Si designamos ahora por θ el ángulo $MLN = mLn$ (fig. 114ª), bajo el cual se ve la parte $MN = A$ de la mira á la distancia $k - r$ del objetivo, tendremos:

$$A = 2(k - r)\tan.\tfrac{1}{2}\theta$$

de donde despejando y haciendo $R = \frac{1}{2\tan.\frac{1}{2}\theta}$, resulta:

$$k = AR + r \qquad (6)$$

Si comparamos esta fórmula con la (2) se obtiene:

$$C = R - \frac{f}{A}$$

Según esto, si después de anotar el valor de A interceptado por los hilos, se mide directamente el ángulo θ leyendo las graduaciones del círculo vertical cuando el hilo central de la retícula se pone en coincidencia con los dos extremos de A, podrá calcularse el valor de R, y por consiguiente el de C, sin necesidad de conocer la distancia del estadal. La medida del ángulo θ podrá repetirse procediendo como se ha explicado al indicar el modo de medir el ángulo de los hilos, y en cuanto á f, que entra en el valor de C, podrá adoptarse una cantidad aproximativa, tal como la que resulta de medir sobre el tubo del telescopio la distancia del objetivo á la retícula.

Este método para determinar la constante C, me parece sin embargo más laborioso, y susceptible, en general, de menos precisión que los anteriores, en razón de que la medida de θ es más dilatada y difícil que la de k. Supongamos que en la primera de las observaciones antes citadas se hubiera hallado por la medida directa $\theta = 31'15''$, siendo $f = 0^m.22$ y $A = 2^m.28$. Tendríamos:

2	0.30103		
tan. $\frac{1}{2}\theta$	7.65751		
	7.95854		
Compl.	2.04146	R	$= 110.02$
		$\frac{f}{A}$	$= -0.09$
		C	$= 109.93$

En lugar de proceder así, no creo que en la práctica haya inconveniente en aplicar directamente á la fórmula (6) para determinar R y r, los mismos métodos que se han mencionado antes para determinar C y c, puesto que las ecuaciones (2) y (6) son de la misma forma. En todo rigor, sin embargo, el valor de R no debe considerarse constante más que cuando la distancia de la mira es de alguna importancia, puesto que en tal caso A es grande y puede suponerse sensiblemente nula la fracción $\frac{f}{A}$. Entonces R podrá también suponerse igual á C, y como en esas circunstancias el ángulo θ es el de los hilos, que es siempre pequeño, no hay inconveniente en sustituir tan. θ en lugar de 2 tan. $\frac{1}{2}\theta$, con lo que se tiene:

$$C = \cot.\theta$$

Siguiendo el método que se ha explicado para usar el círculo vertical, hallé después de diez repeticiones para medir el ángulo de los hilos de mi teodolito, el resultado: $10\theta = 5°12'$, del que se deduce $\theta = 31'12''$. Con este dato tendremos:

$$\text{Log. cot.}\,\theta = 2.04211 \;\ldots\ldots\ldots\; \cot.\theta = R = 110.18$$

y atendiendo á que $r = 0^m.14$, la fórmula (6) será:

$$k = 110.2\,A + 0^m1$$

Si por el contrario, se adopta la ecuación (2) con los valores de C y c que se han hallado se tiene:

$$k = 110\,A + 0^m4$$

Esta última es la que me ha servido para calcular la distancia correspondiente á cualquier valor observado de A.

160. Aunque la aplicación de la fórmula es muy sencilla, conviene reducirla á tabla luego que se hayan obtenido los valores de las constantes, porque de esa manera se abrevian mucho las operaciones. Para no tener necesidad de formar una tabla demasiado larga, lo que he hecho es suponer que el dato A se compone de varias partes, como decímetros, centímetros y milímetros, y entonces he calculado la ecuación sólo para cada decímetro, considerando como correccio-

nes del primer resultado las variaciones debidas á las fracciones más pequeñas. Supongamos, en efecto, que $A = p + q$, y que la distancia que se busca se compone de $P + Q$. Entonces se tendrá:

$$k = P + Q = C(p + q) + c$$

y poniendo $P = Cp + c$, se obtiene:

$$k = P + Cq$$

quiere decir, que calculada la fórmula para ciertos valores de p, y los productos Cq, una simple adición dará la distancia que corresponde á A. Pondré como ejemplo algunas líneas de la tabla calculada para mi teodolito con $C = 110$ y $c = 0^m.4$.

A	k	ΔA	Δk	ΔA	Δk
0^m1	11^m4	0^m01	1^m1	0^m001	0^m1
0. 2	22. 4	0. 02	2. 2	0. 002	0. 2
0. 3	33. 4	0. 03	3. 3	0. 003	0. 3
0. 4	44. 4	0. 04	4. 4	0. 004	0. 4
0. 5	55. 4	0. 05	5. 5	0. 005	0. 5
0. 6	66. 4	0. 06	6. 6	0. 006	0. 7
0. 7	77. 4	0. 07	7. 7	0. 007	0. 8
0. 8	88. 4	0. 08	8. 8	0. 008	0. 9
0. 9	99. 4	0. 09	9. 9	0. 009	1. 0
1. 0	110. 4	0. 10	11. 0	0. 010	1. 1
1. 1	121. 4				
....	....				
....	....				
....	....				
2. 7	297. 4				
2. 8	308. 4				
2. 9	319. 4				
3. 0	330. 4				

La característica Δ antepuesta á A y á k indica la variación ó corrección de la cantidad correspondiente; son las que antes designé por q y Q.

Para aplicar la tabla, supongamos que la observación hubiera dado $A = 2^m.867$.

Por 2^m8	....	308^m4
„ 0. 06	....	6. 6
„ 0. 007	....	0. 8
Por 2^m867	.... k =	315^m8

que es el resultado que se hallaría por el cálculo directo de la fórmula $110\,A + 0^m.4$.

161. He supuesto hasta ahora que es horizontal el eje del telescopio, y por consiguiente perpendicular á la dirección de la mira, la cual se coloca siempre en una posición vertical; pero cuando el terreno es inclinado debe hacerse una corrección para reducir al horizonte la distancia obtenida por medio de la fórmula, ó de la tabla calculada con ella. Si $PQ = k'$ (fig. 115ª) es la superficie del terreno, que forma con el horizonte el ángulo $PQR = i$, resulta que la parte de la mira vertical interceptada por los hilos es: $MN = A$; y que, por tanto, el cálculo de la fórmula con ese elemento dará una distancia K mayor que k', esto es:

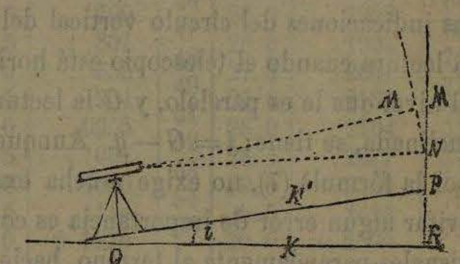

Fig.ª 115ª

$$K = A\,C + c$$

Si se colocara la mira perpendicular al terreno, en lugar de MN se anotaría $M'N = A \cos. i$, y la distancia calculada sería PQ, ó bien:

$$k' = A\,C \cos. i + c$$

Restando esta ecuación de la anterior y sustituyendo K en lugar del producto $A\,C$, por ser sensiblemente iguales, se obtiene:

$$k' = K \cos. i$$

Si se designa ahora por k la distancia horizontal QR del telescopio á la mira, el triángulo PQR da:

$$k = k' \cos. i$$

y eliminando á k' entre estas dos últimas ecuaciones, resulta:

$$k = K \cos.^2 i$$

ó tomando la diferencia entre K y k se obtiene:

$$K - k = K \operatorname{sen.}^2 i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Este resultado manifiesta que para hallar la distancia horizontal, debe restarse de la cantidad que da la fórmula el producto de esa cantidad por el cuadrado del seno del ángulo de inclinación.

El valor de i se obtiene inmediatamente sobre el terreno anotando las indicaciones del círculo vertical del instrumento; porque si es g la lectura cuando el telescopio está horizontal, lo cual se conoce por el nivel que le es paralelo, y G la lectura correspondiente á la visual inclinada, se tiene: $i = G - g$. Aunque la pequeña corrección dada por la fórmula (7), no exige mucha exactitud en el ángulo i, para evitar algún error de importancia es conveniente dirigir siempre las visuales paralelamente al terreno, haciendo de manera que el centro del campo del telescopio coincida con un punto de la mira cuya altura respecto de su pie sea igual, con corta diferencia, á la del telescopio. Suponiendo que esta es de $1^m.5$ en término medio, se tendrá cuidado de que en el centro del campo quede la división $1^m.5$ del estadal, y entonces la indicación G, comparada con g, que corresponde á la horizontalidad del anteojo, dará con suficiente exactitud el ángulo de inclinación, el cual ya sea de ascenso ó de descenso, producirá siempre el efecto de disminuir la distancia que resulta del cálculo.

Haciendo $K = 1^m$, la ecuación (7) se reduce á tabla para diversos valores de i, y tomando de ella la corrección correspondiente á cada inclinación por la unidad de distancia, basta multiplicarla por cualquier valor de K para obtener la corrección que se busca. He calculado la tabla siguiente para cada medio grado de inclinación:

TABLA PARA REDUCIR AL HORIZONTE LAS DISTANCIAS MEDIDAS CON LA ESTADIA.

i	$K-k$	Dif.	i	$K-k$	Dif.	i	$K-k$	Dif.
0°0	0m0000	1	10°0	0m0301	29	20°0	0m1170	56
0.5	. 1	2	10.5	. 332	32	20.5	.1226	58
1.0	. 3	4	11.0	. 364	33	21.0	.1284	59
1.5	. 7	5	11.5	. 397	35	21.5	.1343	60
2.0	. 12	7	12.0	. 432	36	22.0	.1403	61
2.5	. 19	8	12.5	. 468	38	22.5	.1464	63
3.0	. 27	10	13.0	. 506	39	23.0	.1527	63
3.5	. 37	12	13.5	. 545	40	23.5	.1590	64
4.0	. 49	13	14.0	. 585	42	24.0	.1654	66
4.5	. 62	14	14.5	. 627	43	24.5	.1720	66
5.0	0.0076	16	15.0	0.0670	44	25.0	0.1786	67
5.5	. 92	17	15.5	. 714	46	25.5	.1853	69
6.0	. 109	19	16.0	. 760	47	26.0	.1922	69
6.5	. 128	20	16.5	. 807	48	26.5	.1991	70
7.0	. 148	22	17.0	. 855	49	27.0	.2061	71
7.5	. 170	23	17.5	. 904	51	27.5	.2132	72
8.0	. 193	25	18.0	.0955	52	28.0	.2204	73
8.5	. 218	27	18.5	.1007	53	28.5	.2277	73
9.0	. 245	27	19.0	.1060	54	29.0	.2350	75
9.5	. 272	29	19.5	.1114	56	29.5	.2425	75
10.0	0.0301		20.0	0.1170		30.0	0.2500	

Para aplicarla supongamos que i es de 13° 10′, y que siendo las constantes $C = 110$, $c = 0^m.4$, se halló $A = 1^m.682$. La fórmula (2) ó la tabla de sus valores darán: $K = 185^m.4$, y como la corrección por la unidad de distancia es 0.0519, tendremos:

$$\begin{aligned} K - k = 185.4 \times 0.0519 &= \;\; 9^m 6 \\ K &= 185.4 \\ \hline k &= 175^m 8 \end{aligned}$$

Cuando el ángulo de inclinación no excede de 2° ó 3°, puede omitirse la corrección, sin que de esto resulte error de importancia en la práctica.

162. El modo de disponer las divisiones del estadal no es indife-

rente para conseguir que las lecturas se hagan con rapidez y exactitud. La disposición que he hallado más ventajosa es la representada en la figura 116ª El estadal, de unos 10 ó 12 centímetros de anchura, está dividido longitudinalmente en tres partes, de las cuales la primera contiene los decímetros pintados alternativamente de rojo y de blanco que son los colores que se distinguen mejor desde lejos. Las otras dos partes están divididas en centímetros, pintados de los mismos colores, y dispuestos en grupos alternados de cinco centímetros cada uno. La numeración, invertida para que en el telescopio se vea en su posición natural, se refiere á los decímetros, y para indicar los metros se ponen uno, dos, etc., puntos gruesos sobre los números. De esta manera, aunque en el campo del anteojo sólo se presente una parte pequeña de la mira, no podrá haber equivocación, pues como se ve en la figura, los decímetros del primer metro no tienen punto, los del segundo tienen uno, los del tercero dos, y así sucesivamente. Para leer, por ejemplo, las indicaciones representadas en la figura, en la cual se ha supuesto que los hilos del telescopio se ven sobre el estadal en ab y cd, tendremos que la primera lectura será $1^m.225$, y la del hilo cd, $1^m.792$. No habrá, pues, que contar más que los centímetros de exceso respecto del último decímetro numerado, y estimar á la vista la fracción de un centímetro, el que á distancias moderadas, se divide muy bien en décimas partes, ó milímetros, por apreciación.

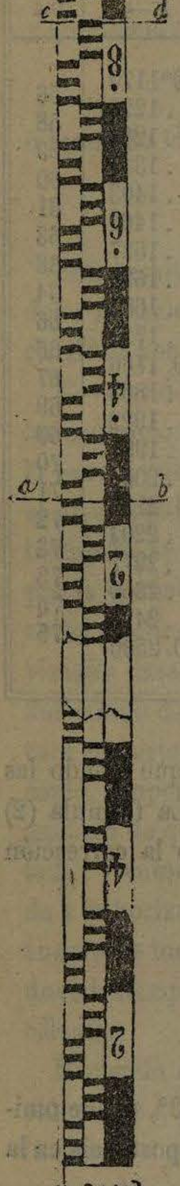

Fig.ª 116.ª

Para no tener necesidad de apreciar las fracciones de centímetro con cada uno de los hilos, es mejor poner uno de ellos en coincidencia con una de las divisiones que señalan decímetros enteros, y siempre que sea posible, conviene establecer la coincidencia en la división $1^m.0$, que está indicada por un círculo rojo

sobre el fondo blanco del estadal. Esto puede hacerse siempre que, para conseguirlo, no sea preciso inclinar demasiado el telescopio, cuyo eje óptico, según dije antes, debe dirigirse á un punto de la mira que tenga próximamente la misma altura que el instrumento. Es claro que en tal caso la indicación del otro hilo, menos 1^m, será el valor de A que entra en la fórmula. En general, ese dato resulta de la diferencia de las indicaciones de los dos hilos.

Es claro que la seguridad con que se obtiene una distancia por medio de la estadia, depende de la exactitud que se tenga en el valor de A, y ésta varía con el poder del telescopio, la vista del observador, el estado de la atmósfera, la finura de los hilos, etc. Cada ingeniero, en este particular, debe guiarse por las indicaciones de su propia experiencia respecto de la extensión con que podrá usar un instrumento dado; extensión que por otra parte depende también de la mayor ó menor precisión que merezcan las medidas según la importancia de los detalles á que se refieren. Creo, sin embargo, que un telescopio de $0^m.30$ á $0^m.35$ de distancia focal, puede emplearse con muy buen éxito para distancias hasta de 400 á 500 metros; el que yo he usado tiene sólo $0^m.22$, y con él he podido medir muy bien líneas de 300 metros. Hasta 250^m, me era posible contar los centímetros, aunque sin apreciar sus fracciones, las que sólo estimaba con alguna seguridad cuando la distancia no excedía de 200^m. A más de 300^m, comenzaba á haber duda en la apreciación exacta de los centímetros enteros; y como la constante C era de 110, es evidente que el error de $0^m.01$ hubiera ocasionado otro de $1^m.1$ en la distancia. En ese caso me parece preferible valerse sólo de las divisiones de decímetros, que fácilmente se subdividen en diez partes por estimación. Un error de $\frac{1}{300}$ de las líneas, es sin embargo, perfectamente admisible, pues hay muchos casos en que la cadena común los produce por lo menos iguales, aun en terrenos horizontales y desprovistos de obstáculos. y es indudable que en los montañosos el uso de la estadia suministra resultados de mayor precisión.

Es preciso tener cuidado de que la mira se coloque siempre vertical; algunas veces está provista al efecto de una plomada, y el ayudante ó el criado que la tiene mientras se hace la observación, cuida de que su hilo se conserve en coincidencia con el borde lateral de la regla. Por otra parte, el observador puede juzgar de la verticalidad de la mira por medio del hilo vertical de la retícula, en cuya proximidad debe hacer las lecturas. Los estadales de más de 3^m están divididos por comodidad en dos partes unidas con una charnela, de modo que para transportarlos se doblan reduciéndose á la mitad de su longitud.

163. La teoría que he presentado de la estadia basta en mi concepto para todas las necesidades de la práctica, y me condujo á una fórmula sencilla, habiendo tomado por punto de partida los principios fundamentales de la óptica. Sin embargo, estando ya este Capítulo en la prensa, ha llegado á mis manos un escrito del geómetra belga Mr. Liagre, relativo al mismo asunto, y como en cierta manera sus conclusiones difieren algo de las mías, juzgo conveniente consignarlas aquí ya para presentar al lector otra manera de calcular las distancias con la estadia, ya por una desconfianza demasiado natural de mis propias ideas al desarrollar una teoría hasta cierto punto nueva, puesto que la fórmula admitida era la (1), que como se recordará, sólo se deriva de la comparación de dos triángulos semejantes, y cuyos defectos tuve ocasión de indicar.

Mr. Liagre, por la misma comparación, halla la fórmula (1), á saber:

$$\Delta = A\,\frac{F}{a}$$

que da la distancia de la mira al objetivo. En seguida, considerando que, con excepción de a, todas las demás cantidades son variables, supone que se haga una experiencia llamada *reguladora.* Midiendo con el mayor cuidado posible una distancia Δ' así como el valor A' y la longitud focal F' correspondiente á Δ' se tiene:

$$\Delta' = A'\,\frac{F'}{a}$$

y eliminando á a entre ambas ecuaciones resulta:

$$\Delta = \frac{A\,F}{A'\,F'}\,\Delta'$$

Si se supusieran constantes las distancias focales relativas á los dos casos, la última ecuación daría:

$$\Delta'' = \frac{A}{A'}\,\Delta'$$

que Mr. Liagre considera como un valor aproximativo de la distancia Δ, y para determinar su corrección halla por diferencia respecto de la ecuación que da el valor exacto:

$$\Delta = \Delta'' + \Delta''\left(\frac{F-F'}{F'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Se ve, pues, que la operación se reduce á calcular primero la distancia aproximativa por medio de la relación $\frac{F'}{a}$ correspondiente á la experiencia reguladora, y á añadirle después el producto de esa misma distancia por la relación que existe entre la diferencia de las longitudes focales y la que corresponde á la experiencia reguladora. La regla equivale también á multiplicar el valor aproximativo por la relación $\frac{F}{F'}$.

Aunque la ecuación (8) da la distancia del estadal al objetivo, es evidente que por la adición final de r, se obtiene hasta el centro del instrumento.

La fórmula del escritor belga supone la necesidad de medir en cada observación el valor correspondiente de F; pero puesto que sólo se necesita la diferencia $F-F'$, bastará, en mi concepto, señalar en el tubo del telescopio el punto hasta donde fué necesario sacar el ocular, ó el objetivo en su caso, al hacer la observación reguladora, y después medir la pequeña distancia de ese punto al del mismo tubo que marca el lugar hasta donde se saca el ocular ó el objetivo en cada caso particular. La medida, que puede hacerse con una escala de milímetros, da el valor sensiblemente exacto de $F-F'$.

Creo que la fórmula de Mr. Liagre es susceptible de una modificación de alguna importancia práctica, puesto que evita la medida de la diferencia de distancias focales. En efecto, siendo la fórmula equivalente á esta otra:

$$\Delta = \Delta''\,\frac{F}{F'}$$

podrá determinarse la relación $\frac{F}{F'}$ en función de las distancias reguladora y aproximativa, ó bien en función de las lecturas correspondientes de la mira. En el número 158 consta la expresión de F, que aplicada á la distancias Δ y Δ', dará la relación:

$$\frac{F}{F'} = \frac{\Delta(\Delta'-f)}{\Delta'(\Delta-f)}$$

y sustituída en la ecuación anterior produce:

$$\Delta = \Delta'' + \frac{f}{\Delta'}(\Delta' - \Delta'') \text{ .... } (9)$$

Esta fórmula tiene respecto de la (8) la ventaja de que una vez medida la longitud focal estelaria f, su relación con la distancia reguladora es constante. Teniendo ahora presente que $\Delta' = \frac{A' F'}{a}$ y $\Delta'' = \frac{A F'}{a}$, se obtiene por la sustitución:

$$\Delta = \Delta'' + \frac{f}{A'}(A' - A) \text{ .... } (10)$$

que también contiene el factor constante $\frac{f}{\Delta'}$, y consta sólo de elementos conocidos de antemano ó suministrados por la observación misma.

164. Mi fórmula (2) me parece, sin embargo, preferible á la de Mr. Liagre, no sólo porque puede reducirse á tabla con más facilidad, sino porque su mismo cálculo directo es más sencillo, conteniendo dos constantes, que una vez determinadas, permiten su aplicación para todas las distancias sin corrección especial en cada caso; aunque deducida de la teoría analítica de los lentes, puede obtenerse por consideraciones puramente geométricas, tomando sólo en cuenta la propiedad característica de los focos principales, cual es la de reunir los rayos luminosos que caen paralelos sobre el lente. En efecto, si en la figura 117ª suponemos que O y O' son los focos principales, del objetivo L, sus distancias á este lente serán iguales

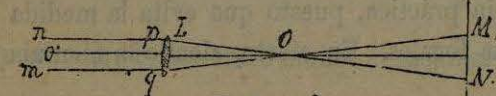

Fig.ª 117ª

á la cantidad que he designado por f. En consecuencia, los rayos luminosos que parten de los hilos m y n paralelamente al eje del objetivo, refractados por éste, irán á converger siempre en el punto O, sea cual fuere la distancia de la retícula al lente, y cruzándose en O, determinarán los puntos M y N de la mira que se ven en coincidencia con los hilos. De aquí se deduce que siendo constante la distancia a de los hilos, lo es también el ángulo $M\,O\,N = p\,O\,q$ bajo el cual se ven, desde O, la parte A del estadal y los hilos. Además, como la distancia de este punto al objetivo es f, su distancia á la mira es $\Delta - f$, y los triángulos semejantes darán:

$$\Delta - f = A\frac{f}{a}$$

ó bien:

$$k = A\frac{f}{a} + c$$

puesto que $k = \Delta + r$, y también $c = f + r$.

Aunque antes he llamado θ el ángulo bajo el cual se ve desde el objetivo la parte $M\,N$, conservemos la misma denominación para designar al ángulo constante $M\,O\,N$ de los hilos, y tendremos en ese triángulo:

$$A = 2\cdot(\Delta - f)\tan.\tfrac{1}{2}\theta$$

de donde resulta:

$$k = \frac{A}{2\tan.\frac{1}{2}\theta} + c$$

ó bien:

$$C = \frac{f}{a} = \frac{1}{2\tan.\frac{1}{2}\theta} = \cot.\theta$$

Se ve, pues, que Mr. Liagre considerando el cruzamiento en el centro óptico del objetivo, ha tenido que tomar en cuenta la variación del ángulo visual con las diversas distancias de la retícula, mientras que en mi modo de considerar la cuestión es invariable aquel ángulo.

165. Otro telémetro que difiere muy poco del que he descrito, es