Adoptando el método que llamamos de *radiación*, se consigue la ventaja de no tener que mover la plancheta. Su aplicación á este método está representada en la figura 112ª, en la cual se ve que después de trazadas las visuales dirigidas á los vértices desde el punto *o* que representa el de estación, se toman en ellas partes proporcionales á las distancias medidas.

156. La figura 113ª representa el modo de emplear la plancheta siguiendo el método de intersecciones. Por ella se comprende que toda la operación consiste en trazar líneas en las direcciones de las visuales desde las extremidades de la directriz, cuya longitud se toma en el papel con arreglo á la escala.

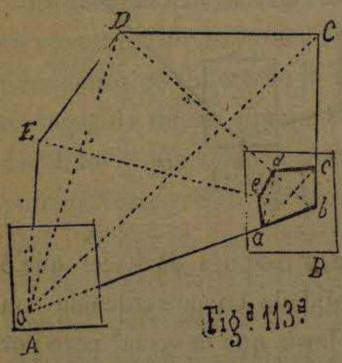
Fig.ª 113ª

Estas cortas explicaciones son bastantes para comprender que la plancheta es un instrumento que permite trabajar con mucha rapidez, ejecutándose á la vez las operaciones de campo y las de gabinete, y no demandando más cálculo que el sencillísimo de la reducción de las distancias á la escala del plano; pero que en cambio debe dar lugar á todos los defectos inherentes á las operaciones gráficas, aumentados en proporción de las dificultades locales, y de la imposibilidad de hacer en el terreno una construcción con el mismo grado de exactitud con que puede practicarse en el gabinete, por medio de instrumentos de mayor precisión. Por eso la plancheta sólo puede emplearse con regular éxito para levantar planos de corta extensión, cuando los polígonos tienen pocos lados.

A veces se suple la alidada con dos agujas, una de las cuales se clava en el punto que representa la estación, y la otra en la dirección de cualquiera de las visuales. Las líneas se trazan entonces con una regla común puesta en coincidencia con ambas agujas.

CAPITULO XVI.

DE LOS TELÉMETROS.

157. Bajo la denominación general de *telémetros*, comprenderé todos los instrumentos que sirven para medir distancias, sin necesidad de la aplicación material de una unidad de longitud sobre el terreno.

El telémetro que se conoce generalmente con el nombre de *estadia*, resulta del uso combinado de un telescopio cualquiera, como el del teodolito, el de la brújula, etc., y de una regla de tres á cuatro metros de longitud, dividida en centímetros, que se llama *mira* ó *estadal*. En el foco del anteojo se colocan dos hilos paralelos cuyo objeto es ver el número de centímetros del estadal interceptados entre ellos, y con este dato venir en conocimiento de la distancia del estadal al punto en que está el telescopio.

Sea $O\,L$ (fig. 114ª) el anteojo cuya retícula tiene dos hilos horizontales que pasan uno por m y el otro por n, de modo que el espacio $m\,n$, que designaré por a, es constante. Si en R se coloca verticalmente la mira dividida en

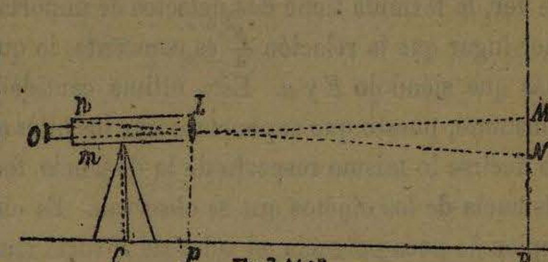
Fig.ª 114ª

centímetros, una parte de ella, $MN = A$, se verá al través del ocular O, ocupando el espacio comprendido entre los hilos, puesto que los rayos visuales que parten de M y N, cruzándose en el *centro óptico* del objetivo L, van á pintarse en m y n. De aquí se deduce que si designamos por F la distancia focal, ó sea la del objetivo á los hilos, y por Δ la distancia del estadal al mismo objetivo, los triángulos semejantes MNL y mnL, dan la proporción: $a:A::F:\Delta$, de donde resulta:

$$\Delta = \frac{AF}{a} \quad \text{.............................} \quad (1)$$

Si, pues, se miden las dos cantidades F y a, la ecuación anterior servirá para hallar la distancia correspondiente á cualquier valor observado de A. Es bastante difícil la medida exacta de F y a; pero como lo que importa conocer, no es el valor absoluto de esas cantidades, sino solamente el de su relación, es preferible determinarla midiendo una distancia Δ' del objetivo á la mira, y también la parte A' de esta que se ve interceptada por los hilos. Con estos datos se obtendrá la relación que se busca, pues la fórmula anterior da:

$$\frac{F}{a} = \frac{\Delta'}{A'}$$

que será el valor que se use para todas las observaciones subsecuentes.

Tal es la manera de usar comunmente la estadia; pero á mi modo de ver, la fórmula tiene dos defectos de importancia. Supone en primer lugar que la relación $\frac{F}{a}$ es constante, lo que no podría suceder más que siéndolo F y a. Esta última cantidad es indudablemente constante, puesto que suponemos que los hilos son fijos; pero no puede decirse lo mismo respecto de la distancia focal, que varía con la distancia de los objetos que se observan. Es cierto que en los telescopios de poca potencia, el valor de F varía muy poco cuando la distancia de los objetos es superior á 50 ó 60 metros; pero también se comprende que siendo siempre el espacio a muy pequeño respecto de F, las variaciones de la distancia focal, por leves que se supongan,

tienen mucha influencia en el valor de la relación $\frac{F}{a}$. Además de este defecto, la fórmula tiene el de dar las distancias del estadal al objetivo; mientras que las que se buscan generalmente son las contadas hasta el centro de la estación.

Con el fin de evitar ambos inconvenientes, he procurado desarrollar otra fórmula, derivándola de una teoría más estricta.

158. La relación que existe entre la distancia focal F de un lente bi-convexo, correspondiente á una distancia Δ del objeto que se observa al mismo lente, es: [1]

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Delta}$$

fórmula en la cual f representa el valor que adquiere F cuando la distancia Δ es infinita. La cantidad f que se designa generalmente con el nombre de distancia focal *principal* ó *estelaria*, es constante para cada lente, y marca la posición del foco cuando se observa un objeto situado á una distancia realmente infinita como las estrellas, ó que al menos por su magnitud considerable pueda suponerse infinita.

De esta fórmula se obtiene:

$$F = \frac{\Delta f}{\Delta - f}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (1), resulta:

$$\Delta = \frac{A \Delta f}{a(\Delta - f)}$$

ó bien:

$$\Delta - f = \frac{A f}{a}$$

En la figura 114ª llamando k la distancia CR del centro del ins-

(1) Véase cualquier tratado de Optica.

trumento al estadal, y r la pequeña distancia CP, se tiene: $k = \Delta + r$. Eliminando á Δ entre esta y la ecuación anterior, obtendremos:

$$k = A \frac{f}{a} + (f + r)$$

Como f y a son constantes, lo será su relación que designaré por C, y entonces:

$$k = A\,C + (f + r)$$

Para arreglar el foco de un telescopio á fin de distinguir con claridad la imagen de un objeto cercano, se sabe que es preciso aumentar la distancia del objetivo á la retícula por medio del tornillo destinado al efecto; pero esa separación puede hacerse de dos maneras: ó alejando el objetivo como sucede generalmente en los teodolitos ingleses y americanos, ó por el contrario, alejando la retícula como en los instrumentos de construcción francesa y alemana. En este último caso, puesto que el objetivo permanece inmóvil, es constante la cantidad r, que representa la pequeña distancia del centro del instrumento al objetivo; mientras que en el caso de los instrumentos cuyo foco se arregla moviendo ese lente, el valor de r es ligeramente variable. Esto no obstante, como sus mayores variaciones no exceden de unos cuántos centímetros, y son sensiblemente nulas desde que k llega á un valor de 50 ó 60 metros, no hay inconveniente en suponer que en todos casos es r constante; porque tal hipótesis no produciría error más que cuando k fuese muy pequeña, lo que sucede pocas veces en la práctica, y aun entonces, todo el error de la distancia obtenida se reduciría á los $0^{m}.02$ ó $0^{m}.03$ que aumenta r. Haciendo, pues, $f + r = c$, la fórmula definitiva será:

$$k = A\,C + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

159. Tracemos ahora los diversos métodos que pueden seguirse para determinar las constantes C y c que corresponden á un instrumento dado. Desde luego ocurre el de medir directamente el espacio a comprendido entre los hilos, la distancia focal principal f y la pequeña distancia r. La primera de estas cantidades que generalmente no excede de $0^{m}002$, podría obtenerse con la aproximación de un

décimo de milímetro, valiéndose de una regla dividida en milímetros. La segunda también podría medirse con la aproximación de uno ó dos centímetros, desatornillando el lente objetivo y recibiendo sobre una hoja de papel la imagen del sol formada por la convergencia de los rayos que atraviesan el lente; debe acercarse ó alejarse el papel hasta que la imagen tenga la mayor intensidad, y entonces su distancia al lente es el valor de f. También podría hallarse el valor aproximativo de esta cantidad, midiendo sobre el telescopio la distancia del objetivo á los tornillos de la retícula, después de haber arreglado el foco para que se distinga con claridad un objeto muy distante. En cuanto al valor de r, se obtiene con la misma aproximación por medio de dos pequeñas plomadas, suspendida la una en el centro del tripié, y la otra en el anillo que sostiene el objetivo, colocando de antemano horizontal el anteojo. Es evidente, en efecto, que la distancia $CP = r$ es la determinada por las plomadas.

He dicho, sin embargo, que este procedimiento nunca puede dar con exactitud el valor de la relación $C = \frac{f}{a}$, por ser a y f cantidades tan desiguales en magnitud, que un ligero error en ellas influye mucho en el valor de C. Indiquemos otros procedimientos que suministren directamente esa relación.

Primer método. Si se miden perfectamente dos distancias contadas desde el centro del instrumento, y en el término de ellas se pone el estadal y se anotan los valores correspondientes de A (número de metros y fracciones interceptadas por los hilos), se tendrán las dos ecuaciones:

$$k_1 = A_1\,C + c$$
$$k_2 = A_2\,C + c$$

que combinadas por adición y substracción dan:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{k_1 - k_2}{A_1 - A_2} \\ c &= \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) - \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2)\,C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Presentaré como ejemplo las observaciones que hice con un teodolito en cuya retícula puse dos hilos horizontales á distancia de $0^m.002$ uno de otro, con el objeto de que me sirviera también como telémetro. En una misma dirección medí espacios de 5 cadenas, y sin mover el instrumento, observé las partes de la mira que interceptaban los hilos, colocando el estadal sucesivamente en el término de cada uno de esos espacios. Como la cadena tenía algo más de un decámetro, se corrigieron las distancias tanto por esa causa como por el grueso de las fichas.

k	A
250^m98	2^m280
200. 79	1. 820
150. 59	1. 356
100. 39	0. 911
50. 20	0. 455

Habiendo más observaciones de las necesarias, combinemos la primera con la última:

$$k_1 = 250^m98 \qquad A_1 = 2^m280$$
$$k_2 = 50.20 \qquad A_2 = 0.455$$
$$k_1 - k_2 = 200.78 \qquad A_1 - A_2 = 1.825$$
$$k_1 + k_2 = 301.18 \qquad A_1 + A_2 = 2.735$$

$$C = \frac{200.78}{1.825} = 110.02$$

$$c = 150.59 - 1.367 \times 110.02 = + 0^m19$$

De igual manera pueden hacerse otras muchas combinaciones, el promedio de cuyos resultados dará el valor más plausible de las constantes.

Segundo método. El valor de c es siempre pequeño, pues se recordará que representa la suma de f y r. Por esa razón es difícil obtener con exactitud esa constante por el procedimiento anterior en atención á que pequeños errores que existan en las distancias, en los valores de A ó en el de C, bastan para producir uno en c tan grande ó acaso mayor que su valor mismo, y es mejor proceder de esta manera: puesto que los puntos en que se estableció la mira son equidistantes entre sí, restemos uno de otro los valores de A, y su promedio puede tomarse por la indicación del estadal correspondiente á la equidistancia. Este nuevo método puede expresarse algebraicamente así: siendo q la equidistancia de los puntos observados, se tienen las ecuaciones:

$$q = A_1\, C + c$$
$$2q = A_2\, C + c$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n\,q = A_n\, C + c$$

Restando cada una de la que la sigue, se obtendrán $n - 1$ ecuaciones de la forma:

$$q = (A_2 - A_1)\, C \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

de cuyo promedio se saca el valor de C. Sumando las primeras tendremos:

$$\frac{(1+n)\,n\,q}{2} = (A_1 + A_2 + \dots\dots\, A_n)\, C + n\,c$$

de donde se deduce:

$$c = \tfrac{1}{2}(n+1)\,q - \frac{A_1 + A_2 + \dots\dots A_n}{n}\, C \dots\dots \quad (5)$$

Si en la serie anterior de observaciones se hacen las restas de los valores sucesivos de A, se tendrán los siguientes resultados:

	0^m460
	0. 464
	0. 445
	0. 456
Promedio =	0^m456

Como la equidistancia de los puntos observados es $q = 50^m.20$, tendremos:

$$C = \frac{50.2}{0.456} = 110.09$$

Para calcular la otra constante por la ecuación (5), se tiene $n=5$, y el promedio de las A igual á $1^{m}.364$, por lo cual:

$$c = 150^{m}.6 - 1^{m}364 \times 110^{m}09 = +\,0^{m}.44$$

Este método tiene la ventaja de utilizar todas las observaciones, de suerte que por la compensación de pequeños errores fortuitos, es de esperar que el valor de c se obtenga con bastante exactitud.

Tercer método. Midiendo la distancia a de los hilos con cuanta precisión se pueda, y hallado el valor de C por cualquiera de los métodos precedentes, podremos determinar un valor de f bastante aproximado, por la ecuación $f = Ca$. Si en seguida se mide el espacio r por medio de dos plomadas como se dijo antes, conoceremos también el valor aproximativo de $c = f + r$, y entonces podrá determinarse el nuevo valor de C por las ecuaciones primitivas, á saber: $C = \frac{k-c}{A}$.

En mi teodolito a era de $0^{m}.002$, y tomando $C = 110$, se tendrá: $f = 0^{m}.22$. Hallé además $r = 0^{m}.14$, por lo cual resulta: $c = 0^{m}.36$. Con este valor las observaciones dan:

$k-c$	A	C
$250^{m}62$	$2^{m}280$	$109^{m}92$
200. 43	1. 820	110. 13
150. 23	1. 356	110. 79
100. 03	0. 911	109. 80
49. 84	0. 455	109. 54
	Promedio	$C =$ 110. 04

Creo que este procedimiento es preferible á los anteriores, porque siempre pueden medirse f y r con una aproximación de 1 á 2 centímetros, que es cuanto basta, y porque todas las observaciones concurren á determinar el valor de C, que es el más importante por su mayor influencia en la expresión (2) que da las distancias.

Si, como en el caso que consideramos, se han hecho más observaciones que las dos estrictamente necesarias para determinar las constantes, es conveniente combinarlas de una manera sistemática á fin de que todas ellas concurran á esa determinación. A este efecto no-

temos en general, que si se tiene un número n de cantidades desiguales $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$, puede hacerse con ellas un número N de substracciones diversas, con abstracción de signos, representado por la fórmula:

$$N = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$$

En efecto, restando la primera cantidad a_1 de la segunda a_2, ésta de la tercera a_3, y así sucesivamente, se obtienen $n-1$ substracciones. Restando después la primera de la tercera, la segunda de la cuarta, la tercera de la quinta, etc., se obtienen otras $n-2$ substracciones. Prosiguiendo así, el número de substracciones irá disminuyendo hasta llegar á ser 1, cuando la primera cantidad se reste de la última. Así pues, los números $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... $n-(n-1)$ forman una progresión aritmética, siendo $n-1$ su número de términos, y su suma, que es la que se busca, será el valor precedente de N, que hemos tabulado como sigue por diversos valores de n:

n	N	n	N	n	N	n	N
1	0	6	15	11	55	16	120
2	1	7	21	12	66	17	136
3	3	8	28	13	78	18	153
4	6	9	36	14	91	19	171
5	10	10	45	15	105	20	190

Hagamos uso de esta combinación para determinar la constante C por medio de los cinco valores de $k-c$ y los correspondientes de A que constan arriba. El número posible de restas es 10, y combinada cada una con su correspondiente, dan los siguientes valores de C:

$k-k'$	$A-A'$	C	PROMEDIOS.	
50^m19	0^m460	109^m11		
50.20	0.464	108.19		
50.20	0.445	112.81		
50.19	0.456	110.07	110^m04	110^m02
100.39	0.924	108.65		
100.40	0.909	110.45		
100.39	0.901	111.42	110.17	110.16
150.59	1.369	110.00		
150.59	1.365	110.32	110.16	110.16
200.78	1.825	110.02	110.02	110.02

Los promedios de los diversos grupos constan en la penúltima columna, y en la última los obtenidos por la combinación del medio de las $k-k'$ de cada grupo con el de las $A-A'$. Tomando el promedio de las diez determinaciones independientes, resulta $C=110.10$, lo mismo que se obtiene por los cuatro promedios de la penúltima columna; los de la última dan $C=110.09$. Puede, pues, tomarse $C=110.1$.

No está por demás hacer notar en este ejemplo que, en las determinaciones individuales, las divergencias decrecen á medida que las distancias aumentan. Así, en el primer grupo, distancia $50^m.195$, la mayor discordancia de los resultados llega á 4.62; en el segundo, distancia $100^m.393$, es sólo de 2.77; en el tercero, distancia 150^m59, no es más que de 0.32. Esto parece indicar la conveniencia de determinar la constante por observaciones hechas á distancias de 150 á 200 metros. De todas maneras este método de combinación tiene la ventaja de utilizar todas las observaciones sin arbitrariedad, y la

de dar una idea del grado de concordancia de los resultados individuales.

Cuarto método. Cuando el telescopio esté unido á un círculo que permita la medida de ángulos verticales, como se verifica en el teodolito, puede medirse el espacio angular comprendido entre los hilos, y con ese dato determinar de otra manera el valor de C. Es necesario obtener ese ángulo con bastante precisión, y como por lo regular la aproximación con que pueden leerse los ángulos en los círculos verticales de los teodolitos comunes, es sólo de 1′, debe repetirse la observación de este modo: se escoge un punto distante y muy bien determinado, que se pone en coincidencia con uno de los hilos horizontales, después de lo cual se fija el anteojo y se lee la indicación g del círculo vertical. En seguida con el tornillo de aproximación que sirve para comunicar movimientos pequeños al telescopio en un plano vertical, se establece la coincidencia del mismo objeto con el otro hilo. Es claro que de esa manera el punto de partida g se habrá trasladado á otra posición cuya distancia angular á la que ocupaba, es precisamente igual al espacio angular de los hilos; pero como la nueva lectura del nonius no daría bastante exactitud, lo que debe hacerse es volver á llevar la señal distante al primer hilo valiéndose de uno de los tornillos que sirven para nivelar, el cual de antemano se habrá colocado en la dirección de la señal. Durante este movimiento, la graduación g pasará á otro punto cuya distancia al primitivo es doble del ángulo de los hilos; luego moviendo de nuevo el telescopio hasta que la señal coincida con el otro hilo, se obtendría una lectura angular cuya diferencia con g sería ese ángulo duplo. Se continúa así cuantas veces se quiera, moviendo alternativamente todo el instrumento con el tornillo del pie, y el anteojo sólo con el tornillo destinado al efecto.

El mismo ángulo de los hilos puede obtenerse por medio del círculo horizontal, si el anteojo ó su retícula son susceptibles de girar un cuadrante, á fin de que los hilos queden verticales. En tal caso se opera como en la repetición común de un ángulo, á saber, por el movimiento alternativo de todo el instrumento, y de su parte superior.