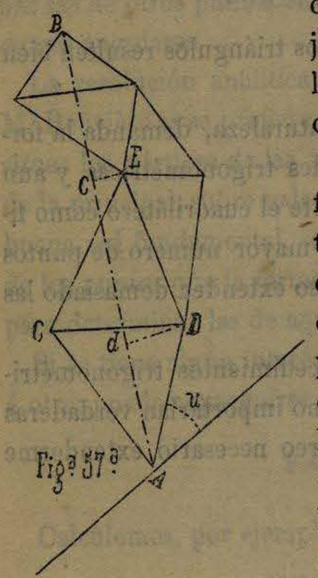
CAPITULO X.

APLICACIONES DE LA TRIANGULACIÓN.

113. Hasta aquí hemos estudiado las operaciones trigonométricas considerándolas únicamente bajo el punto de vista de trabajos preliminares, destinados á suministrar líneas y puntos de referencia para las operaciones subsecuentes del levantamiento de planos; pero como la triangulación, por sí sola, puede aplicarse á la resolución de muchos problemas de importancia práctica, juzgo oportuno dedicar algunas páginas á la exposición de sus principales aplicaciones.



Figª 57ª

Una de las que se presentan con más frecuencia consiste en la determinación y trazo de un línea extensa entre dos puntos dados; caso que ocurre en la demarcación de los linderos ó línea limítrofes entre dos propiedades contiguas, en la apertura de caminos, etc. En estos casos ú otros análogos, se conocen por lo común el punto de partida A (fig. 57ª), y el término B de la línea; pero siendo á veces muy grande la distancia de esos puntos extremos, ó no siendo visibles uno de otro aunque su distancia sea pequeña, no es posible hacer el trazo como se indicó en el número 13 al tratar de las bases. Entonces se establece entre ellos

una cadena de triángulos acercándose cuanto sea posible á la dirección de la línea que se busca. La resolución de estos triángulos suministra todos sus elementos, y si se asigna un sistema arbitrario de coordenadas á uno de los vértices, ó mejor al punto de partida, y se escoge también arbitrariamente el eje de las ordenadas de modo que forme un ángulo cualquiera u con el primer lado trigonométrico A D, se tendrán los datos necesarios para calcular las coordenadas del término B referidas al punto A considerado como origen. Sean X é Y la abscisa y la ordenada de B, ó con más generalidad, las diferencias de abscisas y ordenadas de los puntos A y B; si designamos por K la distancia incógnita $A\,B$, y por U el ángulo que forma con el eje de las ordenadas, tendremos las dos ecuaciones:

$$X = K \operatorname{sen.} U \qquad Y = K \cos. U$$

de cuya combinación deduciremos los valores de K y U, á saber:

$$\tan. U = \frac{X}{Y} \qquad K = \frac{X}{\operatorname{sen.} U} = \frac{Y}{\cos. U}$$

La primera de estas fórmulas determina la dirección y la segunda la magnitud de la línea que se quiere trazar. Es claro que para establecer la línea A B en el terreno, no es necesario tener trazado de antemano el eje de las ordenadas, pues si llamamos β el ángulo D A B que aquella forma con el primer lado, se tiene:

$$\beta = U - u$$

Para aplicar las fórmulas, supongamos que se tratase de trazar una línea del punto J al punto Y de la figura 46ª. Las coordenadas de éstos son:

$$\begin{array}{ll}
J \ldots\ldots\ x = -\ \ 8854^{m}3 \ldots\ldots\ldots & y = -\ 7270^{m}8 \\
Y \ldots\ldots\ x = +\ 17133.6 \ldots\ldots\ldots & y = -\ 8195.9 \\
\hline
X = +\ 25987^{m}9 & Y = -\ \ 920^{m}1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
X \ldots\ldots\ 4.4147712 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4.4147712 \\
Y \ldots\ldots\ 2.9661887 - & \operatorname{sen.} U \ldots\ldots\ 9.9997251 \\
\hline
\tan. U \ldots\ 1.4485825 - & K \ldots\ldots\ 4.4150461 \\
U = 92^{\circ}\,2'\,19'' & K = 26004^{m}4
\end{array}$$

En el caso presente, como tomé por ejes la meridiana magnética y su perpendicular, los ángulos u y U serán los azimutes magnéticos del primer lado y de la línea $J\,Y$ respectivamente. Así para el lado $J\,P$ se obtuvo $u = 50° \, 36' \, 30''$, por lo cual resulta: $\beta = 41° \, 25' \, 49''$, que es el ángulo que debe formarse con $J\,P$ para trazar la recta que se desea.

La demarcación material de la línea se hace con el teodolito dirigiendo una visual al punto extremo del primer lado, que es P en nuestro ejemplo, y moviendo después el telescopio en el sentido conveniente hasta que los vernieres indiquen una amplitud angular igual á β. En la nueva dirección del telescopio, y en coincidencia con la retícula, se coloca una señal que pertenecerá á la línea, si se hizo con exactitud la apreciación del ángulo; pero como la aproximación limitada del instrumento, los errores que pueda haber de excentricidad, graduación, lectura, etc., no permiten generalmente que sea así, es preciso corregir la señal, pues se comprende que por pequeña que sea su desviación, llegaría á ser muy notable al prolongar el alineamiento. Sea A (figura 58ª) el punto de partida y N' la señal que se situó, suponiendo que el ángulo $M\,A\,N'$ es igual á β. Con el teodolito se mide repetidas veces este ángulo, y si llamamos β' el resultado que se obtenga, tendremos que la corrección angular será: $\beta - \beta'$, y la señal deberá trasladarse á N en una dirección perpendicular á $A\,N'$, calculando la distancia $N\,N'$, por la fórmula: $N N' = A\,N' (\beta - \beta') \operatorname{sen.} 1''$, en la cual la pequeña variación del ángulo se supone expresada en segundos. Una vez rectificada la posición de la señal, pueden situarse otros puntos prosiguiendo el trazo como se dijo en el número 13.

Fig.ª 58ª.

También podrían establecerse puntos intermedios de la recta, bajando de los vértices trigonométricos D, E, (fig. 57ª), las perpendiculares $D\,d$, $E\,e$, etc., á su dirección, cuyas longitudes es fácil calcular. Desde luego, la primera será: $D\,d = A\,D \operatorname{sen.} (U - u)$; y por la misma fórmula pueden obtenerse las demás, sólo con sustituir por u el valor que corresponde á cada lado trigonométrico, y combinando los resultados del cálculo con los valores obtenidos anteriormente, como lo indica la figura. Es claro también que las direcciones de estas perperdiculares deberán ser tales que formen con los lados ángulos complementarios de $U - u$; por ejemplo, desde D se trazará la línea $D\,d$ formando con $A\,D$ el ángulo $90° - \beta$. Las señales deben corregirse, si es preciso, por el mismo método que ántes se ha enseñado.

114. La resolución de todos los problemas elementales de la Geometría analítica, es también aplicable á las diversas combinaciones de los datos de una red trigonométrica, en atención á que la posición de cada uno de los lados está plenamente caracterizada, ó por las coordenadas de sus dos extremos, ó por las de uno solo y el azimut del lado mismo. En el primer caso, la ecuación del lado tiene la forma:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x')$$

en la cual las coordenadas acentuadas son las que corresponden á los extremos de la línea en cuestión, y las que no llevan acento convienen á cualquier otro punto de la recta ó de su prolongación. En el segundo caso, la ecuación, según vimos en el Capítulo anterior, será:

$$y - y' = \cot.\, u\, (x - x')$$

La identidad necesaria de estas ecuaciones, proviene de la relación que existe entre el azimut u de la línea y las coordenadas de los dos puntos que la limitan, á saber:

$$\tan.\, u = \frac{x' - x''}{y' - y''}$$

En uno y otro caso, representando por b el conjunto de cantidades determinadas, se tendrá:

$$b = y' - \frac{y' - y''}{x' - y''} x'$$

$$b = y' - x' \cot.\, u$$

Y la ecuación de la recta es respectivamente:

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}\, x + b$$

$$y = x \cot.\, u + b$$

La cantidad b es lo que en la Geometría analítica se designa con el nombre de *ordenada en el origen*, porque es en efecto el valor que adquiere y en el punto en que $x = 0$.

No es mi ánimo entrar aquí en pormenores que pertenecen á aquella parte de la ciencia; porque supongo al lector perfectamente instruído en los elementos de la matemática abstracta, y porque además en el Capítulo precedente, con motivo de los lugares geométricos, indiqué una de las numerosas aplicaciones que pueden hacerse de las ecuaciones de los lados trigonométricos, la cual le servirá de norma para casos análogos. Así es que para trazar desde un punto dado una línea que forme con otra cierto ángulo, ó que concurra á otro punto determinado; para hallar la distancia de un punto á una recta, etc., se aplican exactamente las mismas resoluciones que enseñan todos los tratados de Geometría analítica. Unicamente por vía de ejercicio resolveremos el problema siguiente, que suele presentarse en la práctica. Dadas dos rectas, determinar la magnitud y dirección de otra, que partiendo de un punto dado, vaya á terminar al punto de concurso de las primeras.

Sean x_0 y_0 las coordenadas del punto dado, y las ecuaciones de las dos rectas.

$$y = x \cot.\, u' + b'$$
$$y = x \cot.\, u'' + b''$$

El punto de intersección, según vimos en otra parte, tendrá por coordenadas:

$$x = (b' + b'')\, \frac{\text{sen.}\, u' \,\text{sen.}\, u''}{\text{sen.}\, (u' - u'')}$$

$$y = \tfrac{1}{2}(b' + b'') + \tfrac{1}{2}(b' - b'')\, \frac{\text{sen.}\, (u' + u'')}{\text{sen.}\, (u' - u'')}$$

La recta que se busca, en el hecho de pasar por el punto dado, y siendo u_0 el ángulo incógnito que forma con la misma dirección á que se refieren u' y u'', tendrá por ecuación:

$$y - y_0 = (x - x_0) \cot.\, u_0$$

Sustituyendo en ella los valores de x é y hallados anteriormente resulta:

$$\tan.\, u_0 = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

En cuanto á la magnitud, se tiene en general:

$$K = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

fórmula que puede adaptarse al cálculo logarítmico, transformándola con ayuda del ángulo u_0, á saber:

$$K = \frac{x - x_0}{\text{sen.}\, u_0} = \frac{y - y_0}{\cos.\, u_0}$$

No me parece necesario hacer alguna aplicación numérica, porque como el lector habrá notado, esta resolución no es más que la combinación de otras que se han aplicado ya.

115. La triangulación sola es muchas veces suficiente para hacer la planometría de un terreno sin necesidad de otras operaciones secundarias, al menos cuando no se lleva la mira de configurar los detalles interiores, sino únicamente la de hallar la forma y extensión del conjunto, caso muy frecuente en la práctica. Basta para esto que la triangulación se prolongue hasta los límites de la figura, de tal manera que sus últimos vértices se hallen en los ángulos mismos del polígono; porque es claro que la resolución de la cadena dará á conocer la dirección y magnitud de los linderos, y la planografía la forma del polígono. Si este es demasiado extenso, no es indispensable cubrirlo completamente

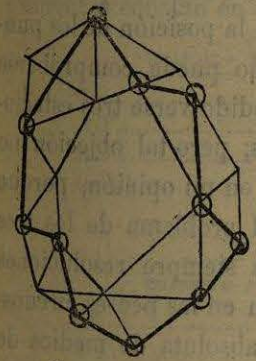


Fig.ª 59.ª

de una red de triángulos, sino formar una verdadera cadena cerca de sus límites como lo manifiesta la figura 59ª.

Cuando es muy sinuoso el perímetro del polígono, es difícil que todos sus lados puedan enlazarse directamente con la triangulación, ó al menos sería preciso un gran número de triángulos para conseguirlo. Un método general que en tales casos he seguido con muy buen éxito, y que permite terminar las operaciones de campo con extraordinaria rapidez, consiste en formar en el interior del polígono una serie de triángulos que, hasta donde sea posible, se acerque al contorno y se apoye en alguno de sus puntos; pero principalmente que tenga por vértices lugares elevados y visibles de una gran parte del perímetro, con el objeto de que desde cualquier ángulo de éste se distingan por lo menos tres ó cuatro estaciones trigonométricas. De esta manera, después de recogidos todos los datos pertenecientes á la triangulación, se recorre el perímetro deteniéndose en cada una de sus inflexiones, para mediren ellas los ángulos que forman los tres ó cuatro puntos trigonométricos visibles, á fin de determinar en seguida las posiciones de aquéllas, aplicando la resolución que se ha expuesto en los números 101 y siguientes, ó bien simplemente la de los tres vértices. La figura 60 da una idea del modo de disponer la triangulación para aplicar este método.

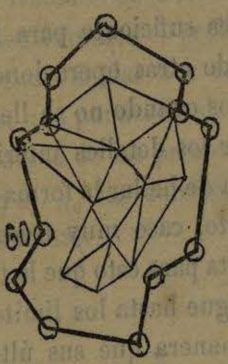


Fig.ª 60

La única objeción que acaso podría hacérsele es la de que la posición de los puntos del contorno no puede comprobarse cuando sólo han podido verse tres estaciones trigonométricas; pero tal objeción no es de mucho peso, en mi opinión, porque en primer lugar el problema de los tres vértices suministra siempre resoluciones muy exactas, y en segundo lugar, porque aun en las peores circunstancias, casi no se concibe la imposibilidad absoluta de medios de comprobación, como serían dirigir visuales á algunos otros puntos del lindero, medir directamente algunas distancias pequeñas, etc., y sobre todo en tales casos, para alejar todo peligro de equivocación,

lo que debe hacerse es medir los ángulos con el mayor cuidado. Es claro que pudiendo observarse cuatro ó más vértices de la triangulación, no debe haber temor de que pase desapercibida alguna equivocación que se cometa. Como prueba de la velocidad con que es posible operar, mencionaré el hecho de que aplicando este procedimiento, he podido terminar en dos meses todas las observaciones para levantar el plano de una propiedad que tenia 37 leguas cuadradas de superficie, con las circunstancias de haber sido en un terreno sumamente escabroso, y de haber tenido que determinar la posición de más de 70 mojoneras que fijaban otros tantos ángulos del lindero.

116. Otra de las aplicaciones importantes de la triangulación cuando se extiende hasta los límites de la figura, es la de calcular su superficie con la mayor facilidad, pues esta es evidentemente la suma de las áreas de todos los triángulos. Aunque la superficie de un triángulo puede expresarse en función de cualquiera de los elementos que lo determinan, es conveniente adoptar la fórmula que la expresa en función de dos lados y el ángulo comprendido, en atención á que la resolución de la red trigonométrica suministra los logaritmos de todos los lados y de los *senos* de todos los ángulos, por lo cual el cálculo queda reducido á una sencillísima operación numérica. Haciendo, pues, uso de la fórmula $s = \frac{1}{2}\, a\, b$ sen. C, calculemos, por ejemplo, la superficie de la triangulación representada en la figura 46ª, cuyos elementos constan en el número 96.

TRIÁNGULO *YRA.*

0.5	9.6989700
R Y	3.9859749
R A	3 9077614
sen. *R*	9.7397378
s	7.3324441

TRIÁNGULO *ARP.*

0.5	9.6989700
R A	3.9077614
R P	4.0033992
sen. *R*	9.9585667
s	7.5686973

TRIÁNGULO *PRM.*

0.5	9 6989700
R P	4.0033992
R M	3.8845400
sen. *R*	9.9975122
s	7.5844225

TRIÁNGULO *PJM.*

0.5	9.6989700
J P	4.0590709
J M	4 0687552
sen. *J*	9.9472535
s	7.7740496

Superficie YRA	=	21,500277	metros cuadrados.
" ARP	=	37,042246	" "
" PRM	=	38,408071	" "
" PJM	=	59,436000	" "
Superficie total	=	156,386594	metros cuadrados.

Cuando los últimos lados de la triangulación no son las líneas mismas del polígono, habrá necesidad de calcular por separado la superficie comprendida entre los límites de la red trigonométrica y los de la figura, para añadirla al resultado que suministran los triángulos. Sin embargo, si todos los ángulos del polígono cuya superficie se trata de medir, se han enlazado con la triangulación, ya sea como vértices de ésta, según se ve en la figura 59.ª, ya sea por medios de referencia menos directos, tales como los que se han explicado en los números 72, 74, 87 y 101, de tal manera que se haya seguido el plan que indica la figura 60.ª, es fácil hallar también la superficie, aplicando el procedimiento tan sencillo como sistemático y general que voy á exponer.

117. En el hecho de haberse ligado, directa ó indirectamente á la triangulación, todos los ángulos ó vértices del polígono, se podrán calcular las coordenadas de cada uno, y con éstas la superficie. Sea, en efecto, $ABCDE$ (fig. 61.ª) un polígono cualquiera, y bajemos de cada uno de sus vértices perpendiculares á uno de los ejes, por ejemplo, al de las abscisas. Es evidente, que su superficie es igual á la de los trapecios $AaeE$ y $eEDd$, menos la de los otros trapecios $AabB$, $bBCc$ y $cCDd$; y como la de cada uno puede expresarse en función de las coordenadas de los vértices del polígono, se tendrá, designando por s la supercie de éste:

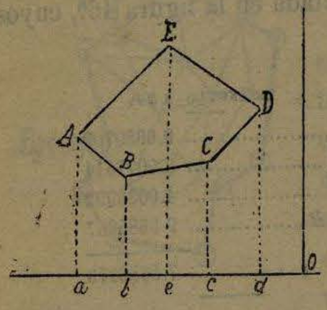


Fig.ª 61.ª

$$2s=(Oa-Oe)(Aa+Ee)+(Oe-Od)(Ee+Dd)-(Oa-Ob)(Aa+Bb)$$
$$-(Ob-Oc)(Bb+Cc)$$
$$-(Oc-Od)(Cc+Dd)$$

Para evitar el uso de tantas letras, designemos las coordenadas por los símbolos comunes x é y; y para distinguir el sistema correspondiente á cada uno de los vértices; supongamos que éstos se han numerado en el mismo orden que tienen en el alfabeto las letras que los señalan, esto es: el punto A con 1, el punto B con 2..... el punto E con 5. Poniendo un índice numérico á las coordenadas según el vértice á que pertenecen, la ecuación anterior será:

$$2s=(x_1-x_5)(y_1+y_5)+(x_5-x_4)(y_5+y_4)-(x_1-x_2)(y_1+y_2)$$
$$-(x_2-x_3)(y_2+y_3)$$
$$-(x_3-x_4)(y_3+y_4)$$

que haciendo las multiplicaciones y reduciendo, puede escribirse así:

$$2s=x_1(y_5-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+x_4(y_3-y_5)+x_5(y_4-y_1)\ldots\ldots(1)$$

Este resultado suministra la regla siguiente: *La doble superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que resultan de multiplicar la abscisa de cada vértice por la ordenada del vértice que le precede menos la del que le sigue.*

La fórmula anterior puede escribirse también de esta otra manera:

$$2s=y_1(x_2-x_5)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_4-x_2)+y_4(x_5-x_3)+y_5(x_1-x_4)\ldots\ldots(2)$$

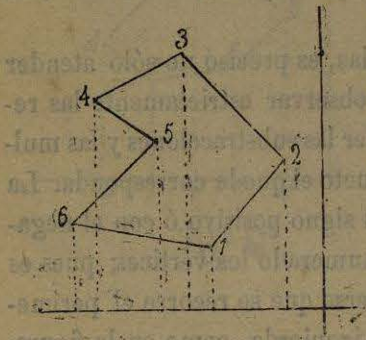
que equivale á una regla análoga, á saber: *La doble superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada de cada vértice por la abscisa del punto que le sigue, menos la del que le precede.*

Al aplicar cualquiera de las fórmulas, es preciso no sólo atender á los signos de las coordenadas, sino observar estrictamente las reglas del álgebra sobre los signos al hacer las substracciones y las multiplicaciones, para asignar á cada producto el que le corresponda. La superficie que se obtiene resulta con el signo positivo ó con el negativo, según el orden en que se hayan numerado los vértices; pues es evidente que, al hacerlo, puede suponerse que se recorre el perímetro teniendo el polígono siempre á la izquierda, como en la figura, ó bien en sentido contrario, quiere decir, conservando constantemente el polígono á la derecha.

118. Aunque las reglas precedentes nada dejan que desear bajo el aspecto de la sencillez, puede darse otra forma á las ecuaciones (1) y (2), ó por mejor decir, á la expresión general de que ambas se derivan. Nótese para esto que si en la figura 61ª se recorre el perímetro dejando siempre á la izquierda el polígono, al pasar de D á E y á A las abscisas van aumentando, y por el contrario van disminuyendo si se pasa de A á D por B y C. Los trapecios pertenecientes á los dos primeros lados son los aditivos al hallar la superficie, y los que corresponden á los tres últimos $A\,B$, $B\,C$ y $C\,D$ son los substractivos. En consecuencia, si numeramos siempre los vértices en el orden en que van presentándose cuando se recorre el contorno conservando el polígono á la izquierda, podrá expresarse la superficie en función de las diferencias de abscisas, de tal manera que siempre resulte positiva, y que la superficie de cada trapecio elemental se obtenga con el signo que le corresponde en la combinación. Escribamos para esto la fórmula como sigue:

$$
\begin{aligned}
2s=(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)&+(y_3+y_4)(x_4-x_3)\\
&+(y_4+y_5)(x_5-x_4)\\
&+(y_5+y_1)(x_1-x_5)
\end{aligned}
$$

En cada producto parcial figura la suma de las ordenadas que pertenecen á los extremos de cada lado del polígono, y la diferencia de las abscisas correspondientes á los mismos puntos, restando siempre cada abscisa de la que le sigue en el sentido de la marcha sistemática que he supuesto al derredor del polígono. De este modo cuando se camina del Este al Oeste van aumentando las abscisas, y aquellas diferencias son positivas: por el contrario, caminando del Oeste al Este las abscisas disminuyen, y por consiguiente, las diferencias resultan negativas. Esto se nota perfectamente en la figura 62ª que tiene numerados sus vértices, y en la que se ve que entre las estaciones 4



Figª 62ª

y 5, así como entre las 6 y 1, y 1 y 2 los trapecios deben ser substractivos.

La semisuma de las ordenadas de los extremos de una línea, es evidentemente igual á la ordenada de la mitad de la línea, y podríamos designarla con el nombre de *ordenada media*. Según esto, si se divide por 2 la fórmula precedente se tendrá un resultado que puede reducirse á esta regla: *La superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada media de cada lado por la diferencia de abscisas de sus extremos, restando siempre cada una de la que le sigue.*

Una regla muy semejante á la anterior puede derivarse de la consideración de que caminando del Sur hacia el Norte, las ordenadas van creciendo, y si se camina en sentido contrario, van decreciendo. Por consiguiente, si cada ordenada se resta de la que le precede, se obtendrán diferencias negativas en el primer caso, y positivas en el segundo; y como las figuras 61ª y 62ª indican que esos signos serían los mismos que los trapecios formados por las abscisas correspondientes á los extremos de cada lado, si designamos por *abscisa media* la semisuma de éstas, podremos establecer esta otra regla. *La superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que resultan de multiplicar la abscisa media de cada lado por la diferencia de ordenadas de sus extremos, restando siempre cada una de la que le precede.* Esta regla podría también obtenerse por la fórmula general de la página anterior, haciendo las multiplicaciones, y sacando la suma de las abscisas, como factor en cada producto parcial.

Cualquiera de las reglas establecidas se aplica fácilmente sin necesidad de construir previamente la figura ó plano del polígono, con tal que se hayan numerado los vértices por su orden progresivo. Apliquemos, por ejemplo, la penúltima regla á los datos siguientes:

Vértices.	x	y
1	0ᵐ0	0ᵐ0
2	+ 14957.4	− 3344.0
3	+ 17133.6	− 8195.9
4	+ 7576.1	− 6646.9
5	+ 1934.7	− 11836.7
6	+ 8854.3	− 7270.8

Es conveniente disponer el cálculo en forma de tabla separando los productos positivos de los negativos, de este modo:

$\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})$	$x_{n+1} - x_n$	Productos positivos.	Productos negativos.
− 1672.0	+ 14957.4		25,008773
− 5770.0	+ 2176.2		12,556674
− 7421.4	− 9557.5	70,930030	
− 9241.8	− 5641.4	52,136690	
− 9553.7	− 10789.0	103,074869	
− 3635.4	+ 8854.3		32,188922
		+ 226,141589	69,754369
		− 69,754369	
	Superficie del polígono =	+ 156,387220	

La superficie ha resultado positiva porque la numeración de los vértices se hizo recorriendo el perímetro con el polígono á la izquierda, como se dijo al principio.

Por regla general, siempre es preciso hacer tantas multiplicaciones como ángulos tiene el polígono; pero si en este caso particular hubiéramos aplicado alguna de las primeras reglas ó fórmulas (1) y (2), se habría evitado una multiplicación, á causa de que el origen estando en uno de los vértices, tiene este nulas sus coordenadas.

119. El polígono cuya superficie hemos calculado es el que representan las figuras 46ª y 53ª. Antes la habíamos ya determinado por medio de sus triángulos componentes, y se notará una diferencia de 626 metros cuadrados entre los dos resultados. Aunque no sea este el lugar oportuno para entrar en consideraciones respecto del grado de exactitud con que es posible obtener una superficie, como es probable que el lector, poco habituado aún á esta clase de cálculos, se sorprenda de hallar tal diferencia en la aplicación de dos métodos que deben considerarse como los mejores, conviene advertirle desde ahora que sólo accidentalmente puede esperarse una concordancia perfecta al determinar una superficie por procedimientos diversos, en atención á que los factores de que se deriva son siempre cantidades cuya aproximación se lleva hasta cierto límite solamente, y que muchas

veces basta tomar una decimal más ó menos para hallar resultados muy distintos, y cuyas diferencias crecen necesariamente con las superficies, á causa de la generación de éstas. Hay además otro motivo de discordancia; en la primera determinación hicimos uso del cálculo logarítmico, y debe tenerse presente que por medio de los logaritmos no se pueden obtener con toda exactitud números muy grandes, al menos si aquellos tienen sólo siete cifras decimales. En general, puede decirse que los logaritmos sólo dan con precisión los números compuestos de tantos guarismos como cifras decimales tienen, de modo que para calcular superficies muy considerables, me parece preferible prescindir del cálculo logarítmico, siempre que se pueda disponer de otros medios. Por otra parte, en el caso actual, la diferencia de 626 metros cuadrados, ó sea la superficie de un pequeño cuadrado cuyos lados son de 25^{m}, puede reputarse como absolutamente nula respecto de la del polígono, que tiene muy cerca de nueve leguas cuadradas.
