Los ríos se sondean habitualmente á lo largo de una línea equidistante de ambas orillas, que se llama *eje*, y también en una dirección transversal con el fin de conocer la sección del cauce. En los ríos de poca anchura se tiende un cordel de una á otra ribera, el cual estando dividido en metros ó en cualquiera otra unidad, y con la tensión necesaria para que quede sensiblemente recto, sirve para indicar los puntos equidistantes en que debe echarse la sonda. Cuando las corrientes son rápidas, influyen en la dirección de la sonda, desviándola bastante de la línea vertical; y como en tal caso daría indicaciones demasiado fuertes, debe hacérseles una corrección para obtener la verdadera profundidad. Con este fin se observa la dirección de la cuerda en la parte que queda fuera del agua, comparándola con la de una plomada que se suspende á su lado; pero de modo que el peso que la termina no entre en el líquido. Sea c la longitud de la cuerda fuera del agua, v la de la plomada contada desde la misma altura que c, y s la indicación que da la sonda: la profundidad correcta es: $n = \frac{v}{c} s$.

Los resultados de un sondeo se inscriben en los planos hidrográficos por medio de cifras que indican las profundidades expresadas en metros, brazas, etc., puestas precisamente en los puntos á que corresponden. Cuando es variable el nivel de las aguas como sucede en el mar á consecuencia del flujo y reflujo, es preciso referir el sondeo á un nivel determinado, y este es generalmente el de las bajas mareas equinocciales. Esta precaución es tanto más esencial, cuanto que en algunos puertos ú otros lugares que, por ser peligrosos, demandan el conocimiento del sondeo, sufre la marea variaciones muy considerables que deben tenerse en cuenta para evitar el riesgo de un naufragio.

CAPITULO V.

NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA.

257. El método de medir las diferencias de nivel por medio de observaciones angulares, no da en general resultados tan exactos como los que proporciona una nivelación topográfica; pero presenta en cambio la ventaja de permitir mayor rapidez en las operaciones; y como en muchísimos casos no es indispensable una extremada precisión, resulta que las nivelaciones trigonométricas adquieren grande importancia en la mayor parte de las aplicaciones usuales.

En el número 52 se explicó el modo de medir las distancias zenitales con los instrumentos repetidores, y en el Capítulo III de la Nivelación se ha expuesto también ampliamente la manera de hacerlo con toda clase de clisímetros de nivel fijo; por consiguiente pasaremos á desarrollar las fórmulas que se aplican en este género de operaciones, haciendo uso de la distancia zenital observada, que designaré por z, suponiéndola siempre conocida, pues se dijo en otra ocasión que aunque el clisímetro dé directamente los ángulos verticales respecto del horizonte, se deduce fácilmente aquella cantidad por ser complementaria de éstos.

Para tratar el problema con toda generalidad admitamos que la distancia de los puntos A y B (fig. 201ª), cuyo desnivel se trata de determinar, sea bástante grande para que no puedan suponerse paralelas sus verticales $A\,Z$ y $B\,Z'$, las cuales convergen hacia el centro de la tierra formando el ángulo C. Establecido esto, representando el arco $A\,O$ la superficie de nivel que pasa por A, la línea $B\,O$ será la altura que se busca de B respecto de A. Suponiendo que en A se mida la distancia zenital de B, el efecto de la refracción atmosférica hará que este último punto se vea en B'; de manera que designando por z el ángulo que da el instrumento, se tendrá $z = Z\,A\,B'$, al que será preciso añadir el valor r de la refracción para obtener la verdadera distancia zenital $Z\,A\,B = z + r$.

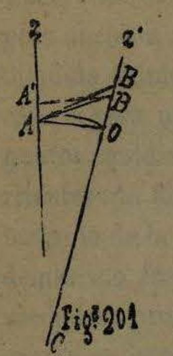

Fig.ª 201

En el triángulo $A\,B\,O$ llamando k la cuerda $A\,O$, se tiene que el desnivel $B\,O$ es:

$$n = k\,\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

Para hallar los valores de los ángulos A y B en función de $z+r$ tenemos: $B\,A\,O = A = 180° - (Z\,A\,B + O\,A\,C) = 90° - (z + r - \tfrac{1}{2}\,C)$. También se tiene $A\,B\,O = B = Z\,A\,B - A\,C\,B = z + r - C$. Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$n = k\,\frac{\cos.\,(z + r - \tfrac{1}{2}\,C)}{\text{sen.}\,(z + r - C)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se ha dicho que el valor de la refracción es proporcional al ángulo C de las verticales, de modo que siendo c un coeficiente constante, se tiene $r = c\,C$. Introduciendo este valor de r y haciendo para abreviar $u = (0.5 - c)\,C$, la expresión anterior puede escribirse así:

$$n = k\,\frac{\cos.\,(z - u)}{\text{sen.}\,(z - u - \tfrac{1}{2}\,C)}$$

Hagamos notar que el denominador es el seno de un ángulo que por lo regular difiere muy poco de 90°; y como por otra parte, aun para valores considerables de k es muy pequeño el ángulo C, se infiere que no se comete error de importancia al despreciar á $\tfrac{1}{2}\,C$, y entonces resulta:

$$n = k\,\text{cot.}\,(z - u)$$

Desarrollando la cot. $(z - u)$, y multiplicando después los dos términos del quebrado por cot. z, se obtiene sucesivamente:

$$n = k\,\frac{1 + \tan.\,z\,\tan.\,u}{\tan.\,z - \tan.\,u} = k\,\frac{\text{cot.}\,z + \tan.\,u}{1 - \text{cot.}\,z\,\tan.\,u}$$

Por ser z muy grande y u muy pequeño, el producto tan. u cot. z es de segundo orden, y puede omitirse sin inconveniente alguno, con lo que el desnivel quedará reducido al valor:

$$n = k\,\text{cot.}\,z + k\,\tan.\,u$$

El pequeño ángulo u depende de C, y como k es la cuerda de este último, se tiene $k = 2\,R\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,C$, siendo R el radio de la tierra. Atendiendo además á la pequeñez de C, tomaremos $k = R\,C$, ó bien $C = \frac{k}{R}$, valor que introducido en el de $u = (0.5 - c)\,C$, produce $u = \frac{0.5 - c}{R}\,k$. Sustituyendo esta cantidad en la expresión anterior y tomando el arco u por su tangente, se obtiene por último resultado:

$$n = k\,\text{cot.}\,z + \frac{0.5 - c}{R}\,k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

que es la fórmula usual para calcular las diferencias de nivel. Si fueran paralelas las verticales de A y B, el triángulo $A\,O\,B$ sería rectángulo en O, en cuyo caso se tendría: $n = k\,\text{cot.}\,c$. Se ve, pues, que el término $\frac{0.5 - c}{R}\,k^2$ mide el efecto de la convergencia de las verticales, y es el mismo que suministra la corrección por nivel aparente y refracción, según consta en el número 228.

Adoptando para la República el valor medio $c = 0.06$, é introduciendo el valor del radio, la fórmula será:

$$n = k\,\text{cot.}\,z + (2.8395)\,k^2$$

Veamos ahora el valor que debe usarse en lugar del de la cuerda k. Cuando distan mucho uno de otro los puntos A y B, la distancia horizontal que los separa no podrá considerarse como una línea recta, sino que será el arco $A\,O$, que expresado en medidas lineales, designaré por a, siendo como antes C su valor angular. Según esto se tiene $a = R\,C$; mientras que la cuerda k es $k = 2\,R$ sen. $\frac{1}{2}\,C$. Desarrollando en serie el seno del pequeño $\frac{1}{2}\,C$, resulta:

$$k = 2\,R\,(\tfrac{1}{2}\,C - \tfrac{1}{48}\,C^3 + \ldots\ldots)$$

expresión que se convierte en la siguiente introduciendo el valor $C = \frac{a}{R}$:

$$k = a - \frac{a^3}{24\,R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

la que manifiesta que *la diferencia entre el arco y la cuerda es igual al cubo del primero dividido por 24 veces el cuadrado del radio terrestre.* Esta última fórmula podría servir para calcular el valor de k; conociendo la distancia horizontal a comprendida entre los dos puntos; pero siendo a siempre muy pequeña respecto de R, casi nunca hay necesidad de hacer el cálculo, sino que se toma por k la distancia misma tal como resulta de la medida directa, ó de la resolución de la cadena si A y B son puntos trigonométricos.

La forma de la ecuación (2) indica, por otra parte, que debe influir poco en el resultado un pequeño error que tenga el valor de k. Diferenciando, en efecto, la expresión aproximativa $n = k$ cot. z, pues el otro término, por ser pequeño, puede suponerse invariable, se obtiene fácilmente:

$$\mathrm{d}\,n = \frac{n}{k}\,\mathrm{d}\,k - \frac{2\,n\,\text{sen.}\,1''}{\text{sen.}\,2\,z}\,\mathrm{d}\,z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En esta fórmula el primer término mide evidentemente la influencia del error $\mathrm{d}\,k$ que tenga la distancia, y el segundo la del error angular $\mathrm{d}\,z$; pero como $\mathrm{d}\,k$ queda multiplicado por la fracción $\frac{n}{k}$ que es siempre muy pequeña á causa de la diferencia considerable que existe entre los desniveles y las distancias horizontales, se infiere que la influencia de aquel error es por lo regular de poca importancia. No sucede lo mismo respecto del error angular $\mathrm{d}\,z$, cuyo coeficiente es grande por contener en el denominador el seno del ángulo $\mathrm{d}\,z$, que comunmente difiere poco de 180°, y en el numerador el doble del desnivel n. De este análisis se deduce que, en general, los errores angulares tienen más influencia que los lineales en los resultados de las nivelaciones trigonométricas.

Para presentar un tipo del cálculo, apliquemos la fórmula (2) a caso siguiente. Supongamos que una triangulación haya dado á conocer que la distancia entre dos vértices trigonométricos es k=25000$^{\text{m}}$, y admitamos que en uno de ellos se midió la distancia zenital del otro, habiendo dado el instrumento $z = 90°\,39'\,30''$.

La diferencia de sus alturas será, pues:

k........	4.39794	k^2.......	8.7959	
cot. z...	8.06034–	const....	2.8395	
	2.45828–		1.6354	
	$-287^{\text{m}}.3$		$43^{\text{m}}.2$	$n = -287^{\text{m}}.3 + 43^{\text{m}}.2 = -244^{\text{m}}.1.$

Si, por error, se hubiera hecho el cálculo con $k = 25050^{\text{m}}$ y .... $z = 90°\,40'$, se habría hallado con corta diferencia $n = -248^{\text{m}}.9$, resultado erróneo en cerca de 4^{m}. Corrijámoslo por la ecuación (4) con el fin de investigar qué influencia han tenido los errores $\mathrm{d}\,k$ y $\mathrm{d}\,z$, que considerados como correcciones, serán $\mathrm{d}\,k = -50^{\text{m}}$ y $\mathrm{d}\,z = -30''$.

n......	2.3945–	$2\,n$...	2.6955–	$\frac{n}{k}\,\mathrm{d}\,k =$	$+\;0^{\text{m}}.5$
k.......	4.3988	sen. 1″...	4.6856		
		$\mathrm{d}\,z$...	1.4771–		
	7.9957–			$-\frac{2n\,\text{sen.}\,1''}{\text{sen.}\,2\,z}\,\mathrm{d}\,z =$	$+\;3\;.1$
$\mathrm{d}\,k$.....	1.6990		8.8582		
		sen. $2\,z$...	8.3668–		
	9.6947			$\mathrm{d}\,n =$	$+\;3^{\text{m}}.6$
			0.4914–	$n =$	$-\;248\;.0$
				Desnivel correcto $=$	$-\;244^{\text{m}}.4$

Se ve, pues, que un error de 50^{m} en la distancia sólo hizo variar $0^{\text{m}}.5$ el resultado; mientras que 30″ de error en la distancia zenital produjo otro de más de 3^{m} en el valor de n. Esta aplicación numérica comprueba lo que se dijo respecto de la influencia relativa de los elementos lineal y angular, manifiesta la importancia de medir este último con la mayor precisión posible, y justifica el procedimiento de tomar en vez de la cuerda la distancia horizontal de un punto á otro. Si á pesar de esto se presentase algún caso excepcional en que, por ser muy grande esa distancia, se temiese el error que podría orinarse de esta sustitución, la fórmula (3) permitirá deducir el verdadero valor de k, ó lo que es preferible, corregir el logaritmo de la distancia a para obtener directamente el de la cuerda. La fórmula da, en efecto:

$$\log. k = \log. a + \log. \left(1 - \frac{a^2}{24\,R^2}\right)$$

Desarrollando y representando por M el módulo 0.43429....... de las tablas, resulta:

$$\log. k = \log. a - \frac{M a^2}{24\,R^2} = \log. a - (4.6497)\,a^2 \,\ldots\ldots (5)$$

Todo queda, pues, reducido á restar del log: a una pequeña cantidad. En el caso anterior, por ejemplo, la distancia era de 25000^m; calculemos el logaritmo de la cuerda:

Const......... 4.6497		
a^2......... 8.7959	$\log. a =$	4.3979400
3.4456	$-$	0.00000028
	$\log. k =$	4.3979397

Se ve que la corrección no tiene influencia alguna haciendo uso de logaritmos de cinco cifras decimales, que bastan siempre para el cálculo de la fórmula (2).

258. Se ha dicho en otra parte que, siendo pequeñas las distancias, pueden suponerse paralelas las verticales de las estaciones, en cuyo caso las diferencias de nivel se determinan por la ecuación más sencilla $n = k \cot. z$. Para fijar el límite de k, de tal manera que la omisión del término $\frac{0.5 - c}{R} k^2$ no produzca un error que exceda de una cantidad dada l, pondremos la condición: $m\,k^2 = l$, en la cual he representado por m el factor constante $\frac{0.44}{R}$. De ella se deduce:

$$k = \sqrt{\frac{l}{m}}$$

Calculándola desde $l = 0^m.1$ hasta $l = 1^m.0$, resultan los siguientes valores de k.

ERROR.	Límite de la distancia.
$0^m.1$	1200^m
0 .2	1700
0 .3	2084
0 .4	2406
0 .5	2690
0 .6	2946
0 .7	3183
0 .8	3402
0 .9	3608
1 .0	3804

Esta tabla podrá servir para formarse una idea del grado de aproximación con que puede obtenerse un desnivel por medio de la fórmula $n = k \cot. z$, que es la usada generalmente en las operaciones topográficas, aun para distancias de 4 ó 5 kilómetros. Parece á primera vista que tal práctica debería desecharse, puesto que para $k = 3000^m$, por ejemplo, el error que se comete es casi de $0^m.7$; pero no es así reflexionando que en la topografía se usan por lo común clisímetros cuya aproximación angular es sólo de $1'$, cantidad que puede representar también el error posible de observación al medir el ángulo z, y como el error de $1'$ produciría las más veces mayor efecto en n que la omisión del término $m\,k^2$, se comprende que en tales circunstancias sería ilusorio tomarlo en cuenta creyendo alcanzar más exactitud por ese medio. Por el contrario, sirviéndose de un instrumento que aproximase hasta $10''$ ó $15''$ las lecturas angulares, no me parece que debería desecharse el valor de $m\,k^2$ cuando las distancias excedieran de 2000^m ó 2500^m. Además, cuando la nivelación se hace con el objeto de adquirir datos para algún trabajo especial que demande el conocimiento exacto de los accidentes del terreno, debe aplicarse de toda preferencia el método topográfico; pero cuando sólo se trata de configurar los principales accidentes del suelo, de medir las alturas de las montañas, etc., casi nunca es preciso hacerlo más que con la aproximación de 1^m ó 2^m, y entonces el método trigonométrico es de inmensa utilidad en atención á que no exige más que el elemento z, que puede obtenerse al mismo tiempo que se practican otras operaciones de la topografía. Así por ejemplo, al tomar los ángulos de una triangulación, basta leer las indicaciones del círculo vertical en dos posiciones inversas del teodolito, para conocer las distancias zenitales de los puntos observados, y en consecuencia para poder calcular sus diferentes alturas.

259. Las nivelaciones trigonométricas suministran resultados comparables en exactitud á los de las nivelaciones topográficas, cuando además de hacerse uso de clisímetros que den los ángulos con mucha aproximación, se conoce bien el efecto de la refracción atmosférica, ó se elimina por medio de una doble observación, como vamos á indicarlo, estableciendo antes el método para obtener experimentalmente el valor de la refracción.

Supongamos que mientras un observador mide en A (fig. 201ª) la distancia zenital de B, otro establecido en este punto mide la de A. En estas observaciones simultáneas y recíprocas es muy probable que sea el mismo valor de la refracción, afectando en igual cantidad las dos distancias zenitales, puesto que son idénticas las condiciones atmosféricas y común la distancia que separa las dos estaciones. El observador que está en A verá en B' el punto B y el que ocupa la estación B verá el punto A en A', de suerte que designando por z y z' los ángulos que obtengan, las distancias zenitales correctas serán respectivamente $ZAB = z + r$, y $Z'BA = z' + r$. Ahora en el triángulo ABC se tiene: $ZAB = C + 180° - Z'BA$, é introduciendo los valores precedentes y despejando, resulta:

$$r = 90° + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(z + z') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

fórmula que suministra el valor de r. El ángulo C de las verticales se deduce de la distancia k de las estaciones, pues siendo R el radio terrestre se tiene $C = \frac{k}{R}$ en partes del radio trigonométrico, y por consiguiente en segundos: $\frac{1}{2}C = \frac{k}{2R\,\text{sen.}\,1''}$. Calculando el logaritmo constante, la ecuación anterior podrá expresarse así:

$$r = 90° + (8.20948)\,k - \tfrac{1}{2}(z + z')$$

Apliquémosla á los datos siguientes obtenidos en dos estaciones cuya distancia era de 17930ᵐ:

Const.	8.2095	$z =$	89° 41′ 25″
k	4.2536	$z' =$	90 27 7
	2.4631	$\frac{1}{2}(z + z') =$	90° 4′ 16″
		$90 + \frac{1}{2}C =$	90 4 50.5
$\frac{1}{2}C = 290.''5$		$r =$	34.5

Según hemos dicho, el valor de r es proporcional al ángulo C, y se tiene: $r = cC$, siendo c el *coeficiente de refracción*. Puede calcularse directamente, pues dividiendo por C la ecuación (6) resulta:

$$c = 0.5 - \frac{\frac{1}{2}(z + z') - 90°}{C}$$

y sustituyendo el valor $C = \frac{k}{R\,\text{sen.}\,1''}$, obtendremos con el logaritmo del factor constante:

$$c = 0.5 - (1.4895)\,\frac{\frac{1}{2}(z + z') - 90°}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Con los datos anteriores se tendrá:

$\frac{1}{2}(z + z') - 90° = 256''$	2.4082	
Const.	1.4895	
	3.8977	
k	4.2536	
	9.6441	0.4407

$$c = 0.5 - 0.4407 = 0.0593$$

Haciendo muchas observaciones de este genero en distintas circunstancias atmosféricas, se obtiene un valor medio del coeficiente c, que sirve en seguida para calcular la refracción correspondiente á una distancia dada, á saber:

$$r = \frac{ck}{R\,\text{sen.}\,1''} = (8.5105)\,ck$$

Adoptando, por ejemplo, $c = 0.06$, resulta con $k = 17930^{m}$:

Const..................	8.5105	
c..................	8.7781	
k..................	4.2536	
r..................	1.5422	$r = 34.''8$

Más bien que la refracción, lo que importa conocer con exactitud es el valor de c, porque es el que figura en la fórmula (2) que da los desniveles.

260. No siempre es posible hacer simultáneamente las dos observaciones, pues para esto se necesita el concurso de dos observadores; pero si uno solo mide z y z' procurando que sea en igualdad de condiciones de la atmósfera, puede aplicar las fórmulas anteriores para calcular el coeficiente c, casi con tanta seguridad como si fueran simultáneas las medidas. Lo mismo diremos respecto de la determinación de las diferencias de nivel por medio de la doble observación, que elimina la cantidad r. En efecto, si en la ecuación (1) se introduce el valor (6) de la refracción, resulta:

$$n = \frac{k \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(z' - z)}{\cos.\, \frac{1}{2}(z' - z + C)}$$

en la cual puede omitirse C sin inconveniente alguno, por ser el denominador el coseno de un ángulo generalmente muy pequeño, y entonces se obtiene:

$$n = k \tan.\, \tfrac{1}{2}(z' - z) \;\text{.............................}\; (8)$$

En los casos en que $z' - z$ no es pequeño, lo es k, atendiendo á la desigualdad que existe por lo común entre las distancias verticales y las horizontales; y como siendo la distancia k poco considerable, pueden suponerse paralelas las líneas verticales de las dos estaciones, se deduce que $C = 0$, y por consiguiente, siempre puede omitirse.

Apliquemos la fórmula (8) á los datos del número precedente:

$z = 89° \, 41' \, 25''$			
$z' = 90 \;\; 27 \;\; 7$	k.........	4.2536	
$\frac{1}{2}(z' - z) = +\; 22' \, 51''$	tan.........	7.8226	
	n.........	2.0762	$n = +\; 119^{m}.2$

Sea que se midan las diferencias de nivel aplicando la fórmula (2), ó que conociendo las distancias zenitales recíprocas, se haga uso de la (8), los resultados darán siempre la altura del punto observado respecto del centro del clisímetro. Siendo h la elevación de este sobre el suelo, y m la de la señal que se observa, el verdadero desnivel será $n - (m - h)$ si n es positivo, ó bien $n + (m - h)$ si es negativo.

Puede también calcularse el efecto de la posición del instrumento, corrigiendo la distancia zenital medida, á fin de reducirla al valor que tendría si se hubiera observado exactamente en el centro de la estación. Esta corrección es útil sobre todo cuando se practican observaciones simultáneas y recíprocas; porque la necesidad de observar desde cada estación la señal de la otra, obliga al ingeniero á colocar el instrumento á cierta distancia de la señal, aunque en el plano vertical que pasa por las dos estaciones.

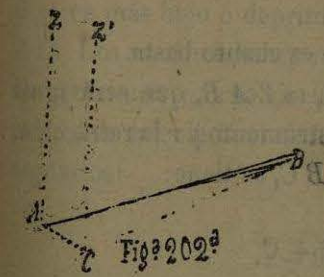

Fig.ª 202ª

Sea C (fig. 202ª) el punto en que está el clisímetro en el plano vertical ACB de las dos estaciones A y B. La distancia zenital que debe emplearse en el cálculo es $ZAB = z$; mientras que la que se mide en C es $Z'CB = z_1$. Llamando k la distancia AB, Δ la AC, y z_2 la distancia zenital $Z'CA$ de la señal A, tendremos que en el triángulo ABC, suponiendo trazada por A una paralela á la línea CB, resulta: $z = z_1 + B$. Para calcular el pequeño ángulo en B, el mismo triángulo da: $k : \text{sen.}\,(z_1 + z_2) :: \Delta : B \,\text{sen.}\, 1''$, de donde despejando y sustituyendo en el valor de z, se obtiene:

$$z = z_1 + \frac{\Delta \,\text{sen.}\,(z_1 + z_2)}{k \,\text{sen.}\, 1''}$$

Si el instrumento ocupa la posición C' en la misma vertical de A, se tiene $z_2 = 0$, y entonces:

$$z = z_1 + \frac{\Delta \operatorname{sen.} z_1}{k \operatorname{sen.} 1''}$$

De esta manera se reduce la medida al punto que se observa desde la otra estación. Es claro que por k puede usarse la distancia horizontal de las dos estaciones.

203ª

261. El método trigonométrico de nivelación se presta á la determinación de la altura absoluta de un punto cuando desde él se descubre el horizonte del mar. Sea A (fig. 203ª) el punto de que se trata, y $A\,B$ la visual dirigida al horizonte y que es tangente en B á la superficie del mar. Designando por R el radio de la tierra, y por n la altura $A\,O$ que se busca, tendremos en el triángulo rectángulo $A\,B\,C$:

$$R = (R + n) \cos. C$$

de donde resulta:

$$n = R\,\frac{1 - \cos. C}{\cos. C} = 2\,R \tan.^2 \tfrac{1}{2}\,C$$

aproximando hasta el segundo orden, que es cuanto basta.

La distancia zenital de B, medida en A, es $Z\,A\,B$, que será igual á $z + r$, llamando z el ángulo que da el instrumento y r la refracción. Como $z + r$ es externo en el triángulo $A\,B\,C$, se tiene:

$$z + r = z + c\,C = 90° + C,$$

y en consecuencia: $C = \frac{1}{1-c}(z - 90°)$.

Antes de sustituir este valor en el de n, hagamos notar que en ángulos pequeños como C, se verifica que los senos y tangentes son sensiblemente proporcionales á los arcos, y podremos suponer........ $\tan. \frac{1}{2}\,C = \frac{1}{2} \tan. C$, con lo cual el valor de n será:

$$n = \tfrac{1}{2}\,R \tan.^2 C$$

Por tal razón, considerando á $\frac{1}{1-c}$ como coeficiente, se tendrá: $\tan. C = \frac{1}{1-c} \tan. (z - 90°)$, valor que introducido en el precedente, produce:

$$n = \frac{R}{2\,(1-c)^2} \tan.^2 (z - 90°) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (9)$$

Conociendo de esta manera la altura de un punto sobre el nivel del mar, se determinan todas las de los otros puntos cuyas diferencias de nivel se hayan calculado respecto del primero. Sin embargo, siempre que se pueda, es preferible medir la altura de un punto respecto del Océano por medio de una nivelación topográfica, pues la refracción es más incierta observando el horizonte del mar á causa de los vapores de sus aguas, y acaso el coeficiente c que figura en la fórmula (9) no sea el que convenga realmente á ese estado de la atmósfera. De todas maneras, la altura que se obtenga debe referirse á la marea media.

262. El horizonte de A es el plano $A\,H$ perpendicular á $A\,Z$, de modo que la distancia zenital $Z\,A\,B$ que se mide en A, es necesariamente mayor que 90°. La diferencia $z - 90°$ se llama por esta causa *depresión del horizonte*, y es en efecto el ángulo $H\,A\,B$ que el punto B se ve más bajo ó deprimido que H, y cuyo valor depende de n ó $A\,O$. Los marinos hacen mucho uso de este ángulo para corregir las observaciones que se ejecutan á cierta altura respecto del nivel del mar; y se calcula fácilmente por medio de la fórmula (9) que da en segundos:

$$z - 90° = \frac{1 - c}{\operatorname{sen.} 1''} \sqrt{\frac{2\,n}{R}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (10)$$

Suponiendo $c = 0.06$, y calculando el logaritmo constante se obtiene:

$$z - 90° = (2.0361) \sqrt{n}$$

Esta fórmula puede reducirse á tabla para diversos valores de n, que expresará entonces la altura del buque, ó por mejor decir, de la vista del observador sobre el nivel del mar. Es claro que si á la distancia n del agua se hace, por ejemplo, la observación de la altura angular de un astro respecto del horizonte B del mar, será preciso restarle la depresión $z - 90°$ para obtener la altura respecto del plano horizontal $A\,H$. Como el movimiento de los navíos no permite el uso de instrumentos provistos de niveles, se ven obligados los marinos á referir al horizonte del mar las frecuentes observaciones astronómicas que tienen que ejecutar para conocer su ruta al través del Océano; y entonces aplican la corrección que he indicado.

CAPITULO VI.

CONFIGURACIÓN DE LOS ACCIDENTES DEL TERRENO.

263. Se ha visto que por medio de nivelaciones es fácil construir el perfil del terreno en la dirección en que aquéllas se hayan practicado, lo cual suministra una verdadera proyección vertical del mismo terreno. Con el conocimiento de esos cortes ó perfiles puede formarse una idea bastante exacta de los accidentes del suelo; pero la representación gráfica de éstos por medio de las proyecciones verticales tendría el inconveniente de demandar tantas construcciones diversas cuantas fueran las direcciones en que se hubieran ejecutado las nivelaciones, sin que por otra parte fuese posible apreciar en conjunto las desigualdades de todos los puntos del terreno, por numerosos que fueran los perfiles que se construyesen. Además de este grave inconveniente, sería preciso examinar á la vez las proyecciones horizontales y las verticales de las direcciones niveladas, y hacer continuas referencias del plano á los perfiles, y viceversa, para estimar debidamente la configuración del suelo.

A la verdad, podría evitarse la construcción de los cortes sustituyéndolos con guarismos inscritos en el plano, que diesen á conocer las alturas de los puntos correspondientes respecto de una superficie de comparación, lo mismo que se inscriben las indicaciones de la sonda en los planos hidrográficos; pero este método, sin presentar tampoco la ventaja de permitir una exacta apreciación del conjunto, ofrecería el inconveniente de hacer confuso el dibujo y que desaparecieran acaso algunos detalles importantes del plano.