

ducto real de que sean susceptibles las tierras; pero esta clase de prescripciones pueden considerarse como excepcionales respecto de las reglas generales de que he procurado dar una idea en las líneas anteriores.

Las personas que deseen detalles más amplios para hacer segura y metódicamente el valúo de propiedades, pueden consultar con fruto la obra titulada "*Guía de los hacendados*" por Young, ó la "*Guía de los propietarios*" por Gasparín; pues se comprende que en un tratado de topografía no es posible entrar en pormenores que corresponden á obras especiales de otro género.

CAPITULO V.

INVESTIGACION DE LA INFLUENCIA QUE LOS ERRORES DE LAS LÍNEAS Y DE

LOS ÁNGULOS TIENEN EN LA DETERMINACION DE LAS SUPERFICIES. (1)

204. En las aplicaciones de la ciencia, especialmente de la matemática, se presentan dos extremos que conviene evitar con igual cuidado: al uno tienden por lo general las personas únicamente teóricas, y es el de buscar en todo una exactitud ideal; mientras que se dirigen al otro las puramente prácticas, ó al menos aquellas cuyos conocimientos teóricos no son bastante amplios, las cuales tienden, por el contrario, á despreciar todo aquello que consideran inútil para conseguir la ruda aproximación que, á su modo de ver, es la única que puede alcanzarse. Los dos extremos son igualmente viciosos; el primero porque ocasiona mucho trabajo inútil, y puede producir el desaliento al ver que los resultados no corresponden á la perfección que indica la teoría; el segundo porque se opone al adelanto de los medios de observación. Aunque varias veces he tenido ya ocasión de hacer algunas indicaciones respecto de este importante objeto, nada me parece más á propósito para señalar el verdadero punto de vista

(1) Este Capítulo y el siguiente contienen el extracto de una memoria sobre este asunto que leí en el seno de una Sociedad científica; pero como no son esenciales para el estudio de la topografía, no hay inconveniente en suprimirlos en curso elemental. Lo mismo puede decirse respecto de algunos otros trozos de esta obra; pero más bien que omitirlos me ha parecido preferible dejar á cada profesor la libertad de escoger lo que crea más necesario, y más conforme con la amplitud que desee dar á su curso.

práctico en que conviene colocarse, que el estudio de la influencia de ciertos errores que pueden calificarse de inevitables é inherentes á toda operación material.

205. Los datos que el agrimensor recoge en el terreno cuya superficie trata de determinar, son las longitudes de ciertas líneas y las amplitudes de los ángulos que éstas forman entre sí; por consiguiente, el error que cometa en la medida de cualquiera de esos elementos, debe producir un error correspondiente en el resultado que depende de ellos, de modo que investigando la relación que existe entre los errores primitivos y los finales, será fácil estudiar la influencia de los primeros y estimar el grado positivo de precisión que debe esperarse de un resultado en determinadas circunstancias.

Analizar á la vez y de una manera general la influencia de los errores de los ángulos y de las líneas en la superficie que se deduce de esos elementos, es un problema que, en mi opinión, presenta bastantes dificultades, y que acaso no puede resolverse con entera abstracción de la *forma* que afecta la superficie misma; pero reflexionando que en último resultado, las operaciones que se ejecutan en el terreno ya sea en el perímetro de la figura, ya sea fuera de él, dan lugar directa ó indirectamente á la descomposición de la misma en triángulos, cuyos elementos se miden ó se calculan, será fácil convencerse de que se obtendrá el resultado que se desea, aplicando el análisis á una figura elemental y generalizando sus consecuencias para el conjunto de los elementos.

Trataré, pues, de investigar la influencia de los errores de observación, tomando por base las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, á lo que también me inclina la circunstancia de que la triangulación es indudablemente el mejor procedimiento de que puede valerse un ingeniero para medir una superficie.

En las triangulaciones no se miden comunmente más que uno ó dos lados, de suerte que las longitudes de los demás dependen necesariamente de los primeros datos y participan de sus errores. Designando por b la base medida, por $A B C$ los ángulos del primer triángulo, que supondré ya reducidos á 180° , haciéndoles la corrección de

la tercera parte de la diferencia que resulte, y finalmente por a y c los lados que se calculan, la superficie del triángulo no puede determinarse, con los datos del terreno, más que con la ecuación:

$$2s = b^2 \frac{\text{sen. } A \text{ sen. } C}{\text{sen. } B}$$

Si se supone todo variable en esta expresión, llamando α , β y γ respectivamente las diferenciales de los ángulos A , B y C , y e la de la superficie, se obtendrá la que sigue por la diferenciación y después de combinarla con la primitiva:

$$e = 2s \frac{db}{b} + s \left(\frac{\gamma \text{ sen. } A \cos. C + \alpha \cos. A \text{ sen. } C}{\text{sen. } A \text{ sen. } C} - \beta \cot. B \right)$$

Abreviando y teniendo presente que $A + B + C = 180^\circ$, resulta:

$$e = 2s \frac{db}{b} + s [\alpha \cot. A + \gamma \cot. C + (\alpha + \gamma) \cot. B] \dots (1)$$

La inspección de este resultado indica que el primer término es el que mide la influencia del error lineal db , y el segundo la de los angulares α , β y γ . Para estudiarlos mejor los analizaré separadamente, designando el primero por m y el segundo por n , á saber:

$$m = 2s \frac{db}{b}$$

$$n = s [\alpha \cot. A + \gamma \cot. C + (\alpha + \gamma) \cot. B] \dots (2)$$

$$e = m + n$$

206. Los errores de las líneas provienen en general de dos causas: la una es la inexactitud del instrumento que sirve para medir las distancias, ya sea un resorte de acero, ya una cadena metálica. La segunda causa de error es la que proviene de la operación misma, como lo es la pequeña diferencia que puede haber al establecer los contactos de los extremos de la cadena con el punto de partida, y en general, con el que sirvió de término en la medida precedente; la di-

versa tensión que sufre la cadena durante la operación; la inclinación del terreno en que se trabaja, etc.

De ambas causas de error, es sin duda alguna más temible la primera, porque no hay compensación posible si una medida de longitud no tiene realmente el tamaño que se le atribuye; mientras que los errores accidentales que se cometen en el curso de la operación, puesto que no todos tienden á obrar en el mismo sentido, es probable que al combinarse produzcan un efecto resultante menor que la suma absoluta de los efectos de cada uno en particular, y por tanto aun se concibe la posibilidad de que lleguen á compensarse. Por fortuna un error en la longitud de la cadena puede ponerse en claro por medio de la comparación que de ella se hace con el modelo ó patrón de la unidad fundamental, y entonces pasa á la categoría de una corrección, como se ha visto en el número 199. Una vez eliminado el efecto de este error, analicemos la influencia de aquellos que pueden llamarse inherentes á las operaciones, ó que, por mejor decir, nunca puede estar seguro de destruir el ingeniero, sea cual fuere su habilidad y la perfección de sus instrumentos, pues por su naturaleza son esencialmente inconstantes en su marcha, y su pequeñez no los hace notar más que por la comparación de los resultados finales.

Los errores accidentales existen, cualquiera que sea la magnitud de la línea que se mida, y si bien es cierto que debe variar su valor final según las circunstancias particulares en que se trabaje, así como según el instrumento con que se opere, cuando estas circunstancias é instrumentos sean idénticos, es natural admitir que cada una de las causas de error fortuito debe existir con el mismo grado de probabilidad, de suerte que su resultante será mayor para una distancia considerable que para una pequeña. En tal concepto supondré que el error final es proporcional á la longitud de cada línea. Esta hipótesis, perfectamente razonable, es, por otra parte, la única que, en mi opinión, puede admitirse tratándose de errores accidentales por naturaleza; y además, creo encontrarla comprobada por algunos experimentos que mencionaré en otro lugar.

Suponiendo, pues, que r es el *error posible* en la unidad de distan-

cia y db el que resulta en la línea b , se tendrá: $r = \frac{db}{b}$, con lo que la primera de las ecuaciones (2) se convertirá en la siguiente:

$$m = 2rs \dots\dots\dots (3)$$

Luego que experimentalmente se haya encontrado el valor medio de r que corresponde á cada uno de los instrumentos que sirven para medir las líneas, la ecuación anterior dará á conocer el error que puede resultar en la superficie; pero como hasta ahora no he considerado más que la figura elemental, la primera cuestión que se presenta es esta: el error de la superficie total, ¿qué relación guarda con el de sus elementos? Para resolverla de una manera satisfactoria, sigamos la marcha de las operaciones topográficas. Si éstas consisten en triangulaciones, todos los elementos lineales de los triángulos se deducen de las cantidades medidas, que son la base y todos los ángulos de la cadena trigonométrica. Como los errores de estos últimos se han separado de los que provienen de la base, el valor $m = 2rs$ no tendrá más origen que el error lineal, como si los ángulos de la triangulación fuesen constantes ó libres de error. En tal virtud, y puesto que, según lo que vimos en el número 36, un lado cualquiera a_n en función de la base b y los ángulos, es:

$$a_n = b \frac{\text{sen. } A_1 \text{ sen. } A_2 \dots\dots\dots \text{sen. } A_n}{\text{sen. } B_1 \text{ sen. } B_2 \dots\dots\dots \text{sen. } B_n}$$

resultará que el factor de b es constante, y la diferenciación respecto de a_n y b produce, después de eliminar ese factor: $b da_n = a_n db$, ó bien:

$$\frac{da_n}{a_n} = \frac{db}{b} = r$$

lo que demuestra de una manera general que el error de cualquier lado guarda con la longitud del mismo la relación constante r .

Según esto, siendo S la superficie total compuesta de los elementos $s_1, s_2, s_3, \dots\dots s_n$, se tiene evidentemente:

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots\dots\dots s_n$$

Llamando ahora M el error final de S en la parte que depende del

primitivo de la base, y $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ los que corresponden respectivamente á los elementos en virtud de la misma causa, se tendrá:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$$

y sustituyendo los valores de m_1, m_2, \dots , que por lo demostrado deben ser de la misma forma que la ecuación (3), resulta:

$$M = 2r(s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n) = 2rS \dots \dots \dots (4)$$

lo que indica que el error de la superficie total, originado por el que se cometió en la base, es siempre proporcional á la superficie.

Veamos ahora si este principio, que es estricto en una triangulación por depender directamente de la base todos los lados calculados, puede aplicarse á otros métodos menos exactos de que se vale la planimetría, especialmente en superficies de poca extensión. En casi todos esos procedimientos no se mide un solo lado, sino muchos, de modo que en general sus longitudes como sus errores son independientes unos de otros. Según esto, parece que debería admitirse que los errores accidentales, cuyo carácter esencial consiste en la igualdad de probabilidad para que se produzcan con signo positivo que con signo negativo, podrían llegar á compensarse en el conjunto de líneas medidas, de tal suerte que nulificaran el error final de la superficie.

Tratándose de errores realmente fortuitos, no hay duda que esta hipótesis, si no enteramente admisible, no tendría al menos carácter alguno de imposibilidad, suponiendo que los instrumentos fueran perfectos, y la manera de observar completamente libre de cualquier vestigio de error constante; pero no existiendo jamás ninguna de esas circunstancias, hay casi una certidumbre de que es imposible la compensación en el resultado final. En efecto, una diferencia en la cadena, inapreciable á la vista, cierta tendencia que hay comunmente en cada observador para apreciar las cantidades pequeñas siempre mayores ó siempre menores de lo que son en realidad, y en general, para cometer esa clase de errores constantemente en el mismo sentido, son otras tantas causas cuyos resultados no admiten eliminación, por no ser verdaderamente accidentales respecto del mismo ingenie-

ro y del mismo instrumento; pues si las he considerado como tales, ha sido únicamente por la imposibilidad de asignarles un valor, y aun de establecer la ley de su tendencia para aumentar ó disminuir la longitud verdadera de las líneas.

De lo expuesto resulta, que si no hay plena certidumbre, si un alto grado de probabilidad para juzgar que los errores muy pequeños de observación tienden siempre á obrar en el mismo sentido; y en tal concepto, la relación (4) dará igualmente un valor aproximativo de M , sea cual fuere el método de levantamiento, con tal que en ella se sustituya por r el guarismo que convenga al grado de exactitud de cada operación. Veremos más adelante cómo puede determinarse el valor de r para un instrumento dado.

207. La influencia de los errores angulares en la superficie del triángulo elemental está medida por la segunda de las ecuaciones (2), en la que α y γ representan respectivamente los pequeños errores que existan en los ángulos A y C adyacentes al lado conocido. Veamos ahora qué hipótesis podemos hacer respecto del valor relativo de estos errores, para lo cual conviene analizar la marcha y la naturaleza de las observaciones angulares.

Para medir un ángulo se dirige una visual á la primera de las señales que lo forman, y después de anotar lo que indica la graduación del instrumento con cuanta exactitud permite la aproximación de sus divisiones, se dirige otra visual á la segunda de las señales, anotando lo mismo que antes la indicación angular del goniómetro, cuyo limbo se supone perfectamente inmóvil y horizontal durante la operación, y su centro coincidiendo con la vertical que pasa por el vértice del ángulo. Si el instrumento y la observación fuesen perfectos, es evidente que la diferencia de ambas indicaciones daría el ángulo con toda exactitud, puesto que el movimiento del anteojo al pasar de una posición á otra, le hace describir en el orden creciente de las divisiones, la amplitud que mide el ángulo que se busca; pero esta exactitud no es admisible: el uso de los sentidos, cuya percepción tiene siempre un límite, y mucho más el de instrumentos, sea cual fuere el grado de perfección con que estén contruídos, así como las circunstancias particulares que rodeen al observador, son otras tantas

causas de error cuya influencia combinada debe modificar necesariamente sus resultados, y que constituyen la diferencia entre la teoría y la práctica, entre la abstracción de la ciencia y la aplicación material de sus principios. Señalando las más influentes de esas causas y su modo de obrar, llegaremos al conocimiento de útiles indicaciones acerca del error resultante que se debe temer.

De los errores instrumentales figuran en primera línea: 1º, la excentricidad, que proviene de que el telescopio y la alidada muchas veces no giran exactamente en el centro matemático de la graduación; 2º, las pequeñas inexactitudes de las divisiones; 3º, la aproximación limitada con que se obtienen en cada instrumento las fracciones de una división angular; 4º, el espesor sensible de los hilos de la retícula, cuyo objeto es el de hacer visible el eje ideal del telescopio.

Las causas de error independientes del goniómetro son: 1º, las que provienen de su manejo, como la falta de horizontalidad del limbo, y la desviación de su centro respecto del punto de estación; 2º, el uso de señales de un grueso más ó menos apreciable para hacer perceptibles los puntos que se observan; 3º, el estado de la atmósfera que en ciertas circunstancias comunica á las señales un movimiento ondulatorio aparente, y hace más ó menos incierta la dirección de las visuales.

La construcción de los goniómetros, que se perfecciona de día en día, por una parte, y por otra el principio de la repetición aplicado á las observaciones angulares, tienden á disminuir el efecto de los errores instrumentales; así es que debe reducirse considerablemente el de excentricidad cuando se usan dos ó más vernieres, y casi nulificarse los de división y aproximación midiendo el mismo ángulo en diversas partes del círculo graduado, sin hacer más lecturas que las del principio y el fin de la observación, cuya diferencia dividida por el número de medidas fracciona sus respectivos errores. De lo expuesto se deduce inmediatamente que el efecto de estas causas de error debe temerse poco, generalmente hablando, cuando se procede de la manera que he indicado; mientras que el de las demás no puede suponerse nulo más que en virtud de compensaciones accidentales. Sin embargo, cualesquiera que sean las causas de error que se

consideren, es cierto que el del resultado depende de la diferencia algebraica de los que se cometen en cada visual, puesto que el ángulo se obtiene por la diferencia de indicaciones que en ellas da el instrumento; y como el resultante de los últimos tiene igual probabilidad para ser positivo que para ser negativo, se comprende desde luego la gran posibilidad que existe de que su efecto final sea siempre muy pequeño, y aun de que lleguen á destruirse completamente los errores accidentales. Esto equivale á decir que las medidas angulares pueden considerarse exentas de error constante.

El mismo hecho de obtenerse el ángulo por una diferencia de indicaciones, sea cual fuere la situación relativa de las señales, da á conocer que, en igualdad de circunstancias, el error final debe ser el mismo para una distancia angular pequeña que para una más considerable, ó bien independiente del valor del ángulo.

En la práctica de las triangulaciones se acostumbra á medir los tres ángulos de cada triángulo, lo cual, aunque innecesario en teoría, es sumamente útil para saber si existe en las observaciones algún error fuerte que provenga de equivocación en las lecturas ó de otra causa cualquiera, y aun para dividir el error ordinario entre todos los ángulos. A falta de indicaciones ciertas respecto de la parte de error que corresponde á cada uno, se divide por igual la diferencia hallada, por lo menos cuando todas las medidas se hayan ejecutado en circunstancias semejantes; mas si se tiene algún motivo para atribuir á unos resultados más confianza que á otros, se reparte el error final en proporción del grado de incertidumbre. Así, por ejemplo, si el número de repeticiones no ha sido el mismo para todos los ángulos, puede distribuirse en razón inversa del número de observaciones (núm. 89), y lo mismo debería hacerse si el estado de la atmósfera ó cualquiera otra causa variasen de un ángulo á otro la claridad con que se distinguen las señales; pero se ve que, en último resultado, este modo de operar no es más que un caso particular del primero, pues al distribuir así el error, lo que se hace es reducir á igualdad de circunstancias las observaciones que no lo estaban.

La suposición de que el error proviene por igual de los tres ángulos está autorizada en gran manera por lo que antes he dicho res-