pecto de que, en casos idénticos, el error de la observación es esencialmente fortuito é independiente de la amplitud del ángulo. Esa es, por otra parte, la única hipótesis razonable en todas aquellas circunstancias en que ningún indicio prevenga el ánimo en favor de un resultado más que en favor de otro; pero no se crea, sin embargo, que haciendo la distribución por igual, se destruye en todos casos el error, aun dando por cierto que los de cada ángulo sean numéricamente iguales; porque es claro que la diferencia entre 180° y la suma práctica de los ángulos, indica solamente que existen en ellos pequeños errores; pero no da luz alguna respecto del signo con que éstos entran en cada uno, y aquella diferencia no es más que una resultante de tres cantidades que pueden ser iguales en valor, aunque diferentes en signo. De esto se deduce que, al ejecutar la distribución, lo que se hace es combinar el error final con sus componentes, de tal suerte que el que queda en cada ángulo después de repartida la diferencia, puede aumentar ó disminuir el error primitivo de observación.

Aunque las consideraciones precedentes, por su extremada sencillez, no necesitan del auxilio del cálculo, voy, sin embargo, á expresarlas en el lenguaje algebraico, con el objeto de deducir de ellas la medida aproximativa de la incertidumbre procedente de los errores angulares en la determinación de la superficie. Sean x, y, z los pequeños errores que se cometen al medir los tres ángulos A, B, C de un triángulo, y ε el exceso ó defecto que resulta con relación á la suma teórica. Puesto que los tres errores pueden ser positivos ó negativos con igual probabilidad, es evidente que habrá tres casos distintos que son igualmente posibles, y son: 1º cuando los tres errores son del mismo signo; 2º, cuando los errores que corresponden á los ángulos adyacentes al lado conocido, son de signo contrario; 3º, cuando son iguales los signos de estos mismos. Habiendo designado por b el lado conocido, los tres casos están representados por su orden en las ecuaciones siguientes:

$$\pm x \pm y \pm z = \pm \varepsilon \qquad \pm x \pm y \mp z = \pm \varepsilon$$

$$\pm x \mp y \pm z = \pm \varepsilon$$

Como en todos casos se distribuye ε entre los tres ángulos, y puesto que he designado por α, β y γ los que quedan en cada uno después de reducirlos á 180°, tendremos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \tfrac{1}{3}[2x - (z+y)] & \alpha &= \pm \tfrac{1}{3}[2x - (y-z)] \\ \beta &= \pm \tfrac{1}{3}[2y - (x+z)] & \beta &= \pm \tfrac{1}{3}[2y - (x-z)] \\ \gamma &= \pm \tfrac{1}{3}[2z - (x+y)] & \gamma &= \mp \tfrac{1}{3}[2z + (x+y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \tfrac{1}{3}[2x - (z-y)] \\ \beta &= \mp \tfrac{1}{3}[2y + (x+z)] \\ \gamma &= \pm \tfrac{1}{3}[2z - (x-y)] \end{aligned}$$

Admitamos ahora la hipótesis de igualdad numérica de los errores, que está fundada en las consideraciones de que me he ocupado. Suponiendo, pues, $x = y = z$, resulta en los tres casos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & \alpha &= \pm \tfrac{2}{3}x & \alpha &= \pm \tfrac{2}{3}x \\ \beta &= 0 & \beta &= \pm \tfrac{2}{3}x & \beta &= \mp \tfrac{4}{3}x \\ \gamma &= 0 & \gamma &= \mp \tfrac{4}{3}x & \gamma &= \pm \tfrac{2}{3}x \end{aligned}$$

Por estos resultados se ve que exceptuando el primer caso, que es el más favorable, en todos los demás el error que subsiste en los ángulos puede aun exceder al primitivo, y entonces varía de signo respecto de los otros. Nótese también que en los dos últimos casos x es igual á ε, de modo que llamando $\omega = \frac{1}{3}\varepsilon$ el valor medio del error tal como se distribuye, se tendrá que los errores reales son:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & \alpha &= \pm 2\omega & \alpha &= \pm 2\omega \\ \beta &= 0 & \beta &= \pm 2\omega & \beta &= \mp 4\omega \\ \gamma &= 0 & \gamma &= \mp 4\omega & \gamma &= \pm 2\omega \end{aligned}$$

Para sustituir estos valores en la segunda de las ecuaciones (2), demos á los ángulos del triángulo el valor de 60°, tanto por ser la forma equilátera la que se procura dar á los elementos de una cadena trigonométrica, como por ser 60° la amplitud media de los ángulos que se observan comunmente en los demás métodos topográficos, haciendo abstracción de los suplementos, puesto que dos ángulos suplementarios tienen numéricamente iguales sus líneas trigonométricas. En este concepto, el valor de n en cada uno de los tres casos que he considerado será:

$$n = 0 \qquad n = \mp 4\, \omega\, s \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1'' \qquad n = \pm 8\, \omega\, s \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1''$$

La naturaleza de los errores angulares es de tal manera accidental atendidas las principales causas que los originan, que no puede dudarse que, en identidad de circunstancias, son igualmente probables los tres casos anteriores. Como prueba de esta verdad pueden citarse los hechos de que en una triangulación casi siempre se verifica que, el número de triángulos cuyo error es por exceso, con poca diferencia es el mismo que el de aquellos en que el error es por defecto, y de que la suma de los errores positivos no difiere mucho de la de los negativos. Ambos hechos reunidos tienden á nulificar el valor medio del error angular, y son tan generales, que casi bastan por sí solos, aun sin atender á otras consideraciones, para justificar el principio tan conocido de los topógrafos, de que siempre que se tenga libre la elección de los procedimientos, debe procurarse medir en el terreno muchos ángulos y pocas líneas, sin hacer jamás lo contrario. Yo establecería otro que no me parece menos cierto, y es el de que cuando en una triangulación el número de triángulos de error positivo difiere notablemente de aquel en que el error es por defecto, ó bien cuando la suma absoluta de los errores por exceso se aleja mucho de la que producen los negativos, debe buscarse alguna causa de error constante, algún vicio radical en el instrumento, en su colocación ó en el modo de usarlo; porque los errores verdaderamente fortuitos siempre tienden á destruirse mutuamente. Después haré la comparación de algunas triangulaciones que corroboran este aserto; pero antes hagamos extensiva á toda la superficie las consideraciones que se han hecho respecto de uno de sus elementos, admitiendo desde luego la hipótesis de ser igualmente posibles los tres casos de que hice mención.

Sean S_1, S_2, S_3 respectivamente las porciones de la superficie total S en que tiene lugar cada uno de los casos; ω_1, ω_2, ω_3 los *errores*

angulares medios que les corresponden; y q_1, q_2, q_3 los coeficientes que miden la incertidumbre, esto es:

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = \mp 4\, \omega_2 \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1'' \qquad q_3 = \pm 8\, \omega_3 \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1''$$

Designando ahora por N el error de toda la superficie, debido á los errores angulares, y por q su coeficiente, se tiene:

$$N = q\,S = q_1 S_1 + q_2 S_2 + q_3 S_3$$

Como suponemos que todos los casos son igualmente probables, y por otra parte, los triángulos nunca son muy desiguales en dimensiones, resulta que cada una de las porciones puede considerarse sensiblemente igual á la tercera parte de la superficie total; y si tomamos en lugar de ω_1, ω_2, y ω_3 el promedio de los errores, de tal suerte que ω represente el error angular medio de la triangulación entera, se obtiene:

$$N = q\,S = \pm \tfrac{4}{3}\, \omega\, S \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1'' \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5)}$$

Por comodidad he calculado la tabla siguiente de los valores del coeficiente medio $q = \pm \frac{4}{3} \omega \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1''$, expresando á ω en segundos desde $1''$ hasta $6'$.

ω	q	ω	q	ω	q
0″	0.000000	10″	0.000037	1′	0.000224
1	. 4	20	. 75	2	. 448
2	. 8	30	. 112	3	. 672
3	. 12	40	. 149	4	. 895
4	. 16	50	. 187	5	. 1120
5	0.000020	60	0.000224	6	0.001344

Las fórmulas (4) y (5) dan separadamente la influencia de los errores lineales y angulares; y aunque se comprende con facilidad que r y q pueden tener el mismo signo ó signos contrarios, conviene considerar el caso más desventajoso en que tanto los errores lineales como los angulares conspiren á producir el mismo efecto, de modo que el error final de la superficie S será:

$$E = M + N = \pm (2r + q)\, S \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

208. Paso ahora á comparar los resultados de varias triangulaciones ejecutadas unas por mí y otras por diversas personas, pero todas con buenos instrumentos. Para facilitar su inspección presentándolas en forma de tabla, llamaré R la relación entre el número de triángulos que dieron error por exceso y el de los que lo dieron por defecto. Siendo n_1 y n_2 esos números, se tomará el menor de ellos por numerador á fin de que R nunca sea mayor que 1. Designaré igualmente por m el término medio numérico de los errores, esto es, la suma absoluta de ellos, con abstracción de sus signos, dividida por el número de ángulos observados; miéntras que ω representa el medio aritmético atendiendo á los signos; ó lo que es lo mismo, siendo ε_1 la suma de los errores positivos, ε_2 la de los negativos y n el número total de triángulos, se tendrá:

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3n} \qquad \omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3n}$$

Como también conviene hacer mención del número de triángulos, del de observaciones y del de vernieres, así como de la aproximación angular del instrumento, la tabla que sigue contiene todos esos datos. En ella se han arreglado las triangulaciones por los valores crecientes de R.

NÚMERO DE							
La triag.	Triángulos.	Repeticiones.	Vernieres.	Aproximación.	R	m	ω
I	29	de 3 á 6	2	10″	0.45	7.″4	− 3.″4
II	28	6	2	20	0.47	9. 3	− 3. 4
III	4	3	2	60	0.50	11. 7	− 0. 8
IV	11	2	3	10	0.57	4. 9	+ 1. 1
V	15	6	2	10	0.67	7. 0	− 1. 8
VI	75	6	2	60	0.70	6. 8	− 1. 9
VII	29	6	2	20	0.71	6. 7	+ 1. 8
VIII	12	2	2	60	0.71	24. 6	+ 2. 9
IX	7	6	4	10	0.75	3. 5	− 0. 9
X	42	12	2	10	1.00	1. 8	0. 0

La comparación de estos resultados da á conocer desde luego que, en general, ω va decreciendo al paso que R se acerca á su límite superior que es la unidad; y es digno de notarse que si m fuese numéricamente igual en toda una triangulación, debería resultar $\omega = 0$ siempre que R fuese igual á 1. En efecto, los valores de m y ω podrían expresarse así:

$$m = \frac{(n_1 + n_2)\,m}{n} \qquad \omega = \frac{(n_1 - n_2)\,m}{n}$$

que divididos uno por otro dan:

$$\frac{\omega}{m} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

mas como, con abstracción del signo, se tiene $R = \frac{n_1}{n_2}$, suponiendo $n_2 > n_1$, podrá transformarse la ecuación anterior en la siguiente:

$$\omega = m\,\frac{R - 1}{R + 1}$$

que nulificará el valor ω cuando $R = 1$, ó bien cuando $n_1 = n_2$.

Puede suceder que R sea igual á 1 sin que ω sea nula, ó al contrario; pero esto proviene de que m no es numéricamente el mismo en toda la triangulación, pues designando por m_1, m_2 los errores medios por exceso y por defecto, y por u un coeficiente tal que se tenga $R u = \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2}$, será fácil obtener por consideraciones análogas á las precedentes.

$$\omega = m\,\frac{R u - 1}{R u + 1}$$

En esta ecuación puede ser $R = 1$, y ω no será nulo más que cuando $m_1 = m_2$; y por el contrario, puede tenerse $\omega = 0$, para lo cual basta que $R u = 1$, ó bien que los valores numéricos de m_1 y m_2 sean inversamente proporcionales á los números de triángulos n_1 y n_2. Esto es casi lo que se verifica en la triangulación III de la tabla, en que uno de los triángulos dió 180° por suma, y como n es igual á 4 solamente, el valor de R es bastante pequeño no obstante la bondad de la operación. En igualdad de circunstancias, es claro que mientras mayor sea n debe notarse mejor la simultaneidad de los valores $R = 1$ y $\omega = 0$.

Como el hecho de ser m igual y de distinto signo en ambas partes de una triangulación, debe considerarse como una prueba de que el error angular es esencialmente fortuito, ó por lo menos es un indicio de mucho peso de que no hay error constante de importancia en las observaciones, creo como dije antes, que se podrá juzgar de la bondad ó mérito relativo de una triangulación, por la proximidad de R á la unidad, al mismo tiempo que por la pequeñez de ω.

Otro hecho que manifiesta la tabla anterior, muy curioso y no menos interesante bajo el punto de vista práctico, es que los valores de m y ω no guardan relación constante con la aproximación angular del instrumento, aun teniendo en cuenta los números de repeticiones y de nonius; y esto parece indicar que puede alcanzarse la misma exactitud con un teodolito cuya graduación no esté muy subdividida que con otro de mucha aproximación, con tal que el primero esté bien construído. Con esta condición puede asegurarse, casi sin temor de equivocación, que el valor de ω no excederá de 4″ á 6″ repitiendo los ángulos de dos á seis veces, que es lo bastante para las operaciones más delicadas de la topografía, aun suponiendo que el instrumento sólo permita la lectura directa de 1′ como sucede comunmente en los teodolitos pequeños. Si se atiende ahora á los valores de q, se verá que es de esperarse que la incertidumbre que resulte en la superficie á causa del error angular, no pase de $0{,}00002\,S$ en una triangulación ejecutada con esmero, sirviéndose de un teodolito digno de confianza.

Aunque los resultados que constan en la tabla, por ser bastante variados, proporcionan una buena prueba de las consecuencias á que me había conducido sólo la teoría, convendrá presentar otros que, obtenidos por procedimientos defectuosos, indican desde luego la existencia de vicios de ejecución, por la simple inspección de los resultados finales. Las operaciones que siguen, tabulabas como antes, se han practicado con teodolitos que tenían algún defecto; así, por ejemplo, en la primera se midieron los ángulos haciendo la lectura

de un solo vernier por estar muy deteriorado el otro. En la que va señalada con el número II se midieron dos ángulos de cada triángulo con el mismo teodolito, y el tercero con un instrumento en buen estado. En la III se tomaron los ángulos con el mismo teodolito con que se ejecutó la triangulación número VIII de la tabla precedente; pero que recibió despues un golpe que probablemente deformó algo el limbo. La IV se hizo por varias personas midiéndose dos ángulos de cada triángulo con un buen instrumento, y el tercero con un teodolito que sólo tenía servible uno de sus nonius. Las triangulaciones V y VI fueron ejecutadas por un ingeniero que, por falta de buen teodolito, se vió obligado á trabajar con uno que á consecuencia de un golpe, tenía sensiblemente separados el limbo y la alidada, lo que hacía muy dudosa la lectura del único vernier que se conservaba en regular estado.

NÚMERO DE							
La triang.	Triángulos.	Repeticiones.	Vernieres.	Aproximación.	R	m	ω
I	12	6	1	10″	0.33	9.″6	+ 7.0
II	4	6	......	10	0.33	8. 6	+ 6.7
III	14	2	2	60	0.40	32. 6	+10.4
IV	6	6	......	10	1.00	9. 1	+ 1.8
V	13	5	1	10	0.86	32. 6	− 8.2
VI	22	5	1	10	0.47	8. 0	− 4.6

Si no se supieran de antemano los defectos de que he hecho mención, la mayor parte de estos resultados indicarían un vestigio de error constante, con excepción acaso de la triangulación número IV, en que parece haber habido una compensación casual.

209. Indiquemos ahora el modo de fijar los valores de r y ω para determinados instrumentos. Se ha visto que r representa el error de la unidad de distancia, de modo que midiendo con un instrumento determinado una línea cuya longitud se conozca exactamente, la diferencia que se obtenga servirá para deducir el valor de r que corres-

ponda á ese instrumento, y repitiendo las pruebas varias veces se llegará á un resultado medio de bastante precisión. Mas como en realidad es imposible conocer la longitud matemáticamente exacta de una línea, no queda más recurso que tomar por término de comparación la que se obtiene por aquellos procedimientos que pueden suministrar resultados tan aproximados á la verdad como se necesitan en las aplicaciones más delicadas de la geometría; tales son, por ejemplo, las líneas medidas por métodos geodésicos.

En general, de este medio me he valido para hacer algunas experiencias dirigidas á determinar el valor de r. Habiendo medido geodésicamente una pequeña base de $502^m.198$, repetí la medida con un resorte de acero, por el método expuesto en los números 19 y 20, y hallé $502^m.063$. Por diferencia se obtiene $\mathrm{d}\, b = 0^m.135$, de donde resulta: $r = \frac{\mathrm{d}\, b}{b} = 0.00027$.

Por encargo mío, el ingeniero D. Miguel Iglesias midió con un decámetro común de eslabones de hierro un tramo de la base geodésica en que se apoya la triangulación del Valle de México. La longitud exacta de ese tramo era $1849^m.693$, y el Sr. Iglesias, llevando en cuenta el grueso de las fichas, halló $1848^m.746$, por lo cual se obtiene $r = 0.00051$ para ese instrumento.

Si se hubiera despreciado el grueso de las fichas, como se hace comunmente en las medidas de detalles, habría resultado $1847^m.918$; y entonces se obtendría $r = 0.00096$.

También tuve ocasión de comparar la longitud de una línea de 4239^m, bien medida, con el resultado que dió un cordel de cáñamo encerado de 50 varas, como lo usan todavía algunos prácticos, y hallé una diferencia de 21^m, lo que produce $r = 0.00495$. El ingeniero D. Francisco Jiménez, que ha hecho también algunas comparaciones de esos cordeles con instrumentos más perfectos, me asegura, sin embargo, haber hallado diferencias superiores á 1 por 100, lo que supone á r mayor que 0.01.

Los valores precedentes de r para cada instrumento no deben considerarse como concluyentes, tanto por haberse deducido de muy pocos experimentos, como porque se han obtenido midiendo líneas horizontales, y generalmente con un esmero superior al que se tiene

en las medidas comunes. Por eso me parece indudable que en la mayor parte de los casos deben ser mucho más considerables; y es de desearse que los ingenieros que se hallen en posibilidad de hacer esta clase de observaciones, contribuyan con sus experimentos á la asignación de ese límite, del que pueden derivarse tan importantes consecuencias, variando al efecto las circunstancias de las observaciones para que el promedio que corresponda á cada instrumento sea realmente el que conviene á las condiciones comunes en que se usa. Por ahora, basta lo expuesto para mi objeto y á reserva de valerse de guarismos más exactos cuando se hayan determinado para cada instrumento y para cada sistema peculiar de operaciones, supondré los valores siguientes:

1º—Para el resorte de acero.. $r = 0.00025$
2º—Para la cadena común con el grueso de las fichas...... $r = 0.00050$
3º—Para la cadena común sin el grueso de las fichas...... $r = 0.00100$
4º—Para el cordel encerado (*como mínimum*)................ $r = 0.00500$

En cuanto al valor de ω del cual depende q, lo suministra el resultado de una triangulación, según se ha visto en las tablas precedentes; y respecto del que corresponda á cualquier otro de los goniómetros que se usan en la planometría parcial, es fácil hallar un resultado medio, tomando con él los tres ángulos de un triángulo ó bien varios ángulos al derredor de un punto, y comparando su suma con la suma teórica. En el primer caso, si ε es la diferencia de los observados respecto de 180°, se tendrá: $\omega = \frac{1}{3}\varepsilon$; en el segundo, siendo n el número de ángulos y ε su diferencia á 360°, se tiene: $\omega = \frac{1}{n}\varepsilon$. Es necesario hacer repetidas observaciones y tomar el término medio de todos los resultados. Este método suministrará *a priori* el valor medio de ω para un instrumento dado; pero si después de levantado un plano, pueden compararse las sumas de los ángulos interiores de los polígonos que lo forman con la suma teórica $(n - 2)\,180°$, siendo ε la diferencia y n el número de ángulos de cada polígono, se obtendrá en término medio el valor de ω que conviene á esa operación, por la fórmula $\omega = \frac{1}{n}\varepsilon$.

Por medio de esas comparaciones, aplicadas á operaciones topográficas de diversas clases, y ejecutadas por distintos ingenieros, he hallado con poca diferencia los valores siguientes. Para las triangulaciones, $\omega = \pm 5''$; para los levantamientos hechos con otros goniómetros, ó con la brújula tomando en cada estación los azimutes directo é inverso $\omega = \pm 3'$; y para los casos en que sólo se toman los directos, $\omega = \pm 6'$. Tomando con estos datos los valores de q en la pequeña tabla que se formó antes, y designando por C el coeficiente $2r + q$ de la ecuación (6), pueden calcularse entre otras muchas, las siguientes combinaciones principales:

Para triangulaciones en que se emplea el resorte	$C = \pm 0.00052$
Para triangulaciones en que se usa la cadena común	$C = \pm 0.00102$
Planos levantados con cadena y brújula tomando los dos azimutes	$C = \pm 0.00267$
Planos levantados con cadena y brújula tomando un solo azimut	$C = \pm 0.00334$
Planos levantados con cordel y brújula tomando un solo azimut	$C = \pm 0.01134$

Sólo con el objeto de hacer en el Capítulo siguiente algunas aplicaciones de la fórmula (6) es por lo que adopto estos guarismos, como podría haber adoptado arbitrariamente cualesquiera otros; pero repito que los valores de ω deben determinarse por el examen de los datos correspondientes á una operación ya terminada, ó bien calcular para cada instrumento un valor medio, deducido de la experiencia, con el fin de formarse una idea *a priori* del error que puede cometerse en la medida de una superficie. Con ese dato y con el valor de r que también experimentalmente se haya asignado al instrumento con que se miden las líneas, se podrá calcular el del coeficiente C, y por consecuencia el error posible, así como todas las otras cantidades que pueden derivarse de éste, según vamos á indicarlo.

CAPITULO VI.

CONSECUENCIAS DE LA INVESTIGACIÓN ANTERIOR.

210. Cuando dos ingenieros ejecutan la medida de una misma línea ó de una misma superficie, aunque sigan los mismos métodos con igual habilidad y en circunstancias enteramente semejantes, se encuentra que sus resultados jamás son idénticos, lo cual se explica por la existencia de las causas de error que se han enumerado. Sea L la longitud exacta de una línea, l_1 y l_2 respectivamente los resultados de uno y otro ingeniero, y finalmente, $d\,l_1$ y $d\,l_2$ los errores que les corresponden, atendiendo á los valores de r que convengan á los instrumentos de que hacen uso. Es claro que habiendo ambigüedad en los signos de esos errores, puede suceder en el caso extremo, que uno de los topógrafos se aleje de la verdad por exceso, y el otro por defecto, de modo que se tendrán las dos ecuaciones:

$$L = l_1 \pm d\,l_1 \qquad L = l_2 \mp d\,l_2$$

Restando una de la otra y designando por t la diferencia entre los dos resultados, se obtiene:

$$t = \pm (d\,l_1 + d\,l_2)$$

ecuación que representa la cantidad que podrán diferir, sólo en virtud de los errores puramente accidentales ó inherentes á las operaciones. Esta diferencia admisible es la que designaré con el nombre de *tolerancia*.