Estos logaritmos, combinados con los de la página precedente, permitirán reducir unas á otras las medidas inglesas y las mexicanas del antiguo sistema. Supongamos, por ejemplo, que se quiera saber cuántas varas cuadradas contiene el acre. Como se tiene el logaritmo para convertir acres en hectaras; y la hectara tiene 10000 metros cuadrados, bastará aumentar 4 unidades á la característica de ese logaritmo para obtener el que convierte acres en metros cuadrados, y resultará:

Acres en metros cuadrados	3.6071021	
Metros cuadrados en varas cuadradas	0.1535120	
	3.7606141	5762.54

El acre contiene, pues, 5762.54 varas cuadradas mexicanas. Del mismo modo pueden hacerse muchas combinaciones.

El *pie* inglés (*foot*, plural *feet*) que es la tercera parte de la yarda, es muy usado para medir distancias pequeñas, así como el pie cuadrado para superficies muy cortas. Esta última unidad es evidentemente igual á la novena parte de la yarda cuadrada.

Para facilitar las reducciones que pueden ofrecerse á medidas de otros países, tomo los siguientes datos de la obra del Cap. Lee titulada: "*Tables and Formulæ.*" Todos expresan la relación de la medida llamada *pie* en diversos países con el metro.

Pie de México	0^m 2793333
Idem de España	0 . 2826553
Idem de Francia (Pie de Paris)	0 . 3248394
Idem de Inglaterra y Rusia	0 . 3047945
Idem de Prusia y Dinamarca	0 . 3138535
Idem de Baviera	0 . 2918592
Idem de Sajonia	0 . 2831901
Idem de Suiza y Baden	0 . 3000000
Idem de Austria (Pie de Viena)	0 . 3161109

Mr. Lee confunde el pie mexicano con el español suponiéndolos iguales; pero siendo el nuestro la tercera parte de la vara mexicana, cuyo valor legal es de $0^m.838$, lo he separado del pie español.

CAPITULO II.

PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS PARA MEDIR LA SUPERFICIE.

187. Según dije en el Capítulo anterior, para medir gráficamente la superficie de un terreno es preciso haber construído su plano, ó por lo menos su perímetro en la mayor escala que sea posible, puesto que de él se toman las líneas necesarias para el cálculo. Esta condición, común á todos los métodos gráficos, los hace substancialmente iguales; pero como pueden seguirse diversos caminos para tomar los datos, lo dividiré en tres clases que expondré por separado.

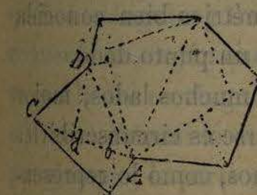

Fig.ª 140.ª

Primer método. Este consiste en dividir los polígonos en triángulos, ya sea por medio de rectas que partan de un solo vértice A (figura 140ª), ya de dos ó más A, D, E, etc.; (fig. 141ª), ó ya en fin de un punto cualquiera O de su interior (figura 142ª). En seguida se trazan las alturas de los triángulos componentes, y por último, se mide con el doble-decímetro la base b y la altura a de cada uno, que reducidas á los valores que esas líneas tendrían en el terreno, según la escala de la construcción, permitirán calcular la superficie por la fórmula $s = \frac{1}{2} a b$. La suma de esas áreas parciales será, pues, la del polígono.

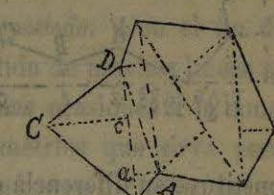

Fig.ª 141.ª

Con el fin de medir el menor número posible de líneas, es conveniente tomar por base de dos triángulos contiguos la línea que los separa. En las figuras 140.ª y 141.ª se ve esa disposición en la parte $A\,B\,C\,D$ de los polígonos: la base común es en el primer caso $A\,C$, y en el segundo $B\,D$. De ese modo la medida de las líneas $A\,C$, $B\,b$ y $D\,d$ en la figura 140.ª, y la de las rectas $B\,D$, $A\,a$ y $C\,c$ en la 141.ª da la superficie de dos triángulos; mientras que si, por ejemplo, se hubieran tomado por bases $B\,C$ y $A\,D$, habría sido necesario medir cuatro líneas para calcular la misma superficie.

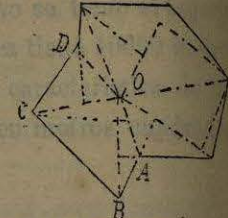

Fig.ª 142.ª

Las perpendiculares, ó alturas de los triángulos, se trazan generalmente por medio de una escuadra apoyada en una regla que se hace coincidir con las bases. Sin embargo, cuando las alturas son grandes, es preferible trazarlas por la construcción geométrica bien conocida para tirar una perpendicular á una línea desde un punto dado.

188. *Segundo método.* Si los polígonos tienen muchos lados, mejor que dividirlos en triángulos, lo que debe hacerse es circunscribirles un rectángulo que pase por sus vértices extremos, como lo representa la figura 143.ª Bajando después perpendiculares de todos los demás sobre los lados del rectángulo, se tendrá una serie de trapecios y triángulos entre los lados de éste y los del polígono, los cuales en conjunto forman la diferencia entre las superficies de una y otra figuras. Si, pues, se miden los lados del rectángulo así como las alturas de todos los triángulos y trapecios, podrá obtenerse la superficie total y la que constituye su diferencia con la del polígono, que resultará de la simple substracción de ambas cantidades.

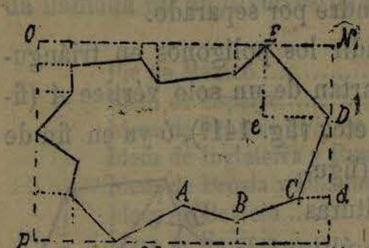

Fig.ª 143.ª

En este método pueden también combinarse entre sí las alturas y las bases medidas para obtener gráficamente las coordenadas de los vértices del polígono referidas á los lados del rectángulo como ejes.

Por ejemplo, suponiendo el origen en M, las coordenadas del punto E serán $x = E\,N$, $y = C\,c + D\,d + E\,e$. Una vez conocidos esos elementos para cada vértice, se aplica cualquiera de las reglas que se han establecido en los números 117 y 118 para obtener la superficie.

Otras veces en lugar de circunscribir al polígono dado el rectángulo auxiliar, se traza éste de manera que cortando los lados de la figura, su superficie sea próximamente igual á la de aquél, lo cual se consigue estimando á la simple vista las superficies que quedan comprendidas entre los lados del rectángulo y los del polígono, como lo indica la figura 144.ª, á fin de que las diferencias por exceso resulten casi iguales á las diferencias por defecto. Después de medidas las líneas necesarias para el cálculo de esas diferencias, se da á las superficies de los pequeños triángulos y trapecios el signo conveniente, según que deban sumarse con la del rectángulo ó restarse de ella, para obtener la del polígono; así, por ejemplo, la parte $a\,B\,c\,N$ será substractiva, y $c\,C\,d$ aditiva. Este modo de operar puede ofrecer la ventaja de que el resultado final quede casi independiente de los pequeños errores que se cometen al medir las bases y las alturas, sobre todo si se consigue que las diferencias positivas sean sensiblemente iguales á las negativas.

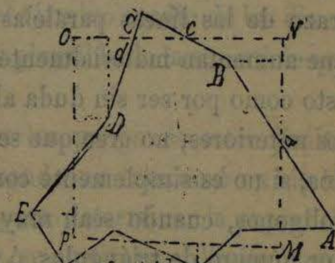

Fig.ª 144.ª

189. *Tercer método.* Con el fin de evitar la medida de muchas líneas se recurre algunas ocasiones á la construcción geométrica que sirva para disminuir el número de lados de un polígono sin alterar su superficie. Sea $A\,B\,C\,D\,E\,F$ (figura 145.ª), el polígono dado; para reducir á uno solo los lados $E\,F$ y $F\,A$, se traza la recta $A\,E$ y por F la paralela $F\,a$ á esta última; la línea $E\,a$ será la que

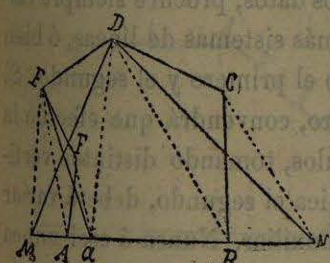

Fig.ª 145.ª

resuelve el problema, puesto que los dos triángulos EFA y EaA, son equivalentes. La misma construcción suministra la recta DM en lugar de los dos lados DE y Ea; así como DN en vez de BC y CD, por lo cual el polígono queda reducido al triángulo MDN de igual superficie. Midiendo, pues, su base y su altura se obtendrá la área del polígono.

Aunque toda figura poligonal puede reducirse de ese modo á un triángulo, ó por lo menos transformarse en otra cuyo perímetro sea más sencillo, sucede á veces que las construcciones exigen un gran espacio libre en el papel, con que no siempre se cuenta; y además, el trazo de las líneas paralelas auxiliares está sujeto á inexactitudes que aumentan materialmente las probabilidades de error. Tanto por esto como por ser sin duda alguna más complicado este método que los anteriores, no creo que se encuentre ventaja en preferirlo á aquéllos, si no es simplemente con el objeto de regularizar un poco los polígonos, cuando sean muy sinuosos, para descomponerlos en menor número de triángulos, ó para circunscribirles con más facilidad una figura rectangular.

Tales son, en resumen, los tres métodos gráficos que se aplican para determinar la superficie de un polígono. Las operaciones numéricas á que dan lugar son tan sencillas, que me parece inútil aplicarlas á un ejemplo, y me limitaré á recomendar al lector que tanto para comprobar el resultado, como para descubrir algún error que pudiera existir en las multiplicaciones ó en los datos, procure siempre calcular la superficie por medio de dos ó más sistemas de líneas, ó bien aplicando dos métodos diferentes, como el primero y el segundo. Si únicamente quiere hacer uso del primero, convendrá que efectúe la descomposición del polígono en triángulos, tomando distintos vértices por puntos de división; y si sólo aplica el segundo, deberá variar la posición de los lados del rectángulo auxiliar. Nunca ó casi nunca hallará resultados exactamente iguales por medio de diversas líneas ó de distintos métodos; pero la magnitud de las diferencias, comparada con la de la superficie, lo pondrá en estado de juzgar si aquéllas provienen únicamente de la influencia de los errores que inevitablemente se cometen al medir gráficamente las distancias, ó bien

son originadas por equivocaciones notables que demanden la repetición de las operaciones. Es sumamente difícil señalar el límite de tolerancia en esta clase de comprobaciones, porque dependiendo los resultados del grado de precisión con que se ejecutan los trazos de las líneas, y la aproximación con que pueden medirse, influyen en ellos de una manera muy notable, no sólo la escala del plano, sino también la mayor ó menor habilidad del dibujante; pero creo que en circunstancias comunes, siempre que la diferencia entre dos ó más medidas gráficas de una misma superficie no exceda de $\frac{1}{300}$ de su valor, puede atribuirse fundadamente á la influencia de los errores inevitables que se han mencionado, y el término medio de los diversos resultados representará el valor más plausible de la superficie que se busca.

190. Suele presentarse el caso de que los polígonos estén limitados por líneas curvas, como sucede cuando un camino ó un río les sirven en parte de linderos. Entonces para determinar la superficie por cualquiera de los métodos gráficos, se sustituye al límite curvilíneo otro rectilíneo auxiliar, y después de calculada la área comprendida entre los alineamientos rectilíneos, se le agrega ó se le quita, según el caso, la superficie contenida entre las líneas rectas y las curvas, la cual se determina por algunas de las fórmulas que van á desarrollarse.

Sea AB (fig. 146ª) una parte del alineamiento rectilíneo, y CD la parte del verdadero límite curvilíneo; para calcular la superficie comprendida entre ambas líneas, se divide la recta en un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de división se levantan perpendiculares hasta que encuentran á la curva. Propongámonos determinar la superficie $17FE$, terminada por las ordenadas ó perpendiculares extremas $E1$ y $F7$, que es evidentemente igual á la suma de los trapecios mixtilíneos formados por la curva, las ordenadas y la

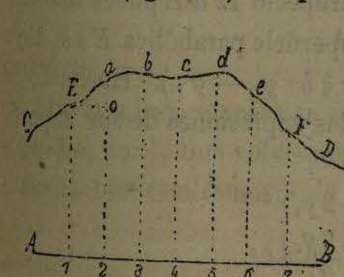

Fig.ª 146ª

equidistancia de éstas. Desde luego, si la equidistancia es bastante pequeña, podremos admitir sin error de importancia, que es sensiblemente recta la porción de la curva comprendida entre cada dos ordenadas, ó lo que es lo mismo, que los trapecios son rectilíneos. Entonces, representando por y las ordenadas, con el índice numérico que señala su orden desde 1 hasta n, y por h la equidistancia, las superficies de los $n-1$ trapecios serán:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} h (y_1 + y_2)$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2} h (y_2 + y_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$s_{n-1} = \tfrac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$$

cuya suma da la superficie s que se busca, á saber:

$$s = \tfrac{1}{2} h [y_1 + y_2 + 2(y_2 + y_3 + \dots\dots y_{n-1})] \dots\dots (1)$$

Esta fórmula equivale á la regla siguiente: *la superficie comprendida entre la curva y la recta es igual á la mitad de la equidistancia multiplicada por la suma de las ordenadas extremas, más la doble suma de todas las intermedias.*

Es acaso un poco más exacto llevar en cuenta la parte curvilínea de cada trapecio, suponiendo que la curva correspondiente, tal como Ea, se confunde sensiblemente con un arco de parábola que tenga su vértice en el punto E. Entonces el trapecio 12 $a\,E$ puede descomponerse en el rectángulo 12 $o\,E$ y la superficie parabólica $E\,o\,a$, cuya expresión será igual á $\tfrac{2}{3} Eo \times oa = \tfrac{2}{3} h (y_2 - y_1)$. Haciendo la misma hipótesis para cada trapecio, las expresiones de sus superficies son:

$$s_1 = \tfrac{1}{3} h (y_1 + 2 y_2)$$
$$s_2 = \tfrac{1}{3} h (y_2 + 2 y_3)$$
$$s_3 = \tfrac{1}{3} h (y_3 + 2 y_4)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$s_{n-1} = \tfrac{1}{3} h (y_{n-1} + 2 y_n)$$

cuya suma produce:

$$s = \tfrac{1}{3} h [y_1 + 2 y_n + 3(y_2 + y_3 + \dots\dots y_{n-1})] \dots\dots (2)$$

De aquí resulta que *la superficie es igual á la tercera parte de la equidistancia multiplicada por la primera ordenada, más el doble de la última, más la triple suma de todas las intermedias.*

Hay otra fórmula conocida con el nombre de su autor Simpson, que se considera como la más exacta para calcular las superficies terminadas por líneas curvas; pero que exige que sea impar el número n de ordenadas y por consiguiente par el de trapecios. Para desarrollarla, supongamos que un trapecio mixtilíneo se descompone, como indica la figura 147ª, en otro rectilíneo $A\,B\,C\,D$ y en un segmento parabólico $C\,D\,F$. Trazando la ordenada intermedia $H\,L$, y admitiendo que el vértice de la parábola esté en el extremo F de la perpendicular elevada en el punto G á la cuerda $C\,D$, llamemos a el ángulo $CDE = FGH$. Entonces la superficie parabólica $C\,D\,F$ será igual á $\tfrac{2}{3}\,CD \times FG$; pero como $FG = HG$ cos. a, y también $CD = \frac{DE}{\text{cos. } a}$, resulta: $CDF = \tfrac{2}{3}\,DE \times GH$. Si designamos ahora por y', y'', y''' respectivamente las tres ordenadas AD, LH y BC, se tendrá que GH es igual á $LH - LG = y'' - \tfrac{1}{2}(y' + y''')$, y siendo h la equidistancia $AL = LB$, la superficie del trapecio será:

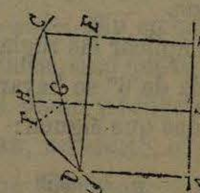

Fig. 147ª

$$A\,B\,C\,H\,D = h(y' + y''') + \tfrac{4}{3} h [y'' - \tfrac{1}{2}(y' + y''')]$$
$$= \tfrac{1}{3} h (y' + y''' + 4 y'')$$

De la misma manera se expresan las áreas de los trapecios de dos en dos, por lo que volviendo á nuestras anteriores anotaciones y á a figura 146ª tendremos:

$$13\,b\,E = \tfrac{1}{3} h (y_1 + y_3 + 4 y_2)$$
$$35\,d\,b = \tfrac{1}{3} h (y_3 + y_5 + 4 y_4)$$
$$57\,F\,d = \tfrac{1}{3} h (y_5 + y_7 + 4 y_6)$$

cuya suma será:

$$s = \tfrac{1}{3} h [y_1 + y_7 + 2(y_3 + y_5) + 4(y_2 + y_4 + y_6)]$$

Generalizando esta expresión para un número impar cualquiera n de ordenadas, resulta la fórmula:

$$\left.\begin{aligned} s = \tfrac{1}{3} h [y_1 + y_n + 2 (y_3 + y_5 + \ldots\ldots\ldots y_{n-2}) \\ + 4 (y_2 + y_4 + \ldots\ldots\ldots y_{n-1})] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

que equivale á esta regla: *la superficie formada por un número par de trapecios mixtilíneos, es igual á la tercera parte de la equidistancia multiplicada por la suma de las ordenadas extremas, más la doble suma de las intermedias de orden impar, más la cuádruple suma de las intermedias de orden par.*

Para aplicar las reglas precedentes, supongamos que con una equidistancia de 6^{m} se hayan trazado y medido sobre un plano las nueve ordenadas que siguen:

$y_1 = 95^{m}$	$y_4 = 135^{m}$	$y_7 = 140^{m}$
$y_2 = 107$	$y_5 = 151$	$y_8 = 134$
$y_3 = 112$	$y_6 = 147$	$y_9 = 125$

Haciendo las sustituciones, la fórmula (1) dará:

$$s = 3\,(95 + 125 + 1852) = 6216 \text{ metros cuadrados.}$$

El resultado de la (2) será:

$$s = 2\,(95 + 250 + 2778) = 6246 \text{ metros cuadrados.}$$

En cuanto á la fórmula de Simpson, produce:

$$s = 2\,(95 + 125 + 806 + 2092) = 6236 \text{ metros cuadrados.}$$

Se comprende que cualquiera de las tres fórmulas da un resultado tanto más cercano á la verdad cuanto menor es la equidistancia. Si sucediese que la recta auxiliar se trazase entre dos puntos de la curva, caso que es muy frecuente, se harían nulas la primera y la última ordenadas al aplicar las fórmulas, y lo mismo debe decirse si las dos líneas se cortan en cualquiera de los puntos de división intermedios, esto es, se haría nula la ordenada correspondiente. Es evidente que por las mismas reglas se puede también calcular la superficie com-

prendida entre dos curvas, como lo indica la figura 148ª; las cantidades que he designado por y serían en este caso las líneas paralelas $a a'$, $b b'$, $c c'$, etc., trazadas á iguales distancias entre las dos curvas.

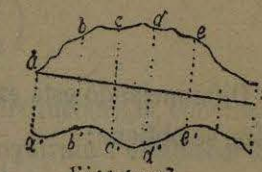

Fig.ª 148ª

191. Se ha dicho que al aplicar cualquiera de los métodos gráficos para determinar una superficie, es preciso después de medir las líneas del plano, deducir el valor que tienen en el terreno con arreglo á la escala, de suerte que si se ha medido la distancia l, la longitud real será $L = l\,r$. Sin embargo, no es indispensable hacer la reducción de cada línea, sino que es mucho más breve calcular la superficie efectiva del plano y reducirla después al valor que realmente representa. Sean, en efecto, m y n dos líneas del plano cuyo producto determina una superficie; ésta en el plano será, pues: $s = m\,n$; pero como las longitudes de las líneas en el terreno son respectivamente $M = m\,r$ y $N = n\,r$, la superficie verdadera es $S = M\,N$, é introduciendo los valores de M y N resulta:

$$S = s\,r^2$$

lo que indica que la superficie real es igual á la que da el plano multiplicada por el cuadrado del denominador de la relación ó escala $\frac{1}{r}$ con que se haya ejecutado la construcción. En la escala de $\frac{1}{5000}$, por ejemplo, supongamos que se hayan medido las distancias $0^{m}.0835$ y $0^{m}.0241$, que representan la base y la mitad de la altura de un triángulo del plano. Su superficie es $s = 0.00201235$, por lo que el área real será $S = 0.00201235 \times 25000000 = 5^{m}.030875$. Igual resultado se hallaría ciertamente reduciendo al terreno cada una de las distancias, que serían $417^{m}.5$ y $120^{m}.5$; pero es claro que la fórmula anterior se presta á un cálculo más corto, sobre todo si s representa ya la superficie del plano obtenida por la adición de todos los triángulos, trapecios, etc., que la forman.

192. Investiguemos, por último, el grado de precisión con que es posible obtener una superficie por los métodos gráficos, esto es, mi-

diendo sobre un plano construído en la escala $\frac{1}{r}$, los dos factores m y n. La expresión de la superficie es, según vimos:

$$S = m\,n\,r^2$$

Diferenciando esta expresión respecto de m y n que son las variables, se obtiene:

$$\mathrm{d}\,S = r^2\,(m\,\mathrm{d}\,n + n\,\mathrm{d}\,m)$$

Las diferenciales $\mathrm{d}\,m$ y $\mathrm{d}\,n$ supongo que son los errores que pueden cometerse al tomar con el doble-decímetro los valores de m y n. Se ve desde luego que $d\,S$ no puede ser nulo más que en el caso de que $\frac{\mathrm{d}\,m}{m} = -\frac{\mathrm{d}\,n}{n}$, quiere decir, cuando siendo los errores de signos contrarios, sus valores numéricos sean proporcionales á los de las líneas. Este caso es remotísimo, pues aunque en realidad los errores pueden tener distintos signos, sus valores tienden más bien á ser constantes por depender del grado de aproximación con que es posible medir las líneas, y cuyo límite hemos fijado varias veces en $0^{\mathrm{m}}.0001$ por lo menos. Admitiendo todavía ese límite de precisión, ó señalando ese valor á los errores, la fórmula precedente será:

$$\mathrm{d}\,S = \frac{r^2}{10000}\,(m + n)$$

Esta expresión ó la anterior manifiestan también que es muy importante que r sea pequeño, ó lo que es lo mismo, que la escala del plano sea la mayor posible. En una buena operación topográfica se puede tener alguna seguridad de medir las líneas del terreno con la aproximación de 1^{m}; pero para alcanzar la misma precisión en el plano, aun suponiendo su construcción perfecta, es indispensable que r no exceda de 10000, puesto que se ha señalado $0^{\mathrm{m}}.0001$ por límite de apreciación de las líneas, y de esta consideración parece deducirse que para obtener una superficie por los métodos gráficos con una aproximación comparable á la de los analíticos, en los cuales sólo se hace uso de los datos obtenidos en el terreno, es preciso que el plano se haya construído en una escala mayor que $\frac{1}{10000}$ y con la más escrupulosa exactitud.

Si en la última ecuación se elimina á r^3 en función de S, obtendremos:

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{S} = \frac{1}{10000}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

fórmula que manifiesta que, en igualdad de circunstancias, conviene que las líneas medidas sean grandes, lo que equivale á establecer la regla de que las figuras elementales en que se descomponen los polígonos, deben ser de las mayores dimensiones que se pueda. Admitiendo que las líneas m y n tengan cada una un valor medio de $0^{\mathrm{m}}.1$, hallaremos por la ecuación anterior:

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{S} = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$$

ó que el error de la superficie sería $\frac{1}{500}$ de su valor.

Considerando que en esta breve investigación he prescindido de los errores inevitables en la construcción del plano, los cuales son del mismo orden que los de la apreciación de las líneas sobre el papel, no podrá menos de convenirse en que, sea cual fuere el esmero con que se practiquen todas las operaciones gráficas, parece imposible obtener por esos métodos una superficie con un error inferior á $\frac{1}{500}$, si no es en circunstancias verdaderamente excepcionales.