pio, son las densidades del mercurio y del aire á 0° de temperatura y cuando la presión atmosférica es $\beta = 0^m.760$.

P..................	1.133411
β..................	9.880814
M..................	− 9.637784
p..................	− 7.113609
C..................	4.262832 $\quad C = 18316$

280. Este valor de C no conviene ciertamente más que á las circunstancias particulares que han servido á su determinación, á saber: las densidades del mercurio y del aire á 0° de temperatura, y cuando este último está perfectamente seco y sometido á la presión de $0^m.760$; pero habiendo obtenido la expresión general (5) del coeficiente, bastará introducir en ella los valores de P y p que convengan á otras circunstancias para obtener también el correspondiente de C.

La densidad del mercurio disminuye cuando crece su temperatura, puesto que, en igualdad de pesos, la dilatación hace aumentar su volumen; pero como se ha indicado ya la manera de reducir á 0° las columnas barométricas, no tendremos que ocuparnos en calcular el valor de P; y por el contrario, consideraremos esta cantidad como constante, puesto que la reducción mencionada da á conocer la altura, y en consecuencia el peso, de la columna á 0° de temperatura. No sucede lo mismo con la densidad del aire, en primer lugar por su temperatura; en segundo, porque siempre contiene alguna humedad que disminuye algo su peso; y en tercero, porque la presión á que está sometido, variando de un punto á otro de la atmósfera, influye directamente en su volumen y, por consecuencia, en el peso de éste, según el principio ó ley de Mariotte.

Vamos, pues, á hallar la expresión general de la densidad del aire suponiendo que es θ su temperatura, β la presión á que está sometido y e su estado higrométrico, quiere decir: e representa la relación entre la cantidad de vapor de agua contenida en la atmósfera, y la necesaria para que llegue á su punto de saturación.

Es un principio de la Física que, en las mezclas de gases y vapores, cada uno de estos cuerpos ejerce la misma presión que si ocupara todo el espacio en que está contenida la mezcla. Según esto, designando por f la fuerza elástica del vapor, que á la temperatura θ, saturaria una masa de aire, tendremos que ef será la fuerza de expansión del vapor que existe realmente en la atmósfera; y entonces puesto que β mide la presión de la mezcla, resulta que $\beta - ef$ es la que corresponde al aire seco contenido en ella. Fundados en este principio, calcularemos por separado el peso del aire y el del vapor para hallar en seguida su suma, que será el peso de la mezcla.

Si se designa por a el coeficiente de dilatación de los gases, y se toma por unidad la densidad del aire á 0°, su densidad á θ grados será $\frac{1}{1+a\theta}$. Como por otra parte, en igualdad de volúmenes las densidades de los fluidos elásticos son proporcionales á las presiones á que están sometidos, siendo 0.001299 la del aire á la presión $0^m.760$, su densidad á la presión $\beta - ef$ es.

$$0.001299 \frac{\beta - ef}{0^m.760\,(1 + a\theta)}$$

Respecto del vapor tenemos que á 0° su densidad es sólo 0.62 de la del aire; y en consecuencia, á la temperatura θ y á la presión ef será:

$$0.001299 \times 0.62 \frac{e\,f}{0^m.760\,(1 + a\theta)}$$

La suma de estos dos valores representa, pues, la densidad del aire en el estado higrométrico e, á saber:

$$p = \frac{0.001299}{1 + a\theta}\left(\frac{\beta - ef + 0.62\,ef}{0^m.760}\right) = \frac{0.001299\,\beta}{0^m.760\,(1 + a\theta)}\left(1 - 0.38\,\frac{ef}{\beta}\right)$$

Sustituyendo este valor en la expresión general (5) del coeficiente barométrico, se obtiene:

$$C = \frac{0^m.760\,P\,(1 + a\theta)}{0.001299\,M\left(1 - 0.38\,\frac{ef}{\beta}\right)} = 18316\,\frac{1 + a\theta}{1 - 0.38\,\frac{ef}{\beta}}$$

Este resultado indica que, en estas condiciones, el coeficiente es un poco mayor que el que corresponde al aire seco á 0° de temperatura y $0^m.760$ de presión. El denominador de la fórmula precedente siempre difiere muy poco de la unidad, en atención de que aun á las mayores temperaturas de la atmósfera, es muy pequeña la fuerza elástica f del vapor que contiene. En virtud de estas consideraciones puede simplificarse la expresión de C, introduciendo en su denominador valores medios de las diversas cantidades que la forman. Desde luego en las circunstancias ordinarias de la atmósfera, puede admitirse $e = \frac{1}{2}$, pues si bien en los lugares poco elevados é inmediatos á las costas, el aire por lo general se acerca más á su estado de saturación ó á $e = 1$, también en los países elevados está comunmente muy seco; y así es que, en conjunto, $e = 0.5$ representa bastante bien el estado higrométrico medio de la atmósfera. En cuanto á la presión β debe tenerse presente que adquiere su mayor valor al nivel del mar, en que es próximamente de $0^m.760$, y el menor en las altas regiones de la atmósfera cuyo límite corresponde á $\beta = 0$; pero como en las mayores alturas accesibles al hombre no baja generalmente el barómetro de $0^m.38$, adoptaremos el valor medio $\beta = 0^m.570$. Respecto de la fuerza elástica del vapor, se sabe que crece con la temperatura del aire, como lo manifiesta la siguiente tabla que contiene parte de los resultados obtenidos experimentalmente por Mr. Regnault, expresados en partes de la columna barométrica.

Temperatura.	f	Temperatura.	f
0°	$0^m.005$	20°	$0^m.017$
5	0 .007	25	0 .023
10	0 .009	30	0 .031
15	0 .013	35	0 .040

Por ella se notará que entre los límites 0° y 35°, que comprenden las temperaturas comunes de la atmósfera, puede representarse con bastante aproximación la fuerza elástica á la temperatura θ, por la ecuación:

$$f = 0^m.005 + 0^m.001\,\theta$$

siendo el coeficiente de θ la diferencia media por cada grado del ter-

mómetro centesimal, obtenida por la substracción de los números extremos $0^m.005$ y $0^m.040$ de la tabla y su división por 35°.

Sustituyendo, pues, $e = 0.5$, $\beta = 0^m.57$ y $f = 0^m.005 + 0^m.001\,\theta$ en el valor de C, obtendremos:

$$C = 18316 \frac{1 + a\,\theta}{0.99833 - 0.00033\,\theta} = \frac{18316\,(1 + a\,\theta)}{0.99833\,(1 - 0.00033\,\theta)}$$

que se puede poner bajo esta forma, atendiendo á la pequeñez del coeficiente numérico de θ:

$$C = 18346\,(1 + a\,\theta)\,(1 + 0.00033\,\theta)$$

Efectuando la multiplicación hasta la primera potencia de θ, y recordando que el coeficiente de expansión de los gases es $a = 0.00367$, resulta:

$$C = 18346\,(1 + 0.004\,\theta)$$

Antes de sustituir este valor en la ecuación (4) que da la diferencia de nivel, recordemos que θ representa la temperatura de la columna atmosférica. Para obtener este dato, se observan las indicaciones de un termómetro común al mismo tiempo que se miden las alturas barométricas B y b. Este termómetro, llamado *libre* para distinguirlo del fijo que suministra las temperaturas de los barómetros, debe establecerse al aire libre y á la sombra para evitar que alguna causa anormal altere sus verdaderas indicaciones. Siendo éstas T y t en las estaciones inferior y superior respectivamente, se admite que la masa de aire comprendida entre ellas tiene una temperatura media, representada por el término medio de las extremas T y t. Esta hipótesis está fundada en que cuando ninguna circunstancia perturba el estado normal de la atmósfera, se observa un decremento gradual de temperatura á medida que aumenta la elevación sobre el nivel del mar. La variación es próximamente de 1° del termómetro centesimal por cada 190^m de altura, hecho que parece indicar que las temperaturas de las capas de aire decrecen en progresión aritmética, y en consecuencia justifican aquella suposición. Tomando, pues, ...

$\theta = \frac{1}{2}(T + t)$ en el valor de C, y sustituyéndolo en la ecuación (4) se obtiene:

$$n = 18346\,[1 + 0.002\,(T + t)]\,(\log. B - \log. b) \ldots\ldots\ldots (6)$$

281. Esta fórmula suministra las diferencias de nivel con menos de $0^m.6$ de error por cada 100 metros de altura, de manera que puede emplearse para medir elevaciones que no excedan de unos cuantos centenares de metros; pero cuando se trata de obtener con exactitud desniveles muy considerables, es preciso hacerle ciertas correcciones originadas por la diversa intensidad con que obra la gravedad ó pesantez á diferentes distancias del centro de la tierra. Como para establecer la fórmula precedente se tomaron por datos los pesos del aire y del mercurio, tales como resultan de los experimentos hechos al nivel del mar y referidos á la latitud media de 45°, se infiere que variando estas circunstancias no serán numéricamente los mismos aquellos elementos, en atención á que los pesos varían también con la intensidad de la gravedad. Según esto, tanto el aire como el mercurio pesarán un poco menos á cierta altura de la atmósfera que en la superficie de la tierra; y aun en la misma superficie habrá alguna diferencia á causa de que, no siendo exactamente esférica, tampoco son iguales las distancias del centro á todos sus puntos. Las correcciones que se deducen de estas circunstancias son ciertamente muy pequeñas; pero no del todo despreciables en atención á la magnitud de la relación que existe entre el peso del mercurio y el del aire.

La gravedad es una fuerza que varía en razon inversa de los cuadrados de las distancias al centro de atracción, de manera que si designamos por γ la que corresponde á la latitud de 45° y por R' el radio terrestre á la misma latitud, será fácil calcular la intensidad con que obra en las dos estaciones sobre las columnas barométricas B y b, así como sobre la parte media de la columna de aire comprendida entre ellas. Con este objeto representemos por R el radio que corresponde á la latitud en que se ejecuten las observaciones, por G y g respectivamente las intensidades de la gravedad en los puntos en que son B y b las alturas barométricas, y por g' la que obra so-

bre la columna de aire. Llamando r la altura de la estación inferior sobre el nivel del mar, tendremos que su distancia al centro de la tierra es $R + r$; la de la estación superior será $R + r + n$; y la del medio de la columna de aire $R + r + \frac{1}{2}n$. En consecuencia se tienen las tres ecuaciones:

$$\gamma R'^2 = G\,(R + r)^2; \quad \gamma R'^2 = g\,(R + r + n)^2;$$
$$\gamma R'^2 = g'\,(R + r + \tfrac{1}{2}n)^2$$

Si tomamos por unidad la pesantez á 45°, las intensidades relativas de las otras son:

$$G = \frac{R'^2}{R^2\left(1 + \frac{R}{r}\right)^2}, \quad g = \frac{R'^2}{R^2\left(1 + \frac{\gamma + n}{R}\right)^2},$$

$$6' = \frac{R'^2}{R^2\left(1 + \frac{r + \frac{1}{2}n}{R}\right)^2}$$

y como, en igualdad de pesos, los volúmenes son inversamente proporcionales á las intensidades de la pesantez, las cantidades precedentes deberán ser los coeficientes de B, b y n en la fórmula (6) para que estos elementos queden reducidos á igualdad de circunstancias, y se tendrá:

$$n\,g' = 18346\,[1 + 0.002\,(T + t)]\,(\log. B\,G - \log. b\,g)$$

El último factor puede abreviarse de este modo: llamando B' y b' las alturas corregidas $B\,G$ y $b\,g$, é introduciendo los valores de G y g, se hallará:

$$\log. B' = \log. B + \log. \frac{R'^2}{R^2} - \frac{2\,M\,r}{R}$$

$$\log. b' = \log. b + \log. \frac{R'^2}{R^2} - \frac{2\,M\,r}{R} - \frac{2\,M\,n}{R}$$

cuya diferencia produce en la ecuación anterior:

$$n\,g' = 18346\,[1 + 0.002\,(T + t)]\left(\log. B - \log. b + \frac{2\,M\,n}{R}\right)$$

de la que se obtiene, por último, sustituyendo el valor de g':

$$n = 18346\ \frac{R^2}{R'^2}\,[1 + 0.002\,(T + t)]\,\left(\log. B - \log. b + \frac{2\,M\,n}{R}\right)\left(1 + \frac{2\,r + n}{R}\right) \quad \ldots (7)$$

282. Para explicar esta fórmula general, debería calcularse por el método de aproximaciones sucesivas, suponiendo primero $n = 0$ en el segundo miembro. De esta manera se obtendría el valor aproximativo n' que se introduciría después en lugar de n; pero como son tan pequeñas las correcciones, es preferible adoptar un procedimiento más breve que prácticamente da la misma exactitud. Desde luego la relación $\frac{R^2}{R'^2}$, que difiere muy poco de la unidad, puede calcularse atendiendo á la figura real de la tierra, y se ha hallado que designando por φ la latitud del lugar cuyo radio es R, resulta:

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1 + 0.0033 \cos. 2\,\varphi$$

siendo la constante 0.0033 una cantidad que depende de la pequeña excentricidad de los meridianos. Respecto de la corrección $\frac{2\,M\,n}{R}$ correspondiente á la diferencia logarítmica de las alturas barométricas observadas, es tan pequeña que podría despreciarse casi siempre; pero para evitar el error que á veces podría originarse de su completa omisión, lo que debe hacerse es calcularla para un valor medio del desnivel n, y adoptar el resultado como cantidad constante para todos los demás casos. De esta manera he hallado que la corrección equivale á aumentar un poco el coeficiente numérico 18346, cambiándolo en 18370. Con esta modificación y haciendo para abreviar:

$$A = 18370\,(1 + 0.0033 \cos. 2\,\varphi)$$
$$D = 1 + 0.002\,(T + t)$$

la fórmula queda reducida á

$$n = A\,D\,(\log. B - \log. b)\left(1 + \frac{2\,r + n}{R}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Para facilitar las aplicaciones he calculado los logaritmos de A y D que pueden tomarse de las dos tablas de las páginas siguientes, con los argumentos φ para la primera y $T + t$ para la segunda.

Aunque el segundo miembro de la fórmula (8) contiene todavía la incógnita n, se calcula con mucha facilidad de la manera que voy á indicar. Representando por n' el valor aproximativo que se obtiene suponiendo nula la cantidad $2\,r + n$, que es realmente muy pequeña respecto de R, resulta $n = n'\left(1 + \frac{2\,r + n'}{R}\right)$; y tomando los logaritmos en esta ecuación, tendremos:

$$\log. n = \log. n' + \frac{2\,M\,r}{R} + \frac{M\,n'}{R}$$

lo cual indica que para hallar el logaritmo del verdadero desnivel, basta hacer al del aproximativo las pequeñas correcciones por r y n'. Se recordará que r representa la altura de la estación inferior sobre el nivel del mar; pero como las más veces se emplea la fórmula barométrica para calcular la altura absoluta de un punto, resulta que casi siempre la estación inferior está al nivel del mar, y en consecuencia, se tiene $r = 0$. Aun cuando no sea así, la corrección por r es casi insignificante, pues para $r = 1000^m$, apenas llega á 0.00014 el valor de $\frac{2\,M\,r}{r}$. En consecuencia, no hay inconveniente en suponer generalmente $r = 0$, lo cual convierte la anterior corrección en la siguiente:

$$\log. n = \log. n' + \frac{M\,n'}{R}$$

que está contenida en una de las tablas que van á continuación, de donde puede tomarse con las primeras cifras de log. n' por argumento.

Sin embargo, si se desea atender á la altura de la estación inferior, la pequeña Tabla IV suministra las correcciones de log n, tomando por argumento el valor de r.

Con ayuda de estas tablas, el cálculo de la fórmula (8) es extremadamente sencillo, como lo manifiestan los siguientes ejemplos. El barón Alejandro de Humboldt, cerca de la cima del Chimborazo, ob-

TABLA I.—Factor barométrico dependiente de la latitud.

φ	Log. A	φ	Log. A	φ	Log. A
0°	4.26554	16°	4.26532	32°	4.26473
1	. 554	17	. 529	33	. 469
2	. 554	18	. 526	34	. 465
3	. 553	19	. 523	35	. 460
4	. 553	20	. 520	36	. 455
5	. 552	21	. 517	37	. 450
6	. 551	22	. 514	38	. 446
7	. 550	23	. 511	39	. 441
8	. 549	24	. 507	40	. 436
9	. 547	25	. 503	41	. 431
10	. 545	26	. 499	42	. 426
11	. 544	27	. 495	43	. 421
12	. 542	28	. 491	44	. 416
13	. 540	29	. 487	45	. 411
14	. 537	30	. 483	46	. 406
15	4.26535	31	4.26478	47	4.26401

TABLA III.—Corrección del logaritmo del desnivel aproximativo.

Log. n'	Corrección.	Log. n'.	Corrección.	Log. n'.	Corrección.
2.50	0.00002	3.15	0.00010	3.50	0.00022
2.60	. 3	3.20	. 11	3.55	. 24
2.70	. 3	3.25	. 12	3.60	. 27
2.80	. 4	3.30	. 14	3.65	. 30
2.90	. 5	3.35	. 15	3.70	. 34
3.00	. 7	3.40	. 17	3.75	. 38
3.10	. 9	3.45	. 19	3.80	. 43
3.15	0.00010	3.50	0.00022	3.85	0.00048

servó el barómetro y halló que su altura era de 0^m.3773, su temperatura de 10° y la del aire $t = -1°.6$. Al mismo tiempo indicaba el barómetro el nivel del mar 0^m.7620 siendo su temperatura igual á la

TABLA II. Factor barométrico dependiente de la temperatura del aire.

$T+t$.	Log. D.	Dif.	$T+t$.	Log. D.	Dif.	$T+t$.	Log. D.	Dif.	$T+t$.	Log. D.	Dif.
2°	0.00173	87	18°	0.01536	84	34°	0.02857	81	50°	0.04139	79
3	. 0260	86	19	. 1620	83	35	. 2938	81	51	. 4218	79
4	. 0346	86	20	. 1703	84	36	. 3019	81	52	. 4297	78
5	. 0432	86	21	. 1787	83	37	. 3100	81	53	. 4375	79
6	. 1518	86	22	. 1870	83	38	. 3181	81	54	. 4454	78
7	. 0604	85	23	. 1953	83	39	. 3262	80	55	. 4532	78
8	. 0689	86	24	. 2036	83	40	. 3342	81	56	. 4610	78
9	. 0775	85	25	: 2119	83	41	. 3423	80	57	. 4688	78
10	. 0860	85	26	. 2202	82	42	. 3503	80	58	. 4766	78
11	. 0945	85	27	. 2284	82	43	. 3583	80	59	. 4844	78
12	. 1030	85	28	. 2366	83	44	. 3663	80	60	. 4922	77
13	. 1115	84	29	. 2449	82	45	. 3743	79	61	. 4999	78
14	. 1199	85	30	. 2531	81	46	. 3822	80	62	. 5077	77
15	. 1284	84	31	. 2612	82	47	. 3902	79	63	. 5154	77
16	. 1368	84	32	. 2694	82	48	. 3981	79	64	. 5231	77
17	. 1452	84	33	. 2776	81	49	. 4060	79	65	. 5308	77
18	0.01536		34	0.02857		50	0.04139		66	0.05385	

TABLA IV. Corrección del log. n.

r	Corrección.	r	Correccion.
500^m	0.00007	2500^m	0.00034
1000	. 14	3000	. 41
1500	. 20	3500	. 48
2000	0.00027	4000	0.00054

del aire, á saber: $T = 25°.3$. Estas mismas alturas barométricas se han reducido á 0° en el número 277, por lo cual los datos para determinar la elevación de la montaña son:

Estación inferior.		Estación superior.	
$B = 0^m.7589$	$T = 25°.3$	$b = 0^m.3767$	$t = -1°.6$

La latitud media de las dos estaciones era $\varphi = 1° 45'$. Con este argumento la Tabla I da log. $A = 42.6554$; y con $T + t = 23°.7$ se obtiene por la Tabla II, log. $D = 0.02011$.

El cálculo será, pues:

log. B = 9.88018	A..............	4.26554
log. b = 9.57600	D..............	0.02011
log. B − log. b = 0.30418	....	9.48313
	n'..............	3.76878
	Correc. (Tabla III)...	0.00040
	n..............	3.76918 $n = 5877^m.3$

Casi todos los autores de fórmulas barométricas han calculado esta altura, que es sin duda una de las mayores á que puede llegar el hombre. Para que se juzgue del grado de exactitud que puede esperarse de la (8), consignaré algunos de los resultados obtenidos por diversas fórmulas.

La del Sr. Moral da....................................	$n = 5877^m.0$
El barón de Humboldt calcula..........................	$n = 5879\ .0$
Mr. Biot por su fórmula................................	$n = 5874\ .8$
La de Laplace produce..................................	$n = 5877\ .0$
Mr. Puissant encuentra.................................	$n = 5868\ .3$ [1]

Ejemplo 2.—Para determinar la altura de Guanajuato sobre el nivel del mar, el mismo Sr. de Humboldt observó en esa ciudad el barómetro, que le dió una indicación de $0^m.6009$, siendo su temperatura de $21°.3$, igual á la del aire. Al nivel del mar indicaba el barómetro $0^m.7631$, cuando su temperatura y la del aire eran de $25°.3$.

[1] No he repetido los cálculos de Mr. Puissant («Traité de Géodésie,» vol. 2, pág. 478); pero atendiendo á la discordancia del resultado, creo que deben tener alguna equivocación.

La latitud es $\varphi = 21°$, y así es que reduciendo á 0° las dos columnas barométricas, se dispondrá el cálculo como sigue:

Estación inferior.	Estación superior.	
$B = 0^m.7597$	$b = 0.5986$	
$T = 25°.3$	$t = 21°.3$	
log. B = 9.88064	A..............	4.26517
log. b = 9.77714	D..............	0.03870
log. B − log. b = 0.10350	....	9.01494
	n'..............	3.31881
	Correc. (Tabla III)...	0.00014
	n..............	3.31895 $n = 2084^m.2$

283. La simultaneidad de las observaciones se considera como la circunstancia más favorable á la exactitud de las diferencias de nivel determinadas por medio del barómetro; porque las indicaciones de este instrumento varían de una hora á otra, lo mismo que las del termómetro libre. Aunque nada perturbe el equilibrio normal de la atmósfera, es un hecho constante que la altura barométrica oscila dentro de ciertos límites, y con una regularidad notable en nuestros climas. En el espacio de 24 horas sufre dos *máximos* y dos *mínimos*, los primeros de los cuales se verifican hacia las 9^h de la mañana, y á cosa de las 11^h de la noche; mientras que los mínimos tienen lugar hacia las 4^h de la mañana y entre las 3^h y 4^h de la tarde. Además de estas oscilaciones diarias, que hasta cierto punto son susceptibles de predicción á causa de su constante regularidad, hay otras accidentales que, de un día á otro, hacen variar la altura barométrica en algunos milímetros, sin que hasta hoy haya un modo seguro de predecirlas. Por todas estas razones es preciso ejecutar observaciones simultáneas siempre que se desea medir un desnivel con toda la precisión de que es susceptible el método barométrico. A este fin se ponen de acuerdo los dos observadores, y á intervalos regulares toman las alturas del barómetro y del termómetro, después de