable pensar que después de haber salido de un antropomorfismo utilitario as matemáticas han roto poco a poco el círculo subjetivo de este primer horizonte? Mediante un

análisis sin cesar progresivo han alcanzado algunas de las relaciones reales, objetivas, universales y necesarias de las cosas.

En resumen, parece ser que pueden proponerse las conclusiones siguientes respecto a la naturaleza, el valor y el alcance de las ciencias matemáticas: las matemáticas se han desarrollado lo bastante desde hace mucho tiempo para dar al espíritu humano el poder de imaginar, de crear relaciones abstractas de orden, número, posición y más generalmente de función. Estas relaciones están construidas evidentemente de una manera arbitraria; son, pues, posibilidades y en este sentido las matemáticas son una ciencia de lo posible que sobrepasa con mucho el campo de lo real y que se elabora ahora sin contacto con la experiencia y *a priori*.

Pero estas relaciones *posibles* han sido concebidas sobre el modelo de ciertas relaciones de igual orden que nos ofrece la experiencia, y antes de poder imaginar las primeras, ha sido preciso estudiar en la realidad las segundas. En este sentido, las matemáticas tienen un origen empírico y son una ciencia de lo real. Por esta razón, ciertas relaciones elaboradas arbitrariamente *a priori* por el espíritu, pueden encontrar después aplicación en la experiencia y servir a los estudios de hecho de los físicos; tales relaciones, son, en efecto, la consecuencia de relaciones descubiertas en su origen, mediante el análisis de la experiencia. Son y siempre serán *posibles*.

En fin, si las matemáticas son una ciencia de lo real no son un puro simbolismo, un instrumento

inventado artificialmente para las necesidades de la práctica. Se relacionan con ciertas propiedades de las cosas, y tienen su fundamento en la naturaleza de éstas, lo mismo que nuestra razón y nuestra lógica, de las que no son sino una aplicación particular y que se han constituido en el fondo de modo análogo.

¿Qué importa el puerto por el que hemos abordado a la realidad, si explorándola paso a paso logramos de todos modos dar la vuelta completa?

CAPITULO III

El problema de la materia.

- § 1. Historia y posición actual del problema de la materia.—
 § 2. La crisis de la física a fines del siglo XIX: la física energética.—§ 3. La interpretación filosófica de la energética.—
 § 4. Crítica de la crítica actual de la física.—§ 5. Lo que piensan de la física los físicos contemporáneos.—§ 6. La materia según la física contemporánea: apreciaciones generales.—§ 7. Las enseñanzas concretas de la física actual.—
 § 8. Resumen y conclusiones.

§ 1.—*Historia y posición actual del problema de la materia.*

Los primeros filósofos de Grecia, los filósofos de la escuela de Jonia, son llamados a menudo los "físicos". Esta denominación, que ya les daban Platón y Aristóteles en la antigüedad, muestra de por sí que dichos filósofos concentraban su atención en el problema de la materia. Muestra al mismo tiempo la antigüedad de este problema. Sin embargo, ha sido preciso aguardar a fines del siglo XVI y principios del XVII, para que las ciencias