CAPITULO III.

PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS PARA DETERMINAR LA SUPERFICIE.

193. Lo que caracteriza estos métodos es la circunstancia de que, al aplicarlos, sólo se hace uso de los datos obtenidos por la observación directa, ó bien los que se derivan de ellos inmediatamente por medio del cálculo. Comenzaremos, pues, por hacer una recapitulación de las fórmulas que suministran la superficie de las principales figuras elementales en que muchas veces se resuelven los polígonos.

La área de un triángulo, en función de los diversos elementos que pueden determinarla, será:

I. Si se conocen su base b y su altura y, se tiene $s = \frac{1}{2} b y$.

II. En función de dos lados a, b y del ángulo comprendido C, $s = \frac{1}{2} a b \text{ sen. } C$.

III. Conociendo un lado a y los dos ángulos B y C adyacentes, $s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen. } B \text{ sen. } C}{\text{sen. } (B + C)}$.

IV. Cuando se tienen los tres lados a, b y c, llamando p la mitad de su perímetro, esto es: $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, su área es:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

V. Por último, si se conocen dos lados, a, b y el ángulo A opuesto á uno de ellos, la superficie tiene por expresión:

$$s = \tfrac{1}{2} b^2 \text{ sen. } A \cos. A \pm \tfrac{1}{2} b \text{ sen. } A \sqrt{a^2 - b^2 \text{ sen.}^2 A}$$

El signo ambiguo de esta fórmula corresponde á las dos resoluciones de que en general es susceptible este caso.

La superficie de un trapecio cuyas dos bases paralelas son a, b y cuya altura es y, tiene la forma $s = \frac{1}{2}(a + b) y$.

Si además de las bases, se conocen los otros dos lados c y d del trapecio, su área es:

$$s = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$$

fórmula en la cual el semiperímetro es $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Conociendo en un cuadrilátero cualquiera, los cuatro lados a, b, c y d, así como el ángulo M que forman entre sí los dos primeros, y el ángulo N que forman los dos últimos, la expresión de la superficie será: $s = \frac{1}{2} a b \text{ sen. } M + \frac{1}{2} c d \text{ sen. } N$.

Si sólo se conocen los tres lados contiguos a, b y c, el ángulo M que forman los dos primeros, y el ángulo N que forman los dos últimos, la superficie del cuadrilátero puede calcularse por la ecuación $s = \frac{1}{2} a b \text{ sen. } M + \frac{1}{2} b c \text{ sen. } N - \frac{1}{2} a c \text{ sen. } (M + N)$.

Todo cuadrilátero inscriptible en un círculo, ó lo que es lo mismo, cuyos ángulos opuestos sean suplementarios, tiene por superficie:

$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

siendo a, b, c y d sus cuatro lados y p su semiperímetro.

Si se conocen las dos diagonales m y n de un cuadrilátero, así como el ángulo A que forman entre sí, su área es $s = \frac{1}{2} m n \text{ sen. } A$.

En un paralelógramo cuya base y cuya altura sean b é y respectivamente, se tiene: $s = b y$.

Siendo a y b dos lados contiguos, que forman entre sí el ángulo M, la superficie es: $s = a b \text{ sen. } M$.

La superficie de cualquier polígono regular de n lados, la longitud de uno de los cuales es l, se obtiene por la fórmula .... $s = \frac{1}{4} n l^2 \cot. \left(\frac{180°}{n}\right)$. Haciendo $F = \frac{1}{4} n \cot. \left(\frac{180°}{n}\right)$, tendremos $s = F l^2$.

Aunque es raro tener que medir figuras regulares, pues sólo suelen hallarse en paseos, jardines, plazas, etc., calcularemos los logaritmos del factor F, que con el cuadrado del lado, sirve para determinar la superficie.

POLÍGONOS.	LOG. F.
Triángulo equilátero	9.6365007
Cuadrado	0.0000000
Pentágono regular	0.2356490
Exágono „	0.4146519
Eptágono „	0.5603740
Octágono „	0.6838057
Eneágono „	0.7911166
Decágono „	0.8861640
Endecágono „	0.9715382
Dodecágono „	1.0490688

El círculo cuyo radio es r tiene por superficie $s = \pi r^2$.

Log. $\pi = 0.4971499$.

La superficie de un sector de círculo que abrace g grados, es: $s = \frac{g \pi r^2}{360}$. La cantidad $\frac{\pi}{360}$ representa el arco de medio grado, y tiene 7.9408474 por logaritmo. Un segmento circular de g grados de amplitud, abraza la superficie

$$s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi g}{180} - \text{sen.}\, g\right)$$

El logaritmo de $\frac{\pi}{180}$, que expresa al arco de 1°, es 8.2418774.

Una elipse que tenga a y b por semi-ejes, comprende la superficie

$$s = \pi a b.$$

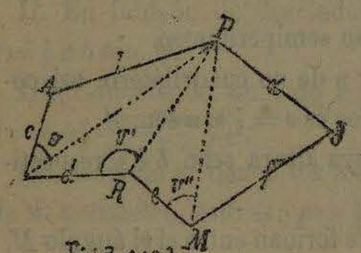

Fig.ª 149ª

194. Veamos ahora el modo de utilizar las expresiones de las superficies elementales para calcular la de un polígono irregular cualquiera, tal como el que representa la figura 149ª, cuyos lados y cuyos ángulos interiores se suponen conocidos. El primer camino que se presenta naturalmente, es el de dividirlo en triángulos por medio de diagonales $P\,Y$, $P\,R$, $P\,M$, trazadas desde un vértice P. En el primero de esos triángulos se conocen los dos $P\,A$ y $A\,Y$, así como el ángulo A que forman; podrá, pues, determinarse su superficie, el tercer lado $P\,Y$, y los otros dos ángulos $A\,P\,Y$ y $A\,Y\,P$. Este último, restado del ángulo $A\,Y\,R$ del polígono, dará el ángulo $P\,Y\,R$ del segundo triángulo, en el cual conociéndose también el lado $P\,Y$ por el cálculo anterior, y $R\,Y$ por pertenecer al polígono, podrá determinarse igualmente la superficie, el otro lado $P\,R$ y el ángulo $P\,R\,Y$. En el triángulo siguiente $P\,R\,M$ se conocerán los dos lados $P\,R$, $R\,M$ y el ángulo que forman, por lo cual se procede del mismo modo que antes.

Por las explicaciones anteriores se ve que en cada triángulo componente hay que aplicar una misma resolución, que puede formularse de esta manera. Designando por a, c, d, etc., los lados del polígono, por v, v', v'', etc., los ángulos que deben calcularse, como lo indica la figura, y por Δ, Δ', Δ'', etc., las diagonales $P\,Y$, $P\,R$, $P\,M$, etc., tendremos en el primer triángulo $P\,A\,Y$:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \,\text{sen.}\, A \qquad (1)$$

Para determinar el ángulo v opuesto al lado b, podría hacerse uso de las fórmulas usuales para este caso; pero me parece preferible proceder así: el triángulo da las ecuaciones:

$$c \,\text{sen.}\, v = b \,\text{sen.}\,(A + v) \qquad \Delta \,\text{sen.}\, v = b \,\text{sen.}\, A$$

Desarrollando la primera, y dividiéndola por cos. v, se halla:

$$\tan.\, v = \frac{b \,\text{sen.}\, A}{c - b \cos.\, A} \qquad (2)$$

y entonces se obtiene por la segunda:

$$\Delta = \frac{b \,\text{sen.}\, A}{\text{sen.}\, v} \qquad (3)$$

La fórmula (1) da la superficie, y las (2) y (3) los elementos necesarios para que en el triángulo siguiente, conocidos dos lados y el ángulo comprendido, pueda aplicarse la misma resolución, á saber:

$$s' = \tfrac{1}{2}\, \Delta\, d \,\text{sen.}\,(Y - v)$$

$$\tan.\, v' = \frac{\Delta \,\text{sen.}\,(Y - v)}{d - \Delta \cos.\,(Y - v)}$$

$$\Delta' = \frac{\Delta \,\text{sen.}\,(Y - v)}{\text{sen.}\, v'}$$

Como en las tres fórmulas entra la cantidad b sen. A, ó sus semejantes en cada triángulo, la resolución es bastante sencilla. Apliquémosla detalladamente á la figura 149ª cuyos elementos numéricos van á continuación, y que proporcionan alguna variedad de casos en cuanto al juego de los signos.

$$a = 11457^{m}0 \qquad P = 128°00'22''$$
$$b = 15326.6 \qquad A = 126\ 45\ 37$$
$$c = 5317.7 \qquad Y = 56\ 38\ 9$$
$$d = 9682.2 \qquad R = 231\ 49\ 8$$
$$e = 7665.5 \qquad M = 114\ 26\ 58$$
$$f = 11715.3 \qquad J = 62\ 19\ 46$$

Primer triángulo.

0.5	9.6989700	b	4.1854458	....	4.1854458	
b	4.1854458	sen. A	9.9037119	cos. A	9.7770411	$-c=$ 531[illegible]
c	3.7257238	b sen. A	4.0891577		3.9624869	$-$ + 91[illegible]
sen. A	9.9037119		4.1610744	....		.... 1449[illegible]
s	7.5138515	tan. v	9.9280833	....	$v = 40°\ 16'\ 39''$	
					$Y = 56\ \ 38\ \ 9$	
					$Y - v = 16°\ 21'\ 30''$	

Segundo triángulo.

b sen. A	4.0891577					
sen. v	9.8105620					
Δ	4.2785957	....	4.2785957	....	4.2785957	
0.5	9.6989700	sen. $(Y-v)$	9.4497001	cos. $(Y-v)$ ..	9.9820536	$d=$ 968[illegible]
d	3.9859740	Δ sen. $(Y-v)$ ..	3.7282958		4.2606493	..$-$182[illegible]
sen. $(Y-v)$	9.4497001		3.9315596—	....		..$-$ 85[illegible]
s'	7.4132398	tan. v'	9.7967362—	....	$v' = 147°\ 56'\ 38''$	
					$R = 231\ \ 49\ \ 8$	
					$R - v' = 83°\ 52'\ 30''$	

Tercer triángulo.

Δ sen. $(Y-v)$ ..	3.7282958					
sen. v'	9.7248896					
Δ'	4.0034062	....	4.0034062	....	4.0034062	
0.5	9.6989700	sen. $(R-v')$....	9.9975137	cos. $(R-v)$ ..	9.0281560	$e = 7665^{m}5$
e	3.8845405	Δ' sen. $(R-v')$	4 0009199		3.0315522	..$-$ 1075. 4
sen. $(R-v')$ ...	9.9975137		3.8188920	....		..... 6590. 1
s''	7.5844304	tan v''	0.1820279	......	$v'' = 56°\ 40'\ 14''$	
					$M = 114\ \ 26\ \ 58$	
					$M - v' = 57°\ 46'\ 44''$	

Cuarto triángulo.

Δ' sen. $(R-v')$	4.0009199					
sen. v''	9.9219595					
Δ''	4.0789604	....	4.0789604	....	4.0789604	
0.5	9.6989700	sen. $(M-v'')$ ..	9.9273687	cos. $(M-v'')$	9.7268804	$f = 11715^{m}3$
f	4.0687534	Δ' sen. $(M-v'')$	4.0063291		3.8058408	..$-$ 6395. 0
sen. $(M-v'')$ ..	9.9273687		3.7259361	....		..... 5320. 3
s'''	7.7740525	tan. v'''	0.2803930		$v''' = 62°\ 19'\ 50''$	

En el último triángulo se ha llevado la resolución hasta el ángulo v''' con el objeto de comprobar los cálculos, pues siendo éste uno de los ángulos del polígono, debe ser igual al que resulta del cálculo. El ángulo de que se trata es, en este caso, el designado por J, y se ve que, en efecto, se obtiene sensiblemente el mismo valor por la resolución, lo que indica que no hubo error alguno de importancia. Podrían también comprobarse las operaciones calculando el último lado JP del polígono para comparar el resultado con el valor que ya se tiene conocido, y que es el que se ha llamado a en el caso actual. Otra comprobación sencilla consiste en deducir todos los ángulos que tienen su vértice en P, y cuyo conjunto debe reproducir el ángulo P del polígono. Es siempre muy conveniente hacer pruebas de este genéro para cerciorarse de la exactitud de las operaciones numéricas.

Las superficies de los cuatro triángulos, expresadas en miriaras, son:

$$\begin{aligned} s &= 32^{M}.647617 \\ s' &= 25\ .896423 \\ s'' &= 38\ .408770 \\ s''' &= 59\ .436397 \end{aligned}$$

$$\text{Superficie total} = 156^{M}.389207$$

195. La división del polígono en triángulos es el método que generalmente se sigue para calcular la superficie de una figura irregular; pero también podría dividirse en cuadriláteros procediendo como voy á indicar. En la fig. 149ª, suponiendo trazada la diagonal PR, se tiene el cuadrilátero $P\,A\,Y\,R$, en el cual se conocen los tres lados b, c y d que pertenecen al polígono, y sus ángulos en A y en Y; se podrá, pues, calcular su superficie por una de las fórmulas que constan al principio de este Capítulo. Obtuve esa fórmula por las consideraciones siguientes: vimos que el ángulo v se calcula por la ecuación $\tan.\, v = \frac{b \operatorname{sen.} A}{c - b \cos.\, A}$, y como el mismo triángulo da $\operatorname{sen.} v = \frac{b \operatorname{sen.} A}{\Delta}$ resulta por la combinación de este valor con el precedente: $\cos.\, v = \frac{c - b\cos.\, A}{\Delta}$. Por otra parte, suponiendo conocido el ángulo $Y - v$, la superficie del cuadrilátero sería:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen.} A + \tfrac{1}{2}\, d\, \Delta \operatorname{sen.} (Y - v)$$

Para determinar la cantidad $\Delta \operatorname{sen.} (Y - v)$, tenemos desarrollando:

$$\Delta \operatorname{sen.} (Y - v) = \Delta\, (\operatorname{sen.} Y \cos.\, v - \cos.\, Y \operatorname{sen.} v)$$

y sustituyendo los valores de sen. v y cos. v hallados antes, resulta:

$$\Delta \operatorname{sen} (Y - v) = c \operatorname{sen.} Y - b \operatorname{sen.} (A + Y)$$

y por consiguiente la expresión de la superficie del cuadrilátero vendrá á ser:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen.} A + \tfrac{1}{2}\, c\, d \operatorname{sen.} Y - \tfrac{1}{2}\, b\, d \operatorname{sen.} (A + Y) \;\ldots\ldots (4)$$

que es la fórmula á que me he referido. Al aplicarla es necesario atender al valor de $A + Y$; pues cuando este ángulo es mayor que 180°, varía de signo el último término.

Una vez calculada la superficie del primer cuadrilátero con los elementos conocidos del polígono, es preciso determinar el lado $PR = \Delta'$ y el ángulo $P\,R\,Y = v'$ á fin de que en el segundo cuadrilátero $P\,R\,M\,J$ se conozcan también los tres lados $P\,R$, $R\,M$, $M\,J$, y los dos ángulos R y M que demanda la fórmula (4) para aplicar la misma resolución. Con este fin, la ecuación (2) da:

$$\tan.\, v = \frac{b \operatorname{sen.} A}{c - b \cos.\, A} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

y por la misma razón obtendríamos:

$$\tan.\, v' = \frac{\Delta \operatorname{sen.} (Y - v)}{d - \Delta \cos.\, (Y - v)}$$

pero como no se conoce $\Delta = P\,Y$, resulta sustituyendo en la última ecuación el valor (3):

$$\tan.\, v' = \frac{b \operatorname{sen.} A \operatorname{sen.} (Y - v)}{d \operatorname{sen.} v - b \operatorname{sen.} A \cos.\, (Y - v)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Para calcular Δ' el triángulo $P\,Y\,R$ suministra:

$$\Delta' = \frac{d \operatorname{sen.} (Y - v)}{\operatorname{sen.} (Y - v + v')} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Las fórmulas (4), (5), (6) y (7), son las que se deben aplicar á cada cuadrilátero; pero si se calcula la (5) en primer lugar, puede darse á la (4) otra forma un poco más sencilla. En efecto, si en la expresión que nos sirvió de punto de partida, á saber:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen.} A + \tfrac{1}{2}\, d\, \Delta \operatorname{sen.} (Y - v)$$

se introduce el valor de la ecuación (3) obtendremos:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \operatorname{sen.} A + \tfrac{1}{2}\, b\, d \operatorname{sen.} A\, \frac{\operatorname{sen.} (Y - v)}{\operatorname{sen.} v} \;\ldots\ldots\ldots (4')$$

que es la que puede reemplazar á la (4).

En el caso que representa la figura 149ª basta únicamente aplicar la fórmula (4); pues por tener sólo seis lados el polígono, los dos cuadriláteros en que está dividido quedan completamente determinados con los elementos del mismo polígono; pero el método que he trazado es general para cualquiera otra figura de mayor número de lados. A la verdad las fórmulas son más que las que establecí para el caso en que el polígono se divide en triángulos; pero puede haber compensación de trabajo, y acaso alguna ventaja, por el hecho de que una figura de n lados tiene que dividirse en $n - 2$ triángulos; mientras que sólo admite $\frac{1}{2}(n - 2)$ cuadriláteros.

La aplicación de la fórmula (4) á los datos de la figura 149ª produce:

$$\begin{aligned} PAYR &= 58^{M}543752 \\ PRMJ &= 97.843695 \\ \hline \text{Superficie total} &= 156^{M}387447 \end{aligned}$$

El último cuadrilátero se calculó por medio de los elementos del polígono, quiere decir, por medio de los lados a, f, e y de los ángulos J y M, y por consiguiente, no fué preciso emplear las otras fórmulas; pero para comprobar las operaciones siempre es conveniente, en casos como este, calcular los dos ángulos parciales en R por la ecuación (6), ó bien la diagonal PR por la (7); porque aquellos deben dar por suma el ángulo R del polígono, y los dos valores de la diagonal, que es lado común á dos cuadriláteros, deben resultar iguales.

196. Voy á proponer un nuevo método para calcular las superficies que, en mi concepto, ofrece algunas ventajas respecto de los anteriores. Si en un polígono se suponen trazadas líneas desde todos sus vértices en una dirección cualquiera, con tal de que sea constante, quedará dividida la superficie en trapecios fácilmente calculables. La dirección de las rectas puede ser ó la de una diagonal del polígono, ó la de uno de sus lados: en el primer caso, además de los trapecios, pueden resultar uno ó dos triángulos, y en el segundo un triángulo. La figura 150ª presenta esta útltima disposición, habiéndose escogido la dirección del lado AY para trazarle paralelas por los vértices R, P y M; pero podría haberse elegido la dirección de la

diagonal PY por ejemplo, y entonces habrían resultado dos trapecios y dos triángulos. De una ú otra manera el primer triángulo ó el primer trapecio quedan enteramente determinados con los elementos que suministra el polígono. Desarrollemos el cálculo aplicado á la figura 150ª que es igual á la 149ª, y cuyos elementos designaremos con las mismas letras de que antes hicimos uso.

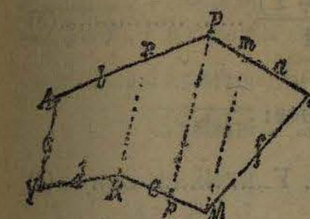

Fig. 150ª

En el primer trapecio $RYAr$ se conocen los lados $RY = d$, $YA = c$ y los ángulos en A y en Y, por lo cual comenzaré por hallar la expresión de su superficie en función de esos elementos. Si se conociera el lado $Ar = x$, la fórmula (4) daría:

$$s = \tfrac{1}{2}\, c\, d \,\text{sen.}\, Y + \tfrac{1}{2}\, x\, [c \,\text{sen.}\, A - d \,\text{sen.}\, (A + Y)]$$

Para eliminar á x consideremos que si desde los puntos A é Y se supone trazada la altura del trapecio, su valor podrá expresarse en función de x y de d, puesto que los ángulos ArR y rRY son respectivamente suplementarios de A y de Y. Los dos valores de la altura son: $x \,\text{sen.}\, A$ y $d \,\text{sen.}\, Y$, que igualados producen:

$$x = \frac{d \,\text{sen.}\, Y}{\text{sen.}\, A}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación precedente, se obtiene:

$$s = c\, d \,\text{sen.}\, Y - \tfrac{1}{2}\, \frac{d^2 \,\text{sen.}\, Y \,\text{sen.}\, (A + Y)}{\text{sen.}\, A}$$

Esta fórmula suministra la superficie del trapecio en función de los elementos conocidos; pero es todavía susceptible de una forma más sencilla. Si designamos por m la distancia Rr, que es la segunda base paralela del trapecio, se tiene:

$$2\, s = (c + m)\, d \,\text{sen.}\, Y$$

Y eliminando á s entre esta ecuación y la anterior, resulta:

$$m = c - d\,\frac{\text{sen.}\,(A+Y)}{\text{sen.}\,A}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

con lo que la última expresión de s, produce:

$$s = \tfrac{1}{2}\,(c+m)\,d\,\text{sen.}\,Y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

La fórmula (8), además de proporcionar un dato necesario para la (9) da también la base Rr del segundo trapecio $R\,r\,P\,p$ para proseguir el cálculo. En cuanto al lado Pr, se ve que es igual á $b-x$, habiéndose obtenido:

$$x = \frac{d\,\text{sen.}\,Y}{\text{sen.}\,A}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

De este modo en el trapecio siguiente se conocerá la base $Rr=m$, $Pr=b-x$, el ángulo $r=A$ y el ángulo R igual al interior YRM del polígono, menos el suplemento de Y, quiere decir, se tendrán datos semejantes á los del primer trapecio, y por consiguiente, se aplicará la misma resolución representada por las fórmulas (8), (9) y (10). La cantidad $b-x$ reemplazará á d, m á c, R á A y A á Y, por lo cual se obtendrá:

$$Pp = m' = m - (b-x)\,\frac{\text{sen.}\,(A+R)}{\text{sen.}\,R}$$

$$s' = \tfrac{1}{2}\,(m+m')\,(b-x)\,\text{sen.}\,A$$

$$Rp = x' = \frac{(b-x)\,\text{sen.}\,A}{\text{sen.}\,R}$$

Esta resolución da los elementos necesarios del tercer trapecio $P\,p\,M\,m$ para proseguir de una manera idéntica. En el último triángulo MmJ se conocerán los lados Mm, mJ y el ángulo en $m=pPJ$, que bastan para calcular su superficie. Por comprobación podrán determinarse los elementos MJ y J.

Apliquemos las fórmulas con los datos que han servido hasta aquí:

d	3.9859740	0.5	9.6989700	d sen. Y	3.9077603
sen. $(A+Y)$	8.7726049—	$c+m$	4.0550456	sen. A	9.9037119
sen. A	—9.9037119	d	3.9859740	x	4.0040484
	2.8548670—	sen. Y	9.9217863		
	$+\ 715^{m}.9$	s	7.6617759		$x = 10093^{m}.7$
	$c = 5317\ .7$				$b = 15326\ .6$
	$m = 6033^{m}.6$		$s = 45^{M}.896116$		$b-x = 5232^{m}.9$

$b-x$	3.7187424	0.5	9.6989700	$(b-x)$ sen. A	3.6224543
sen. $(A+R)$	9.9145011—	$m+m'$	4.2200558	sen. R	9.9770713
sen. R	—9.9770713	$b-x$	3.7187424	x'	3.6453830
	3.6561722—	sen. A	9.9037119		
	$+\ 4530^{m}.8$	s'	7.5414801		$x' = 4419^{m}.6$
	$m = 6033\ .6$				$e = 7665\ .5$
	$m' = 10564\ .4$		$s' = 34^{M}.792056$		$e-x' = 3245^{m}.9$

$e-x'$	3.5113351	0.5	9.6989700	$(e-x')$ sen. R	3.4884064
sen. $(R+P)$	8.7496543—	$m'+m''$	4.3287424	sen. P	9.9844654
sen. P	—9.9844654	$e-x'$	3.5113351	x''	3.5039410
	2.2765240—	sen. R	9.9770713		
	$+\ 189^{m}.0$	s''	7.5161188		$x'' = 3191^{m}.1$
	$m' = 10564\ .4$				$a = 11457\ .0$
	$m'' = 10753^{m}.4$		$s'' = 32^{M}818508$		$a-x'' = 8265\ .9$

0.5	9.6989700
$a-x''$	3.9172901
m''	4.0315458
sen. P	9.9844654
s'''	7.6322713
	$s''' = 42^{M}.881634$

Sumando las cuatro superficies parciales se encuentra la total de $156^{M}.388314$, que es en consecuencia la del polígono.

197. La área de esta misma figura se ha calculado en los números 116 y 118 por métodos diversos de los que se han desarrollado en este Capítulo. Con el fin de compararlos, reunamos todos los resultados.

Por la triangulación............................	$s = 156^{M}.386594$
Por las coordenadas de los vértices...........	$s = 156\ .387220$
Por la división en triángulos.....................	$s = 156\ .389207$
Por la división en cuadriláteros...............	$s = 156\ .387447$
Por la división en trapecios......................	$s = 156\ .388314$

Las personas poco habituadas á apreciar el grado positivo de aproximación que debe esperarse de una operación numérica en determinadas circunstancias, se sorprenderán quizá al ver que son diferentes todos estos resultados no obstante haberse deducido directa ó indirectamente de los mismos datos, que son los de la triangulación que consta en el número 96, y por métodos de la más estricta exactitud; pero ya en otro lugar tuve ocasión de indicar la causa inevitable de esas diferencias, cual es la precisión necesariamente limitada con que se obtienen, de los datos originales, los diversos elementos que demanda cada uno de los procedimientos por cuyo medio puede llegarse al resultado que se busca. Todos los métodos aplicados á nuestro ejemplo son de la más rigurosa exactitud teórica; pero el simple hecho de que para aplicarlos es preciso preparar sus elementos propios por medio de algunos cálculos preliminares, basta para comprender la alteración indispensable que en la práctica debe producirse en los resultados, puesto que esos elementos auxiliares intermedios tienen que aproximarse únicamente hasta cierto límite más allá del cual no es prácticamente útil llevar la aproximación, y aun cuando así se hiciera, sería esta enteramente ilusoria por no corresponder al grado de precisión que tienen los datos originales, ó primitivos. De aquí se infiere que el resultado final, no siendo otra cosa más que una combinación más ó menos complicada de esos elementos, debe participar de los errores que implícitamente se admiten en ellos al limitar su aproximación; y como el error del resultado y los de los elementos guardan entre sí una relación que depende de la forma de

la función que enlaza aquél con éstos, se comprende desde luego que en funciones tales como las superficies, los volúmenes, etc., que provienen de productos de ciertos datos, se hace generalmente más perceptible la influencia de sus errores, ó por mejor decir, de la aproximación numérica con que representamos sus valores y hacemos la combinación de éstos. Supongamos, por ejemplo, que una superficie provenga del producto de dos cantidades cualesquiera, como 2785 y 240; suponiendo exactos estos números, su valor sería de 668400 unidades cuadradas; pero si por tomar enteros los factores, hubiéramos prescindido de una corta fracción en el segundo de ellos, tal como ± 0.1, es evidente que el resultado tendria un error de $\pm$ 278.5 unidades cuadradas, y sería absurdo creer que el valor obtenido era exacto hasta las últimas cifras.

En vista de esta dependencia necesaria entre el resultado y los datos, y atendiendo á que en el polígono cuya área se ha calculado por distintos procedimientos, los lados se aproximaron solamente hasta los decímetros y los ángulos hasta las unidades de segundo, lo que verdaderamente sorprende es que los diversos valores de una superficie tan considerable concuerden perfectamente casi hasta los millares de metros cuadrados, lo que no debe atribuirse más que á una compensación fortuita de errores que, por otra parte, casi siempre se verifica en los cálculos. La mayor diferencia es la de los resultados primero y tercero, la cual siendo de 2613 metros cuadrados, apénas llega á $\frac{1}{60000}$ de la superficie del polígono, cuyo valor real puede suponerse de $156^{M}.387000$.

Podría creerse que aproximando más los datos se obtendría también mayor exactitud en el resultado; pero esta es una ilusión que sólo abrigan las personas teóricas y de que debe desprenderse completamente un espíritu práctico. En efecto, podría suceder que de esta manera los resultados de diversos procedimientos concordasen mejor entre sí; pero tal concordancia en manera alguna mediría su exactitud real, y no produciría más que un aumento de trabajo enteramente inútil; porque de nada serviría aproximar, por ejemplo, los valores de los lados hasta los centímetros ó los milímetros, y los valores de los ángulos hasta los decimales de segundo, si los mejores instrumentos con que se toman sobre el terreno los datos primitivos, apenas permiten medir las líneas con la aproximación efectiva de $0^m.1$, y los ángulos con la de 4 á 5 segundos. Sirvan estas reflexiones para que el geómetra práctico se dedique á perfeccionar sus métodos de experimentación directa, más bien que á buscar en los números una exactitud ficticia, y para que colocándose siempre en el punto de vista positivo que corresponda á cada caso, guíe las operaciones numéricas en consonancia con la exactitud efectiva que atribuya á sus datos, no olvidando, sin embargo, que por regla general es conveniente apreciar en el cálculo cantidades algo menores que las suministradas por la medida directa, con el fin de no introducir en él una nueva causa de error originada por la aproximación numérica.

198. En todos los métodos que para medir la superficie se han desarrollado en este Capítulo y en el anterior, he supuesto conocidos los lados y los ángulos de la figura. Tal hipótesis queda plenamente justificada si se recuerda que, sea cual fuere el procedimiento que se emplee para levantar un plano, siempre es posible conocer aquellos elementos, ya sea por la medida directa, ya sea por medio del cálculo. Los levantamientos por el método de coordenadas polares se hallan en el primer caso, y los que se hacen por triangulaciones, por el método de coordenadas rectangulares y por el de intersecciones, en el segundo. Este último es el que da lugar á cálculos más laboriosos, si bien es el más rápido en el terreno, según se ha indicado ya en el número 137.

Todos los métodos de la planometría se prestan también de una manera más ó menos sencilla, á la determinación de las coordenadas de los vértices; y atendiendo á las grandes ventajas que ofrecen esos elementos, tanto para la construcción de los planos como para la resolución de muchos problemas, no debe vacilarse en calcularlos siempre, y en servirse de ellos preferentemente para la determinación de las superficies; pues aunque este camino parece más largo á primera vista, no lo es en realidad si se recuerda la extremada sencillez de las fórmulas que suministran el contenido de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices, y que se han establecido en los números 117 y 118. Aunque allí se hizo una aplicación numérica de

una de las fórmulas, me parece conveniente presentar aquí otro ejemplo para que el lector no tenga que consultar diversas partes de esta obra en busca de procedimientos que realmente corresponden á una sola. Recordemos solamente que suponiendo que se recorriese el perímetro dejando el polígono siempre á la izquierda, la regla que dedujimos en las fórmulas fué esta: *La superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada media de cada uno de los lados (semisuma de las ordenadas de sus extremos) por la diferencia de abscisas de los mismos extremos, restando siempre cada una de la que le sigue y atendiendo á los signos de todos los factores.*

Apliquemos la regla al polígono del número 150, cuyas coordenadas se repiten á continuación:

Estaciones.	x	y
1	$+\ 3788^m.7$	$+\ 3730^m.0$
2	$+\ 3938\ .0$	$-\ 620\ .0$
3	$0\ .0$	$0\ .0$
4	$+\ 35\ .4$	$+\ 1526\ .5$
5	$+\ 622\ .8$	$+\ 1515\ .8$
6	$+\ 653\ .6$	$+\ 2935\ .2$

El cálculo se dispone como sigue:

Ordenadas medias.	Dif. de abscisas.	Productos positivos.	Productos negativos.
$+\ 1555^m.0$	$+\ 149^m.3$	$23^H.2161$	
$-\ 310\ .0$	$-\ 3938\ .0$	$122\ .0780$	
$+\ 763\ .2$	$+\ 35\ .4$	$2\ .7017$	
$+\ 1521\ .1$	$+\ 587\ .4$	$89\ .3494$	
$+\ 2225\ .5$	$+\ 30\ .8$	$6\ .8545$	
$+\ 3332\ .6$	$+\ 3135\ .1$	$1044\ .8034$	
	Superficie $=$	$1289^H.0031$	$= 12^K.890031$

En este ejemplo todos los productos resultaron positivos, á diferencia del que se calculó en el número 118 por el mismo método.

Por todo lo que precede, habrá ya notado el lector la poca importancia que tiene el plano del polígono en la aplicación de los procedimientos analíticos, pues para dirigir las operaciones numéricas es suficiente un croquis, y aun un simple bosquejo trazado de memoria.

Los métodos que preceden se aplican generalmente á los polígonos formados por las directrices que, en la planometría parcial, se toman como líneas auxiliares; y á la superficie que resulte debe agregarse la comprendida entre las directrices y los lados poligonales que se levantan por su intermedio. Es claro que esta última será substractiva cuando el polígono auxiliar esté circunscrito al otro. En los casos en que las directrices corten en diversos puntos á las líneas de éste, de tal manera que las áreas aditivas no difieran mucho de las substractivas, creo que no hay inconveniente en medir gráficamente los valores de esas áreas, aun cuando se haya determinado por el cálculo la del polígono auxiliar. Esta marcha, que abrevia mucho la operación, puede hacerse más exacta construyendo en grande escala cada directriz y la línea poligonal referida á ella, con el fin de obtener con mayor precisión la superficie comprendida entre las dos. A pesar de esto, cuando la referencia se haya hecho por medio de coordenadas rectangulares, el cálculo de los trapecios que resultan se ejecuta con más facilidad que la operación gráfica, puesto que los mismos datos del terreno proporcionan sus bases y sus alturas.

199. Falta únicamente investigar la influencia que, en el valor de una superficie, tiene algún error de la cadena con que se hayan medido las líneas; porque sucede á veces que por descuido, ó por no descubrir ese error sino después de hechos los cálculos, se determina la superficie sin corregir previamente las líneas, y en tales casos la fórmula que voy á desarrollar suministra la corrección que debe hacérsele.

La expresión de una superficie puede reducirse á la forma general:

$$S = M\,a\,b$$

en la que a y b representan las líneas que la determinan, y M un coeficiente que depende del ángulo que estas forman entre sí. Si designamos por l la longitud que se le supone á la cadena, y por n, n', los

números de veces que cupo en las líneas medidas, se tendrá: $a = n\,l$, $b = n'\,l$, y la superficie obtenida es:

$$S' = M\,n\,n'\,l^2$$

Mas si, por las comparaciones con la unidad fundamental, se renoce que la verdadera longitud de la cadena es $l' = l + c$, la superficie corregida será:

$$S = M\,n\,n'\,(l + c)^2 = \frac{S'}{l^2}\,(l^2 + 2\,c\,l + c^2)$$

ó bien la corrección vendrá á ser:

$$S - S' = S'\left(2\,\frac{c}{l} + \frac{c^2}{l^2}\right)$$

y como por lo común c es muy pequeño respecto de l, podrá tomarse en todos casos:

$$S - S' = 2\,\frac{c}{l}\,S'$$

El polígono que ha servido de principal ejemplo en este Capítulo proviene de una triangulación cuya base se midió con una cadena de $24^{m}.9857$, como consta en el núm. 22; pero si por no conocer la verdadera longitud de la cadena, la hubiera yo supuesto de 25^{m}, habría hallado $S' = 156^{M}.566000$ próximamente por superficie del polígono. Para corregirla por la fórmula precedente, tendríamos: $l = 25^{m}$, $c = -0^{m}.0143$, y resultaría:

$$S - S' = -0.001144 \times 156566000 = -179111 \text{ met. cuadrados.}$$

La superficie correcta sería, pues:

$$S = 156566000 - 179111 = 156^{M}.376889,$$

ó bien sensiblemente la misma cantidad que han dado los diversos procedimientos de este Capítulo.

La fórmula indica que la relación entre el error de la superficie y su valor, crece proporcionalmente á $2\,\frac{c}{l}$ por lo cual mientras menor sea la cadena, mayor debe ser el cuidado con que se determine su verdadero tamaño. En nuestro ejemplo se ha visto que poco más de un centímetro de error en una cadena comparativamente larga, pues las más comunes tienen sólo un decámetro, produce una diferencia casi de 18 hectaras en la superficie. Este resultado, y en general, la forma de la ecuación precedente, manifiestan la gran trascendencia que tiene el servirse de una medida de longitud cuyo tamaño real no no sea el que se le atribuye; trascendencia que indudablemente por falta de buenos conocimientos teóricos, no comprenden las personas que califican de nimiedad la cuidadosa comparación que debe hacerse de la cadena con la unidad fundamental á fin de llevar en cuenta el error que tenga. Para opinar de esta manera se fundan en que al ejecutar la medida de una línea, cada vez que se aplica la cadena en su dirección puede cometerse un error de la misma magnitud que el que tenga el instrumento, y en consecuencia, juzgan inútil apreciar este último; pero tal raciocicio no puede sostenerse cuando se examina la naturaleza de ambos errores. Efectivamente, entre los errores hay unos que se llaman *constantes*, cuyo carácter esencial consiste en no ser susceptibles de compensación, á diferencia de los *accidentales* ó fortuitos, que por su naturaleza son esencialmente variables, no tanto en su magnitud como en su signo. A los primeros pertenece el error que tenga la cadena, y á los segundos los que se cometen al hacer las medidas. El pequeño error que se comete cada vez que se aplica la cadena en la dirección de una línea, puede tener una magnitud bastante apreciable; pero como unas veces se produce por exceso y otras por defecto, hay gran probabilidad de que en el resultado final se obtenga una compensación más ó menos perfecta; mientras que si á una cadena cuyo verdadero tamaño es $l + c$ se le atribuye sólo la longitud l, es evidente que al aplicarla n veces sobre la línea se cometerá el error $n\,c$ en la distancia total, sin que se conciba la posibilidad de compensación, puesto que c no puede variar de signo.

En otra ocasión he dicho que una exactitud exagerada, además de innecesaria, es sólo aparente cuando no corresponde á la que existe en los datos; pero tratándose de errores de cierto género, es preciso no perdonar medio alguno de eliminar sus efectos, sobre todo, pudiéndose conseguir de una manera tan sencilla como en el caso que ha dado origen á estas reflexiones.

CAPITULO IV.

REGLAS GENERALES PARA LA CLASIFICACIÓN Y VALUACIÓN DE LAS TIERRAS.

200. El conocimiento de la extensión de una propiedad rústica, y el del valor de la unidad de superficie son los elementos indispensables para hacer su valuación. El primero de dichos elementos se determina con gran precisión por medio de los procedimientos que, con la amplitud necesaria, se han expuesto en los Capítulos que preceden; y en cuanto al segundo, aunque su determinación depende de consiraciones ajenas á los procedimientos geométricos de la topografía; es de tal importancia práctica, que no he podido menos de consagrarle algunas líneas con el fin de establecer el corto número de reglas generales que pueden servir de norma al perito encargado de la dificil misión de valuar los terrenos de una propiedad rural.

"Asentar de antemano,—dice Mr. Laur,—que en ninguna parte existen *peritos clasificadores y valuadores* propiamente dichos, de los terrenos en general, y que el mejor perito en este género es el que está *mejor informado* respecto de los productos brutos y de los productos líquidos de un distrito ó de una heredad que se tiene necesidad de valuar, es anunciar desde luego las dificultades que tiene que vencer todo perito geómetra encargado de la delicada tarea de justipreciar una propiedad de cierta importancia." Después de esta opinión de un escritor tan experimentado y concienzudo como Mr. Laur,