convendría hacer una triangulación esmerada, ó bastaría medir á rumbo y distancia los linderos observando solamente los azimutes directos. A falta de mejores datos, tomemos los valores correspondientes de C que hemos adoptado, á saber: $C = 0.00334$ y $C' = 0.00052$. Con ellos se obtiene $p > 1418$ pesos, lo que indica que en este caso deberían preferirse las operaciones trigonométricas.

Todas las consideraciones de que me he ocupado, tanto en este Capítulo como en el anterior, por su misma naturaleza, no deben mirarse como concluyentes; y las presento, por el contrario, sólo con el fin de señalar nuevos puntos de investigación, dirigidos á establecer las tolerancias, el mérito de las operaciones, etc., sobre bases menos arbitrarias de lo que lo han sido hasta aquí.

PARTE TERCERA.

AGRODESIA.

CAPITULO I.

PRINCIPIOS GENERALES.—DIVISIÓN DE LAS FIGURAS ELEMENTALES.

213. La agrodesia tiene por objeto la división de la superficie de los terrenos en dos ó más partes iguales, ó desiguales, que guarden entre sí una relación cualquiera. A veces también se ocupa de la separación de cierta cantidad de superficie, tomándola de un terreno más ó menos extenso; pero en uno y en otro caso los procedimientos son absolutamente los mismos. De estas definiciones se deduce que en el primer caso, es indispensable haber determinado previamente el contenido del terreno que va á dividirse; y en el segundo, es también necesario el conocimiento de algunos de sus elementos, al menos en la parte que se tiene que separar; de modo que podremos considerar á la agrodesia como una aplicación de la planometría y de la agrimensura.

Cuando se trata de dividir un terreno, lo primero que debe hacerse es determinar la superficie de cada fracción, para poder hacer efectivo el fraccionamiento. Sea S la superficie total, $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$ las de las n fracciones, cuyos contenidos supondré que deben estar en la relación de las cantidades $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$. Las áreas de estas partes serán:

$$s_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} S$$

$$s_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} S$$

....

....

$$s_n = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} S$$

Las expresiones anteriores son las más generales, y por ellas se ve que si las n fracciones debieran ser iguales entre sí, cada una de ellas tendría $\frac{S}{n}$ por superficie. Supongamos, por ejemplo, que una propiedad que contiene 39 miriaras se quisiera dividir en tres partes cuyas superficies estuvieran en la relación de los tres números 3, 5 y 7. Se tendría.

$$s_1 = \frac{3 \times 39}{15} = 7^{M}8$$

$$s_2 = \frac{5 \times 39}{15} = 13.0$$

$$s_3 = \frac{7 \times 39}{15} = 18.2$$

La comprobación del cálculo consistirá en que la suma de todas las partes deberá reproducir la superficie total S.

Después de calculadas de esa manera las áreas de las fracciones, se procede á determinar, sobre un plano ó croquis del terreno, las líneas que les deben servir de perímetro, y por último se trazan sobre el terreno mismo.

Muchas veces las líneas divisorias tienen que sujetarse á ciertas condiciones, como son: la de partir de un punto dado, la de tener

una dirección determinada, etc., y de aquí se originan diversos problemas de los que me propongo indicar los más usuales é importantes. Para la resolución de la mayor parte de ellos, es frecuente servirse de un sistema provisional de líneas sujetas á las condiciones que se hayan prescrito, y después de calculada la superficie que abrazan, como por lo general no es exactamente la que se desea, se tiene necesidad de agregarle ó quitarle cierta cantidad, que determina la corrección del primer sistema de líneas. Por lo regular, esta corrección consiste en la adición ó la substracción de una área de forma sencilla, como la de un triángulo ó un cuadrilátero, y por eso es conveniente comenzar el estudio de la agrodesia indicando los diferentes métodos que pueden aplicarse para dividir una figura elemental.

DIVISION DEL TRIANGULO.

214. PROBLEMA 1º—*Dividir un triángulo A B C (fig. 151ª) por medio de rectas que partan de uno de sus vértices.* La resolución consiste simplemente en dividir el lado opuesto $A\ B$ en el número de partes que se desee, guardando éstas entre sí la relación que deban tener las áreas. En la figura se ha supuesto una división en tres fracciones, $A\ C\ D$, $D\ C\ E$ y $E\ C\ B$, cuyas áreas están en la relación de los números 1, 2 y 3.

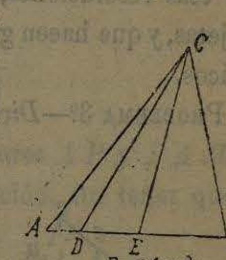

Fig.ª 151.ª

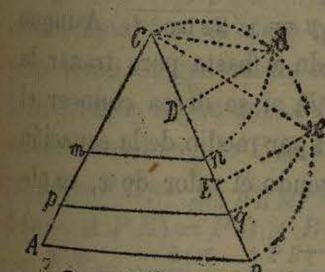

Fig.ª 152.ª

PROBLEMA 2º—*Dividir un triángulo A B C (fig. 152ª) por rectas paralelas á uno de los lados.* Como las superficies de todas las fracciones deben resultar triangulares y semejantes, puede hallarse la distancia x del primer punto de división n al vértice C, por la simple comparación de las áreas con los cuadrados de sus lados homólogos. Designando por S la superficie de todo el triángulo, y por s la de la primera fracción, determinada por las fórmulas generales que se han expuesto al principio, tendremos:

$$C n = x = a\sqrt{\frac{s}{S}}$$

Introduciendo en esta fórmula el valor de la segunda fracción s', se obtendrá la distancia $C q$, y así las demás. De igual manera podrían determinarse sobre el lado b del triángulo los puntos m, p, etc.

Este problema puede resolverse también gráficamente trazando una semi-circunferencia sobre $C B$ como diámetro, y dividiendo ese lado en D, E, etc., en la proporción que se quiere que tengan las fracciones. En seguida, por los puntos de división se trazan las perpendiculares $D d$, $E e$, etc., y finalmente, desde C como centro, y con los radios $C d$, $C e$, etc., se determinan los puntos n q, etc., desde los que deben partir las líneas divisorias.

No solamente este, sino otros muchos problemas agrodésicos, pueden resolverse por métodos gráficos; pero aunque indicaré algunas de esas resoluciones, es preciso no olvidar los defectos á que están sujetas, y que hacen generalmente preferibles los procedimientos analíticos.

Problema 3º—*Dividir un triángulo $A B C$ (fig. 153ª) por medio de rectas perpendiculares á uno de los lados.* Sea s la superficie de la primera parte $A F E$, x la base $A F$, é y su altura $E F$: tendremos las dos ecuaciones: $x y = 2 s$, $y = x \tan. A$, de cuya combinación resulta fácilmente: $x = \sqrt{2 s \cot. A}$, $y = \sqrt{2 s \tan. A}$. Aunque el conocimiento de x basta para trazar la perpendicular $F E$, si se desea conocer el punto E, podrá calcularse la distancia $A E$ por medio de la ecuación $2 s = A E \times x \operatorname{sen.} A$, en la que sustituyendo el valor de x, se obtiene:

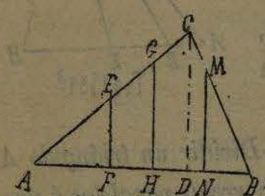

Fig.ª 153ª

$$A E = 2\sqrt{\frac{s}{\operatorname{sen.} 2 A}}$$

Si se designa por s' la superficie del triángulo $A H G$, que es igual

á la suma de la primera y la segunda partes, se determinarán las nuevas incógnitas $x' = A H$, $y' = G H$, así como $A G$, introduciendo s' por s en las fórmulas anteriores. Con ayuda del ángulo B y el valor de la última fracción, se determinan de la misma manera $B N$, $M N$ y $B M$.

Problema 4º—*Dividir un triángulo desde un punto dado en su interior.* Supongamos que el punto dado P (fig. 154ª) lo esté por sus coordenadas $A M = x$, $M P = y$. Si no se impone á la primera línea divisoria más condición que la de partir de P, podrá elegirse libremente y adoptarse, por ejemplo, la recta $P A$. En el triángulo $P A M$ se tiene: $\tan. P A M = \frac{y}{x}$ y $A P = \frac{y}{\operatorname{sen.} A}$. Llamando ahora A el ángulo $B A C$ del triángulo, y s la superficie de la primera fracción $P A D$, para determinar el punto D, se tendrá: $2 s = A P \times A D \operatorname{sen.} (A - P A M)$, de donde resulta:

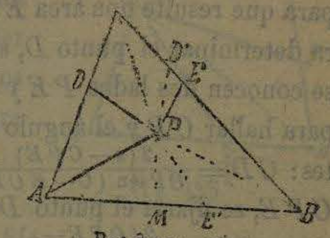

Fig.ª 154ª

$$A D = \frac{2 s}{A P \operatorname{sen.} (A - P A M)}$$

Si el punto está dado por sus coordenadas polares $A P$ y $P A M$, se puede aplicar evidentemente la misma resolución, sin tener que hacer de antemano el cálculo de esas cantidades.

Para obtener la segunda porción s', calculemos la superficie del triángulo $A P B$, que tiene por expresión $A P B = \frac{1}{2} c y$. Si esta resultare igual á s', es claro que $P B$ sería la segunda línea divisoria; pero como en general no es así, tendremos que añadirle ó restarle la diferencia, según que $A P B$ sea menor ó mayor que s'. Para esto calculemos el ángulo $P B A$ por la fórmula: $\tan. P B M = \frac{y}{c - x}$, y también $P B = \frac{y}{\operatorname{sen.} P B M}$; entonces podremos establecer la ecuación: $2(s' - A P B) = P B \times B E \operatorname{sen.} (B - P B M)$, de la que se obtiene: $B E = \frac{2(s' - A P B)}{P B \operatorname{sen.} (B - P B M)}$. Si s' fuese menor que $A P B$, sería preciso restar de esta última superficie la del triángulo $P B E'$ determinando la distancia $B E'$ por la ecuacion $B E' = \frac{2(A P B - s')}{P B \operatorname{sen.} P B M}$.

Para la tercera y siguientes fracciones se procederá de una manera análoga, partiendo de D ó de E, lo cual da lugar á la misma resolución que se aplica en el caso que voy á indicar.

Supongamos que, además de partir de P, se imponga á la primera línea divisoria la condición de pasar por E, dado sobre el lado a. Entonces á la superficie del triángulo $C P E$, cuya expresión es $\frac{1}{2} P E \times E C$ sen. $P E C$, será preciso sumarle ó restarle lo necesario para que resulte una área $E P D C$ igual á la primera porción s, y para determinar el punto D, se resolverá el triángulo $C P E$, en el que se conocen dos lados $P E$ y $E C$, así como el ángulo comprendido, para hallar $C P$ y el ángulo $P C E$. Hecho esto, se tendrá como antes: $C D = \frac{2(s - C P E)}{C P \text{sen.}(C - E C P)}$. Es claro que si s fuese menor que $C P E$, se fijaría el punto D' entre E y C por el cálculo de la ecuación: $C D' = \frac{2(C P E - s)}{C P \text{sen.} E C P}$.

PROBLEMA 5º—*Dividir un triángulo desde un punto P* (fig. 155ª) *dado sobre uno de los lados.* Este puede considerarse como un caso particular del anterior, pues la posición del punto dado envuelve la condición $y = 0$, lo que reduce el cálculo al de la fórmula: $A D = \frac{2 s'}{x \text{ sen. } A}$. De igual manera se determinarán las distancias $A F$ y $B E$, sustituyendo en el primer caso por s las superficies de las dos primeras porciones; y en el segundo la de otra de las partes, y haciendo uso de $(c - x)$ sen. B en el denominador.

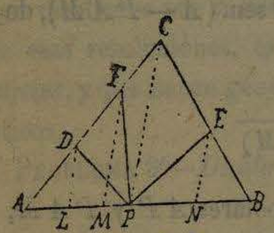

Fig.ª 155.ª

Este problema se presta á una resolución gráfica muy sencilla, que consiste en dividir el lado c del triángulo en partes $A L$, $L M$, $M N$, $N B$ proporcionales á las fracciones de superficie que se desean obtener, y en trazar por los puntos de división paralelas á la línea $C P$, las cuales determinan los puntos D, F, E que unidos con P resuelven la cuestión, en virtud de la equivalencia de los triángulos comprendidos entre líneas paralelas.

DIVISION DEL CUADRILATERO.

215. PROBLEMA 1º *Dividir un cuadrilátero por medio de rectas que partan de uno de sus vértices.* Siendo D (fig. 156ª) el vértice desde donde han de partir las líneas divisorias, se determinará el punto E por la fórmula: $A E = \frac{2 s}{A D \text{sen.} A}$. En seguida se calcula $D E$ y el ángulo $A E D$ con el fin de ver si el triángulo $D E B$ tiene más ó menos superficie que la segunda porción s', para esto se tiene:

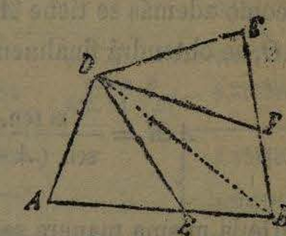

Fig.ª 156.ª

$$D E B = \tfrac{1}{2} D E \times (A B - A E) \text{ sen. } D E B$$

Suponiendo que sea preciso agregarle la del triángulo $D B F$, se calcula como antes $D B$ y el ángulo $D B E$, y en seguida se obtendrá: $B F = \frac{2(s' - D E B)}{D B \text{sen.} D B F}$.

PROBLEMA 2º—*Dividir un cuadrilátero por medio de líneas paralelas á uno de sus lados* $A B$ (fig. 157ª). Suponiendo prolongados los lados adyacentes $A D$ y $B C$ hasta que se encuentren en O, podremos considerar á la superficie S del cuadrilátero como la diferencia de los dos triángulos $A B O = S'$ y $D C O = S''$. Haciendo para abreviar $A B = m$ y $C D = n$, las expresiones de esas superficies son:

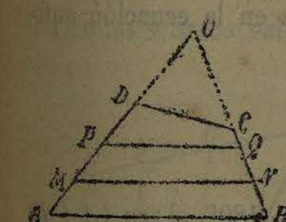

Fig.ª 157.ª

$$S' = \tfrac{1}{2} m^2 \frac{\text{sen. } A \text{ sen. } B}{\text{sen.}(A + B)}$$

$$S'' = \tfrac{1}{2} n^2 \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } D}{-\text{sen.}(C + D)}$$

Si designamos ahora por s la primera parte $A B N M$, tendremos que los triángulos semejantes $A B O$ y $M N O$ abrazarán respèctivamente las superficies S' y $S'-s$, y resultará como en el 2.º problema de la división de los triángulos:

$$O\,M = O\,A\sqrt{\frac{S'-s}{S'}}$$

y como además se tiene $A\,M = A\,O - M\,O$, sustituyendo el valor de $A\,O$, se obtendrá finalmente:

$$A\,M = \frac{m\,\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,(A+B)} - \frac{m\,\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,(A+B)}\sqrt{\frac{S''-s}{S''}}$$

De la misma manera se calcula $B\,N$, introduciendo en el numerador de esta fórmula el ángulo A en lugar de B. Se ve que no es necesario el cálculo de S''.

Cuando son varias las fracciones, es conveniente calcular $M\,N = x$, á fin de proceder con x, en la segunda porción $M\,N\,P\,Q$, lo mismo que se ha hecho con m en la primera, habiendo las ventajas de que ya no es necesario calcular la superficie del triángulo $M\,N\,O$, puesto que es evidente que tiene $S'-s$ por valor, y de que los ángulos M y N son respectivamente iguales á A y B. Para determinar á x haremos uso de la fórmula $2\,s = (m+x)\,y$, que representa la superficie de la primera fracción $A\,B\,N\,M$, siendo y la altura del trapecio. La altura será $y = A\,M\,\text{sen.}\,A$, que sustituída en la ecuación anterior, produce:

$$x = \frac{2\,s}{A\,M\,\text{sen.}\,A} - m$$

Debe tenerse presente que cuando $A + B > 180°$, el sen. $(A+B)$ es negativo, y entonces la superficie S' tendrá el mismo signo. La interpretación de este resultado se comprende con la simple inspección de la figura, pues con tal valor de $A + B$, los lados $A\,D$ y $B\,C$ serán convergentes hacia un punto de posición opuesta á la de O. Siendo S' negativa, la cantidad que está debajo del radical en el valor de $A\,M$ será: $\frac{-S'-s}{-S'} = \frac{S'+s}{S'}$. Para quitar toda duda, apliquemos las fórmulas á un ejemplo. Sea $m = 1500^{m}$; $A = 104°43'$;

$B = 110°\,28'$; y supongamos que la primera porción s es de una miriara. Se tendrá $A + B = 215°\,11'$.

0.5	9.6989700	$S'' =$	$-$ 1.769208	$S'-s$	6.442356—
m^2	6.3521826	$s =$	1.000000	S'	6.247779—
sen. A	9.9855135				
sen. B	9.9716820	$S'-s =$	$-$ 2.769208		0.194577
	6.0083481			$\sqrt{}$	0.097288
sen. $(A+B)$	9.7605692—	m	3.176091	$\frac{m\,\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,(A+B)}$	3.387204—
		sen. B	9.971682		
S''	6.2477789—	sen. $(A+B)$	9.760569—		3.484492—
					$+3051^{m}4$
			3.387204—		-2439.0
				$A\,M =$	$612^{m}4$

Una vez obtenida la distancia $A\,M$, el cálculo de $M\,N = x$, es:

$2\,s$	6.301030		
$A\,M$	$-$ 2.787035		
sen. A	$-$ 9.985513	$m =$	$1500^{m}.0$
	3.528482		3376 .6
		$x =$	$1876^{m}.6$

Con los mismos valores de m y de s, si los ángulos hubieran sido $A = 75°\,17'$ y $B = 69°\,32'$, que por ser suplementarios de los anteriores, tienen los mismos senos, habría resultado $A\,M = 830^{m}.8$ y $x = 989^{m}.0$. Convendrá que el lector haga el cálculo con estos datos, para que vea la diferencia originada por el juego de los signos.

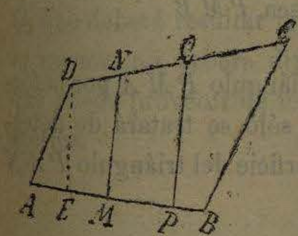

Fig.ª 158.ª

PROBLEMA 3.º—*Dividir un cuadrilátero por medio de rectas perpendiculares á uno de sus lados.* Sea s la primera porción, y designando por n el lado $A\,D$ (fig. 158ª), el triángulo $A\,D\,E$ tendrá una superficie $e = \frac{1}{2}n \times D\,E\,\text{cos.}\,A$; pero como $D = E\,n\,\text{sen.}\,A$, resulta sustituyendo: $e = \frac{1}{2}n^2 \text{ sen. } A \cos. A = \frac{1}{4}n^2 \text{ sen. } 2A$. Entonces la superficie del trapecio $DEMN$ será $s - e$, y podrá procederse como en el caso anterior para determinar las distancias DN y EM. Atendiendo á que es recto el ángulo E, y designando por B el ángulo EDN, las fórmulas son:

$$m = DE = n \text{ sen. } A\,; \qquad S' = \tfrac{1}{2} m^2 \tan. B\,;$$

$$DN = \frac{m}{\cos. B} - \frac{m}{\cos. B}\sqrt{\frac{S' - (s-e)}{S'}}\,; \qquad EM = DN \text{ sen. } B.$$

También se tiene: $MN = \frac{2(s-e)}{DN \text{ sen. } B} - m$, distancia que usada en lugar de m, permite proseguir el cálculo de las demás fracciones.

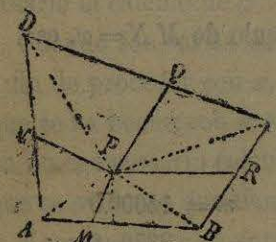

Fig.ª 159.ª

Problema 4º—*Dividir un cuadrilátero desde un punto dado en su interior.* La marcha que debe seguirse es del todo semejante á la que indicamos, al resolver el cuarto problema relativo á la división del triángulo. Siendo x, y las coordenadas del punto P (fig. 159ª) referidas á la línea AB como eje, se elegirá arbitrariamente la primera línea divisoria PM, y se tendrá:

$$\tan. PMB = \frac{y}{x - AM} \qquad PM = \frac{y}{\text{sen. } PMB}$$

En seguida se calcula el contenido del triángulo PMA por la fórmula: $e = \frac{1}{2} AM \times PM \times \text{sen. } PMA$, y sólo se tratará de determinar el punto N de tal manera que la superficie del triángulo PAN sea igual á $s - e$, para lo cual se tiene:

$$\tan. PAM = \frac{y}{x} \qquad PA = \frac{y}{\text{sen. } PAM} \qquad AN = \frac{2(s-e)}{PA \text{ sen. } PAN}$$

y se prosigue del mismo modo en el resto de la figura con los elementos del polígono y los valores de las demás fracciones.

Problema 5º—*Dividir un cuadrilátero de un punto dado en su perímetro.* También este problema se resuelve de una manera semejante al que se refiere al triángulo, y no difiere del anterior más que en que $y = 0$. Para no incurrir en repeticiones inútiles, escribiré únicamente las fórmulas aplicadas á la figura 160ª

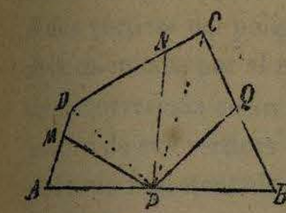

Fig.ª 160.ª

$$AM = \frac{2s}{AP \text{ sen. } A} \qquad \tan. AMP = \frac{AP \text{ sen. } A}{AM - AP \cos. A} \qquad PM = \frac{AP \text{ sen. } A}{\text{sen. } AMP}$$

$$e = \tfrac{1}{2}(AD - AM)\, PM \text{ sen. } PMD$$

y en el lado DC tendrá que situarse el punto N, de tal manera que el triángulo DPN tenga $s' - e$ por superficie, siendo s' el valor de la segunda fracción.

Debe notarse que el método que se ha seguido en los últimos problemas puede hacerse general para cualquiera figura, sea cual fuere el numero de sus lados, como se verá en el Capítulo siguiente; y conviene advertir desde ahora la necesidad de comprobar los cálculos para cerciorarse de que no ha habido equivocación en ellos. Después de determinar la última línea divisoria, tal como PQ (fig. 160ª), la mejor comprobación consistirá en calcular la área del triángulo PBQ, que deberá resultar igual á la última fracción de superficie, ó por lo menos, no deberá diferir de ésta más que la pequeña cantidad que puede provenir de los errores inevitables de la aproximación numérica.