La cantidad $\frac{k^2}{R}(0.5 - c)$ es, pues, la corrección substractiva que debe hacerse á la indicación de la mira por los efectos combinados del nivel aparente y de la refracción, para obtener la verdadera diferencia de nivel entre los puntos $O$ y $B$.

El valor de $c$ varía ligeramente con el estado de la atmósfera. En Europa se ha hallado que es de 0.10 en el invierno y de 0.06 en el verano, por lo cual comunmente se adopta el término medio $c = 0.08$. En la República se han hecho pocas observaciones para determinar esa constante; pero todas ellas indican que el valor admitido en Europa es demasiado fuerte para nuestro clima, sobre todo en la parte más elevada del país. El ingeniero D. Miguel Iglesias encontró por dos observaciones hechas en el Valle de México y en el verano, $c = 0.05$, que es muy poco menor que el valor que yo había obtenido por un corto número de experiencias. Cuando se tenga oportunidad de medir directamente esa constante, por el método que se indicará en el Capítulo V, será preferible hacer uso del resultado que se obtenga; pero entretanto me parece conveniente adoptar $c = 0.06$ para nuestro país. Con este valor la fórmula (3) vendrá á ser:

$$h = h'' - \frac{0.44}{R}\, k^2$$

y por ser constante el coeficiente de $k^2$, resultará calculando su logaritmo:

$$h = h'' - (2.8395)\, k^2$$

*Ejemplo.*—Calculemos la verdadera diferencia de altura entre dos puntos cuando la mira indica $h'' = 3^{m}.25$, siendo su distancia al observador, $k = 1500^{m}$.

| | | |
|---|---|---|
| Log. const.................... | 2.8395 | |
| „ 2250000......... ..... | 6.3522 | $h'' = 3^{m}.25$ |
| | 9.1917 .................. | $-\ 0.\ 16$ |
| | | $h = 3.^{m}09$ |

De estas correcciones se han formado tablas que tienen por argumento las distancias $k$; pero como el cálculo directo es tan sencillo, no me parece necesario reproducirlas.

# CAPITULO II.

## DE LOS NIVELES.

229. Los instrumentos que se usan en la nivelación son de dos clases: los unos indican la dirección del plano horizontal en el punto de estación, y reciben el nombre genérico de *niveles*. Los otros permiten medir el ángulo que forma con el plano horizontal la visual inclinada que se dirige al punto observado, y se llaman *clisímetros*. Los primeros se aplican al método topográfico de nivelación, y los segundos al trigonométrico. En este Capítulo me ocuparé de los niveles.

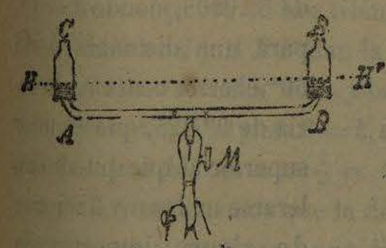

Fig.ª 175ª

El más sencillo de estos instrumentos es el *nivel de agua*, representado en la figura 175ª; y que consiste en un tubo metálico $A\,B$ cuyos extremos se encorvan para recibir otros dos tubos de vidrio $C$ y $D$ de igual diámetro. Todo el aparato se fija en un tripié por medio de la rodilla $M$.

Para hacer uso de este nivel, se coloca la parte $A\,B$ en una posición sensiblemente horizontal, y se vierte agua en uno de los tubos $C$ ó $D$ hasta que en ambos llegue á la mitad ó los dos tercios de la altura. Es claro que en virtud de la propiedad de los líquidos, luego que se establece el equilibrio, las cuatro visuales que se pueden dirigir tangentes á los dos cilindros $C$ y $D$, á la altura del agua, se hallan situadas en el plano horizontal $H H'$.

La intersección de la superficie del líquido con los tubos no es una línea exactamente determinada, sino que á causa de la atracción molecular entre el agua y el vidrio, llamada *capilaridad*, se adhiere el líquido á las paredes del vaso, formando así una superficie cóncava, que hace bastante incierta la dirección de las visuales. Para disminuir el efecto de esta incertidumbre conviene alejarse algunos pasos del instrumento, á fin de que las elevaciones del agua, presentándose á la vista en su conjunto, aparezcan como líneas terminadas con más claridad.

Si no son exactamente iguales los diámetros de los tubos de vidrio, la capilaridad se manifestará con más intensidad en el de menor diámetro, haciendo que las visuales se desvíen tanto más de la horizontalidad cuanto mayor sea la diferencia de los diámetros. Para calcular el efecto de cualquiera de estas causas de error, supongamos que en la distancia $d$ que separa los tubos, la visual dirigida se desvíe la cantidad $m$ de la verdadera línea horizontal: á la distancia $k$ de la mira al instrumento, le désviación producida será: $x = \frac{k}{d}\ m$. Así, admitiendo que la incertidumbre $m$ no sea más que de $0^m.0005$, siendo $d = 1^m$, para una distancia $k$ de $50^m$ el error ocasionado sería de $0^m.025$, que es muy superior al que puede tolerarse en las nivelaciones de alguna importancia. Este resultado indica que para servirse de este nivel no deben exceder de 25 ó 30 metros las distancias entre las estaciones; y que en general debe desecharse para la ejecución de operaciones algo delicadas.

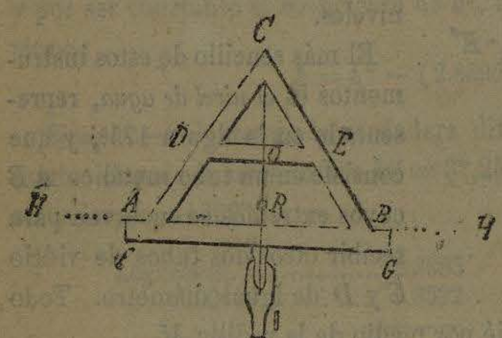

Fig.ª 176ª

230. Otro nivel, llamado *de perpendículo*, y más comunmente *nivel*



*de albañil*, consiste en dos reglas $A\ C$ y $B\ C$ (fig. 176ª) de igual longitud, unidas por otra $D\ E$, de manera que formen el triángulo isósceles $D\ C\ E$. Los extremos $A$ y $B$ de las dos reglas están cortados por un plano perpendicular á la línea $C\ R$, llamada *línea de fe*, marcada en el instrumento por medio del punto $C$ y de la señal trazada en $O$ á la mitad de la regla transversal. Suspendiendo en $C$ una plomada que tenga un hilo muy delgado, la línea $A\ B$ será horizontal cuando la señal $O$ quede cubierta por el hilo $C\ R$.

Para hacer uso de ste nivel, se le coloca sobre una regla $F\ G$, que va unida al tripié: si esta no es horizontal, la plomada se inclinará al lado más bajo; y haciendo mover la regla hasta que la plomada pase por $O$, la línea $H H'$ será horizontal, y por consiguiente suministrará la visual que conviene en el punto de observación.

Es necesario advertir que la menor inexactitud en el trazo de la línea $C\ O$, así como el espesor del hilo $C\ R$, producen la desviación de la visual, y en consecuencia un error en la indicación de la mira. Sea $A\ B$ (fig. 177ª) la verdadera línea horizontal, y $A\ D$ la visual inclinada á causa de la desviación de la plomada $C\ R$, que debería pasar por $o$ en vez de indicar el punto $d$. Los triángulos semejantes $c\ o\ d$ y $A\ B\ D$ dan la ecuación: $B\ D \times co = A\ B \times do$, y haciendo $c\ o = r$, $o\ d = m$ y $A\ B = k$, se tendrá que: $x$ ó $B\ D$ es $x = \frac{k}{r}\ m$. Si la altura del instrumento es........ $r = 0^m.2$, y suponemos que la desviación $m$ es solamente de $0^m.0001$, el error que se produce á una distancia de 50 metros tiene por valor $x = \frac{0.005}{0.2} = 0^m025$.

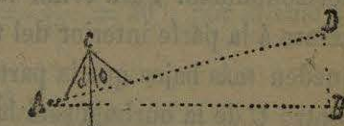

Fig.ª 177ª

Por lo que precede se ve que este nivel, lo mismo que el anterior, sólo puede emplearse en operaciones de muy poca importancia y haciendo estaciones á cortas distancias.

El nivel de perpendículo no siempre tiene la figura que se ha descrito, pues consiste muchas veces en dos reglas que forman entre sí un ángulo recto. A lo largo de una de ellas está la plomada, y la otra indica la dirección de las visuales. Sin embargo, cualquiera que sea la forma del aparato, es el mismo del fundamento de su construcción y los mismos también sus defectos.

231. El más perfecto de los niveles es el llamado de *burbuja de aire*, ó simplemente *nivel de aire*. Consiste en un tubo de vidrio $A\ B$ (fig. 178ª) cerrado herméticamente y lleno casi en su totalidad de alcohol ó de éter, de manera que sólo un pequeño espacio $C$ de su capacidad quede ocupado por el aire ó por el gas que proviene de la evaporación del mismo líquido.

Fig.ª 178ª

Es claro que cualquiera que sea la posición de este instrumento, la burbuja de gas irá siempre á ocupar la parte más elevada del tubo, en virtud de su menor densidad; y si suponemos que este fuera enteramente cilíndrico y recto, cuando su eje estuviese exactamente horizontal, la burbuja se extendería á lo largo de la generatriz superior, y bastaría la más leve inclinación para que pasara de un extremo al otro del tubo, siendo en consecuencia muy difícil lograr que indicara la horizontalidad. Para evitar este inconveniente se da una ligera curvatura á la parte interior del tubo, de modo que sus extremos $A$ y $B$ queden más bajos que la parte media, y entonces la tangente en el centro $C$ de la burbuja será la horizontal $H\,H'$.

Por lo general, se divide el tubo en partes iguales, que se numeran desde el centro hacia uno y otro extremo, ó se le adapta una escala dividida y numerada. Estas divisiones sirven tanto para indicar la horizontalidad perfecta del tubo, como para cerciorarse de si es ó no uniforme su curvatura interior. Para lo primero, basta evidentemente hacer que los límites de la burbuja señalen el mismo número de divisiones hacia un lado y otro del centro; y para lo segundo, que la misma burbuja ocupe igual extensión en todo su curso á lo largo del tubo.

232. Un nivel es tanto más sensible, quiere decir, indica la horizontalidad con tanta mayor precisión, cuanto menor es su curvatura; y como ésta es inversamente proporcional al radio de su círculo osculador, resulta que el radio de curvatura podrá servir de medida á la sensibilidad. Para calcularlo, sea $e$ la extensión de una de las divisiones, y $v$ su *valor angular*, esto es, el cambio de inclinación del tubo respecto del horizonte cuando cada extremo de la burbuja pase de una división á otra, ó recorra el espacio $e$. Expresando á $v$ en segundos y teniendo presente que la semicircunferencia $\pi r$ del círculo osculador tiene $648000''$, resulta la proporción:



$$v : e :: 648000 : \pi r$$

de donde se obtiene por valor del radio de curvatura:

$$v = 206265 \frac{e}{v}$$

El valor lineal $e$ de las divisiones se obtiene midiéndolas con una escala de milímetros, y en cuanto al angular $v$, enseñaremos á medirlo en el Capítulo siguiente.

Supongamos que las divisiones de un nivel están trazadas á distancias de $0^m.003$, y que se ha reconocido que cuando el tubo se inclina $15'$ respecto del horizonte, cada extremo de la burbuja recorre 30 divisiones. Tendremos: $e = 0^m.003$ y $v = \frac{900''}{10} = 30''$, por lo cual su radio de curvatura será:

$$r = 206265 \times \frac{0.003}{30} = 20^m.6$$

Para los grandes aparatos astronómicos se construyen niveles hasta de $600^m$ de radio; pero tal grado de sensibilidad sería no solamente inútil en los instrumentos topográficos, que no necesitan tanta precisión, sino más bien perjudicial para la rapidez de las operaciones, en atención á que es casi imposible conseguir la permanencia de la burbuja en el centro del tubo en un instrumento móvil, cuando el nivel es demasiado sensible. Por lo general los niveles topográficos tienen de $15^m$ á $30^m$ de radio, y es evidente que equivalen á un nivel de perpendículo de las mismas dimensiones.

233. Comunmente los tubos de vidrio se guarnecen de armaduras metálicas, que dejan el espacio suficiente para observar la marcha de la burbuja; y que van unidas por sus

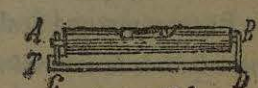

Fig.ª 179ª

extremidades $A$ y $B$ (fig. 179ª) á una regla $CD$. El extremo $B$, aunque á una distancia invariable de $D$, puede girar al derredor de la charnela que lo une al apoyo $BD$, y el virtud de este movimiento, que se comunica por medio del tornillo $T$, es posible variar la distancia de la regla al eje del nivel, y por consiguiente, establecer su paralelismo como lo voy á indicar.

Supongamos que la regla inferior del nivel se haya colocado en $EF$ (fig. 180ª) sobre la superficie $CD$ inclinada respecto del horizonte $HH'$. Es claro que para que la burbuja ocupe el medio $O$ del tubo ha sido necesario bajar el extremo $B$ ó subir el $A$, y el nivel ocupará la posición $AB$. Si la superficie $CD$ fuera horizontal, invirtiendo el nivel, esto es, llevando el apoyo $E$ á $F$, y situando este último en $E$, la burbuja $O$ no variaría de lugar; porque durante el movimiento el tubo $AB$ no cesaría de estar en un plano horizontal. Pero en la hipótesis admitida, la superficie $CD$ forma un ángulo $DRH' = i$ con el horizonte; luego al ejecutar la inversión del nivel ocupará su tubo la posición $B'A'$, formando un ángulo $A'OB = n$, con su situación anterior, esto es, con la horizontal $AB$, y la burbuja ya no se encontrará en $O$.

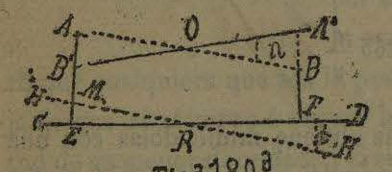
Fig.ª 180ª

Si en el triángulo isósceles $A'OB$ designamos por $m$ los ángulos iguales $A'$ y $B$, tendremos: $n = 180° - 2m$. Además, como el ángulo $M$ del triángulo rectángulo $RME$ es igual á $OAB' = m$, resulta que $CRH$ ó $i$, tiene por valor: $i = 90° - m$. De la comparación de este ángulo con $n$ se deduce: $n = 2i$; lo cual indica que *después de la inversión de los extremos del nivel, el eje de éste forma con la horizontal un ángulo igual al doble de la inclinación de la superficie que le sirve de apoyo.*

El teorema que acaba de demostrarse, conocido con el nombre de *principio de la inversión*, es el que sirve de fundamento para corregir los niveles, y para nivelar la superficie en que se apoyan, ó lo que viene á ser lo mismo, para poner verticales las columnas de los ins-



trumentos á que aquellos van unidos. Aunque ya se ha descrito el modo de efectuar la corrección, al exponer las rectificaciones de los instrumentos angulares, especialmente las del círculo y del teodolito, recordemos el método general que se deduce del principio de la inversión.

Después de mover los tornillos del pie del instrumento hasta que la burbuja de su nivel se encuentre hacia la mitad del tubo, obsérvese en cuál de las divisiones se detiene cada una de sus extremidades, aun cuando no estén equidistantes del centro. Inviértase en seguida el nivel haciendo que gire 180° la columna vertical del instrumento, y si en su nueva posición indica la burbuja iguales divisiones y del mismo lado respecto del observador, que permanece en el mismo lugar, el nivel estará correcto, y la desviación que se note con respecto al centro es debida á la inclinación de la columna. Pero si no son iguales las divisiones que señala en sus dos posiciones, muévase el tornillo del nivel hasta que la burbuja haya recorrido una longitud igual á la semidiferencia de sus dos indicaciones, y el nivel quedará corregido.

En otros términos, si $2l$ es la longitud actual de la burbuja, expresada en divisiones de la escala, supongamos que en la primera posición uno de sus extremos, el de la derecha, por ejemplo, indique $p = l + m$: el de la izquierda señalará $q = l - m$. Después de la inversión admitamos que el extremo que en esta nueva posición queda á la derecha, indique $p' = l + n$ y el de la izquierda $q' = l - n$. Entonces $p - p' = q' - q = m - n$, representará el doble del error del nivel; y en consecuencia deberá moverse el tornillo que modifica la longitud de uno de sus apoyos, hasta que sus extremos de la derecha y de la izquierda señalen respectivamente $P = l + \frac{1}{2}(m + n)$ y $Q = l - \frac{1}{2}(m + n)$. Como es muy difícil destruir todo el error de una sola vez, conviene volver á la primera posición para ver si se ha logrado destruirlo; y si no es así, se vuelve á leer la indicación, que comparada con la última, dará la nueva diferencia cuya mitad debe aplicarse como corrección moviendo el tornillo del nivel; y se prosigue así hasta que, en las dos posiciones, el mismo extremo de la burbuja, esto es, el que en ambas queda á la derecha por ejemplo, señale indicaciones iguales.

Cuando se haya conseguido que así sea, el nivel estará correcto y si sus dos extremidades no marcan el mismo número de divisiones, la diferencia ó desviación respecto del centro de la burbuja, proviene de la inclinación de la columna á cuyo derredor gira todo el instrumento, y puede hacerse desaparecer moviendo convenientemente los tornillos de su tripié. Esta última operación debe repetirse, en dos ó más posiciones de la columna, hasta que en una revolución completa del instrumento cada extremo de la burbuja señale $l$, siendo $2l$ su longitud, según supusimos, lo que es ya una prueba de que la columna ha quedado completamente vertical.

Una vez explicada la manera de corregir el nivel antes que la columna, se comprenderá sin dificultad que las dos correcciones pueden hacerse simultáneamente, quiere decir, moviendo tanto el tornillo del nivel como los del tripié, de tal modo que la mitad de la diferencia se destruya con el primero y la otra mitad con los segundos. Esta práctica es, en efecto, la que comunmente se sigue.

234. Siempre que se hace uso de niveles muy sensibles, es bastante difícil destruir completamente su error y establecer verticalmente la columna con toda exactitud: pero pueden determinarse las magnitudes de los pequeños errores que queden, y llevarlas en cuenta para corregir los resultados. A la verdad, en las operaciones topográficas casi nunca es necesario llevar la precisión hasta ese extremo; mas con el fin de completar la teoría de los niveles, indicaré el modo de medir ambos errores.

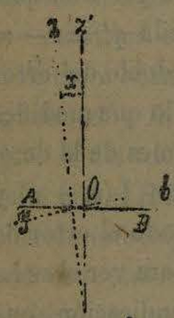

Fig. 181ª

Sea $CZ'$ (fig. 181ª) la columna de un instrumento, que supondré inclinada respecto de la línea vertical $CZ$, el pequeño ángulo $x = ZCZ'$, y $AB$ el nivel unido directa ó indirectamente á la columna, y que, en lugar de serle perpendicular, forma con ella un ángulo $A\,O\,Z' = 90° - y$. Designando siempre por $2l$ la longitud de la burbuja, tenemos que si tanto $x$ como $y$ fueran nulos, cada extremo indicaría $l$; pero en virtud de esos errores sus indicaciones serán:



La del extremo $A$........................ $o = l + x + y$
La del extremo $B$........................ $e = l - x - y$

Si después de hechas las lecturas $o$ y $e$, se invierte el instrumento, como la rotación se hace al derredor de la columna inclinada $CZ'$, ocupará el nivel la posición que representa la figura 182ª, siendo sus nuevas indicaciones:

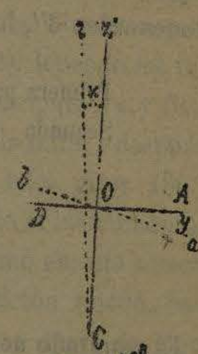

Fig. 182ª

La del extremo $B$............ $o' = l + x - y$
La del extremo $A$............ $e' = l - x + y$

Por las lecturas de la primera y segunda posiciones, se obtiene:

$$o - e = 2(x + y) \qquad o' - e' = 2(x - y)$$

y en consecuencia:

$$x = \frac{(o + o') - (e + e')}{4}$$

$$y = \frac{(o - o') - (e - e')}{4}$$

que dan los pequeños ángulos $x$ é $y$, en partes ó divisiones de la escala. Para obtenerlos en segundos, sea $v$ el valor angular de cada división, y se tendrá que la inclinación de la columna respecto de la vertical, es:

$$x = \frac{(o + o') - (e + e')}{4}\,v$$

y el error propio del nivel:

$$y = \frac{(o - o') - (e - e')}{4}\,v$$

El valor de $x$ es generalmente el que más importa conocer, con el fin de corregir las observaciones ejecutadas con un instrumento cuya columna señale un zenit erróneo $Z'$, y reducirlas así al zenit real $Z$. Si $x$ resulta positivo, la columna está inclinada hacia el lado en que las lecturas fueron $e$ y $e'$, ó lo que es lo mismo, la línea horizontal errónea $a\,b$, que indica el instrumento, estará elevada en el lado cuyas lecturas fueron $o$ y $o'$: Supongamos que un nivel cuyas divisiones valen $3''$, haya dado las siguientes indicaciones:

| | | |
|---|---|---|
| Primera posición.............. | $o = 17$ | $e = 33$ |
| Segunda „ .............. | $o' = 22$ | $e' = 28$ |
| | $o + o' = 39$ | $e + e' = 61$ |

$$x = \frac{39 - 61}{4} \times 3'' = -16''.5$$

El resultado negativo da á conocer que la columna se inclina hacia la parte en que se hicieron las lecturas $o$ y $o'$.

235. Establecida la teoría general del nivel de aire, ocupémonos de los principales mecanismos que se han inventado para adaptarlo á las operaciones de la nivelación topográfica.

Niveles de pínulas.—Estos instrumentos se componen de una regla metálica $A\,B$ (figura 183ª) que sostiene un nivel de aire, y en cuyas extremidades hay dos pínulas $E$ y $F$, provistas cada una de dos hilos muy delgados que se cortan en ángulo recto, y de una abertura circular muy pequeña, que corresponde á la intersección de los hilos de la otra. Todo el aparato descansa sobre otra regla $C\,D$ que va unida á la primera en $D$, por medio de una charnela, á fin de poderlas acercar ó alejar moviendo el tornillo, $C$ y hacer que de esa manera se coloque la burbuja en el centro del tubo.

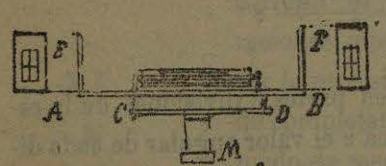


Fig.ª 183ª

Si la línea trazada por la pequeña abertura ocular de una de las pínulas, y la intersección de los hilos de la otra, es paralela al eje del nivel, siempre que la burbuja de este señale divisiones iguales á un lado y otro del centro, será horizontal aquella línea, y por consi-



guiente suministrará una visual en la dirección que hemos llamado nivel aparente. Para comprobar este paralelismo se colocan dos estadales á $80^m$ ó $100^m$ uno de otro, y se sitúa el nivel exactamente á la mitad de esa distancia, procurando que la pieza $M$, que lo une al tripié, se aproxime á la verticalidad lo más que sea posible, y estableciendo la burbuja en medio del tubo. Hecho esto se observan por cada una de las pínulas los puntos $m$ y $m'$ (fig. 184ª), leyendo las indicaciones $A\,m$ y $B\,m'$ de la mira, y después se hace girar 180° todo el instrumento. Como en esta nueva posición puede haberse desviado algo la burbuja, se corregirá por medio del tornillo que acerca ó aleja las reglas, y entonces las pínulas indicarán la dirección $n\,n'$ igualmente inclinada que $m\,m'$ respecto del horizonte. Conocidas las nuevas indicaciones $A\,n$ y $B\,n'$, se señalan en los estadales dos puntos $p$ y $p'$ tales que se tenga: $A\,p = \frac{1}{2}(A\,m + A\,n)$ y $B\,p' = \frac{1}{2}(B\,m' + B\,n')$. Es claro que la línea $p\,p'$ es horizontal; y así moviendo una de las pínulas, con el tornillo que tiene con ese objeto, hasta que las visuales señalen esa nueva dirección, quedará establecido su paralelismo con el nivel. Puede conseguirse el mismo resultado por medio del tornillo que varía la distancia de las reglas; pero como se desarreglará el nivel en ese movimiento, será necesario volver á llevar la burbuja al centro valiéndose del tornillo de su armadura. En uno y en otro caso debe repetirse la operación hasta que, después de la inversión, no se advierta diferencia alguna ni en la dirección de la visual ni en las indicaciones de la burbuja.

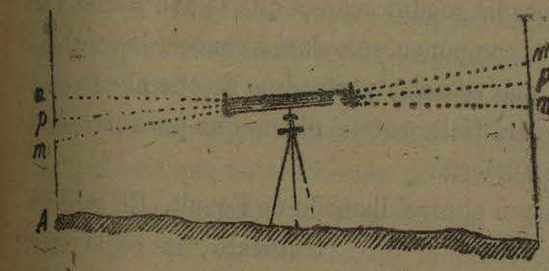


Fig.ª 184ª

Aunque el nivel de pínulas es el más perfecto de todos los que he descrito hasta ahora, no debe darse mucha extensión á su uso, porque á una distancia algo considerable, el grueso de los hilos, por fi-