denominan azimutes *magnéticos*. Como antes ó después de hecha una triangulación, puede medirse el ángulo formado por las dos meridianas astronómica y magnética, ó muchas veces se conoce de antemano en la localidad en que se trabaja, el valor de ese ángulo llamado *declinación* de la aguja, no hay inconveniente en tomar directamente con la brújula el azimut magnético de uno ó más lados trigonométricos, los cuales ó se corrigen por el valor de la declinación, ó se aplican desde luego al cálculo de las coordenadas, tomando en tal caso por ejes la meridiana magnética y una línea perpendicular á ésta. La cadena que nos sirve de ejemplo está calculada así, de suerte que al construir la cuadrícula, si se quiere que resulte orientada paralelamente á los lados del papel, debe hacerse la construcción trazando las meridianas magnéticas con una inclinación de 8° 58' del Norte hacia el Este respecto de la orilla del papel; porque esta era la declinación de la aguja en el lugar donde se ejecutó la triangulación. Si no se hiciere así, deberá trazarse la meridiana astronómica formando el mismo ángulo con las líneas verticales de la cuadrícula, pero del Norte hacia el Oeste. De una manera ó de otra, el trazo de la meridiana astronómica es esencial en el plano para señalar la verdadera dirección de la línea *Norte-Sur*, á la cual se refiere la orientación de aquél.

Tales son en resumen las sencillas reglas que deben observarse en esta parte de la planografía, á las que debe agregarse la de no hacer construcción alguna mientras el papel, después de restirado, conserve todavía alguna humedad; porque contrayéndose sensiblemente al secarse, puede dar origen á variaciones en el tamaño de las líneas que deformen la construcción, ó que ya no correspondan á los valores que se deducen de la escala adoptada. En general, el papel de cualquiera clase que sea, tiene propiedades higrométricas muy marcadas, y por tanto los planos en vía de construcción deben preservarse cuidadosamente de la acción de la humedad.

CAPITULO IX.

MODIFICACIONES DEL MÉTODO GENERAL DE TRIANGULACIÓN.

110. En los Capítulos que preceden he procurado trazar el conjunto de reglas generales que deben guiar al ingeniero en la medida de una red trigonométrica, y que si se quiere, son por su misma generalidad las más sencillas; pero algunas de ellas son hasta cierto punto susceptibles de modificación con el fin de abreviar algunas de las operaciones elementales á que se refieren. En este Capítulo me propongo ocuparme de las principales modificaciones que pueden hacerse del método general, comenzando por la que ha propuesto M. Beuvière, geómetra del catastro francés.

El procedimiento de M. Beuvière, llamado por su autor *método de lugares geométricos*, tiene por principal objeto evitar el cálculo de los triángulos, determinando directamente las coordenadas de los vértices por medio del conocimiento de los azimutes de los lados y de la longitud de éstos, que se toma gráficamente del croquis. Este último dato no pudiendo ser más que aproximativo, lo son igualmente los valores que se obtienen para las coordenadas; pero se corrigen en seguida valiéndose de una construcción geométrica de la cual deriva el método su nombre. Entremos en algunos detalles.

Entre las operaciones de campo, la medida de la base y la de los ángulos en nada difieren esencialmente de los procedimientos que con el mismo objeto se han desarrollado en el método común de triangulación; aunque en el nuevo, es preferible adoptar siempre el modo de medir los ángulos por direcciones, tal como se explicó en el número 67, en lugar de repetir cada uno aisladamente. M. Beuvière no se ocupa en la elección de los vértices bajo el punto de vista de que los triángulos resulten bien configurados, puesto que en todo rigor no forma una verdadera cadena trigonométrica, sino que más bien fija su atención en escogerlos de manera que desde cada uno de ellos pueda verse el mayor número posible de puntos, ó lo que es lo mismo, que cada vértice pueda determinarse por medio de varias visuales. Así es que al ocupar cada estación, se toman todos los ángulos formados en ella por las visuales dirigidas á cuantos puntos puedan descubrirse, y en general debe hacerse de manera que ninguno de los vértices quede determinado por menos de tres visuales, pues como veremos después, se tiene de este modo un medio de comprobar la exactitud del resultado final. La figura 54ª da una idea de la operación: desde ambos extremos de la base *A B* se han podido dirigir visuales á *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* é *I*. En seguida desde cada uno de éstos se procede de igual manera observando tanto los puntos anteriores que se descubran, como otros nuevos para proseguir así la operación hasta su término.

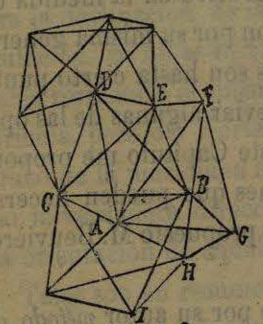

Fig.ª 54ª

Es claro que con los datos adquiridos, y medido el azimut de cualquiera de los lados, fácilmente se obtienen los azimutes de todas las demás visuales procediendo lo mismo que se explicó en el método común; y una vez construído el croquis, pueden medirse sobre él, atendiendo á la escala, las longitudes de las visuales mismas con más ó menos aproximación, para proceder al cálculo directo de las coordenadas provisionales ó aproximativas de los vértices. Antes de esto, con el azimut de la base *A B* y su longitud, que es la única que se conoce con precisión, se calculan las diferencias de coordenadas de sus extremos por el método común, de manera que las posiciones de esos puntos pueden considerarse exactamente determinadas. Veamos ahora cómo se determina la del punto *E*, por ejemplo, que está enlazado con *A* y *B* por las medidas angu-

lares. Sea k la distancia *A E* medida en el croquis, y u su azimut: las diferencias de coordenadas de *A* y *E* serán:

$$x = k \operatorname{sen.} u \qquad y = k \cos. u$$

en las que resultará un error debido á la falta de precisión con que puede medirse gráficamente la distancia k; pero como el azimut se supone exacto, tendremos que las fórmulas anteriores aunque no dén precisamente las coordenadas de *E*, sí darán las de algún punto de la línea *A E*, quiere decir, las del punto cuya distancia á *A* sea exactamente k. Luego si dando á la longitud aproximativa de la línea *A E*, un incremento tal que la convierta en k', volvemos á calcular las fórmulas precedentes con el mismo valor de u, obtendremos las coordenadas exactas de otro punto de la recta, y estaremos seguros de que en la línea que pasa por los dos puntos así determinados, ó bien en su prolongación, se hallará la estación *E* que se busca.

Tomemos en seguida la distancia *B E* sobre el croquis, y con el resultado que se obtenga y otro un poco mayor hagamos el nuevo cálculo de las fórmulas, usando por supuesto el azimut que corresponda á esa dirección. De este modo tendremos las posiciones de dos puntos de la recta *B E*, que debe contener también el punto *E* que se busca, y sólo faltará determinar la intersección de ambas líneas, que es la que resuelve el problema.

Esta última parte de la resolución es la que se hace por medio de una construcción geométrica muy sencilla. Se traza un cuadrado *a b c d* (fig. 55ª), cuyos lados sean de $0^{m}.1$ y á los que se asignan coordenadas muy poco diferentes de los cuatro resultados obtenidos, con el objeto de que en su interior quepan los cuatro puntos á que aquellos se refieren. Con los excesos de coordenadas se sitúan los dos puntos m y n que corresponden á la primera recta *A E* de la figura 54ª, y en seguida p y q correspondientes á la segunda *B E*.

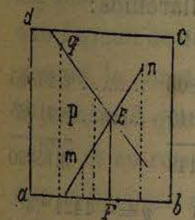

Fig.ª 55ª

La intersección de las líneas $m\ n$ y $p\ q$ determinará el punto *E*; y como la construcción se hace en una escala suficientemente grande para que puedan apreciarse por lo menos los metros enteros, resulta que midiendo las distancias $E\,F$ y $F\,b$ y combinándolas con las coordenadas que se asignaron al vértice b del cuadrado, se obtendrán con bastante exactitud las del punto E.

Supongamos para mayor claridad que el azimut de la línea $A\,E$ fuese de $302°\ 17'\ 20''$, y el de $B\,E$ de $34°\ 31'\ 40''$, tomando el punto A por origen de coordenadas, y siendo las de B, $x = -\,3534^{m}.6$, $y = +\,213^{m}.6$. Admitamos, además, que estando construído el croquis de la triangulación en la escala de $\frac{1}{30000}$, hallamos con el doble-decímetro $A\,E = 0^{m}.101$ y $B\,E = 0^{m}.057$. Tomaremos, pues, para la primera línea $k = 0^{m}.101 \times 30000 = 3030^{m}$, y para la segunda $k = 0^{m}.057 \times 30000 = 1710^{m}$. Aplicando el cálculo con estos valores y con los azimutes que corresponden á las dos direcciones, tendremos:

3030..............	3.48144	....	3.48144	1710..............	3.23300	....	3.23300
az. $A\,E$...sen...	9.92704—	...cos...	9.72769	az. $B\,E$...sen...	9.75343	...cos...	9.91585
	3.40848—		3.20913		2.98643		3.14885
	$x = -\,2561^{m}.4$		$y = +\,1618^{m}6.$		$x = +\,2561^{m}.2$		$y = +\,1408^{m}.8$

El punto m de la primera recta tendrá por coordenadas.............. $x = -\,2561^{m}.4$, $y = +\,1618^{m}.6$. Atendiendo á las de B, las coordenadas del punto p de la segunda recta, serán: $x = -\,2565^{m}.4$, $y = +\,1622^{m}.4$.

Para calcular el segundo punto de cada dirección demos á los valores de k un incremento de 20^{m}, por ejemplo, y hallaremos:

3050..............	3.48430	....	3.48430	1730..............	3.23805	....	3.23805
az. $A\,E$...sen...	9.92704—	...cos...	9.72769	az. $B\,E$...sen...	9.75343	...cos...	9.91585
	3.41134—		3.21199		2.99148		3.15390
	$x = -\,2578^{m}.3$		$y = +\,1629^{m}.3$		$x = +\,980^{m}.6$		$y = +\,1424^{m}.3$

Para el punto n de la primera dirección tendremos: $x = -\,2578^{m}.3$, $y = +\,1629^{m}.3$; y para el punto q de la segunda, $x = -\,2554^{m}.0$, $y = +\,1638^{m}.9$.

Adoptemos para construir el cuadrado de la figura 55ª una escala muy grande, por ejemplo, de $\frac{1}{300}$ de suerte que su lado de $0^{m}.1$ represente 30 metros, y asignemos al punto a las coordenadas........ $x = -\,2550^{m}$, $y = +\,1610^{m}$. Entonces con los excesos de las coordenadas de m, n, p y q respecto de estas últimas, situemos estos puntos, y tracemos las rectas que por su intersección determinan el punto E. Bajando la perpendicular $E\,F$, ésta y la distancia $a\,F$ sumadas con las coordenadas de a darán las de E, debiendo encontrarse $x = -\,2566^{m}$ é $y = -\,1621^{m}$, sin tomar en cuenta más que los metros enteros.

Si el punto que se busca está determinado por más de dos visuales, se hace la misma construcción para cada una, y la comprobación deberá consistir en que todas las líneas trazadas se corten en un solo punto. En el caso contrario, se adopta por valor final el término medio de todos los que se obtengan, y una vez fijada la posición de un punto, puede servir para situar los que sigan, por el mismo procedimiento.

En lugar de calcular la posición de dos puntos de cada visual, podría hacerse uso de uno sólo, puesto que los azimutes se conocen con exactitud. Entonces al hacer la construcción, después de fijado el punto m, por ejemplo, se trazaría por él una línea que formase con $a\,d$ un ángulo igual al azimut de la visual á que pertenece m, y lo mismo se haría desde el punto p de la otra visual. Los ángulos azimutales pueden construirse directamente sobre los lados $a\,d$ y $b\,c$ del cuadrado, tomando su magnitud por radio de la construcción; y en seguida por m y p respectivamente se trazan paralelas á las líneas que forman aquellos ángulos. Como siempre la escala se toma muy grande, la construcción de los ángulos azimutales proporciona toda la exactitud que se necesita.

Tal es en resumen el método de los lugares geométricos: el objeto que se propuso su autor fué sin duda el de facilitar las operaciones trigonométricas; aunque me parece dudoso que pueda considerarse realmente como una simplificación del método común, la sustitución del doble cálculo de un triángulo rectángulo y de una construcción geométrica para cada visual, en vez de la resolución de los triángulos tal como se practica en aquel. Es probable que cada lector forme en este punto su opinión, según que su inclinación ó su aptitud le presenten como más sencillas las operaciones numéricas respecto de las gráficas, ó viseversa. Lo que sí me parece una positiva ventaja es el modo de tomar los ángulos, sin atender por lo pronto á la forma de los triángulos, sino observando cuantos puntos sean visibles desde cada estación. Este procedimiento, en efecto, no sólo suministra repetidas comprobaciones que pueden aprovecharse en muchísimos casos, sino que permite, después de construído el croquis, estudiar en él la colocación de las diversas estaciones para elegir entre ellas las que formen una red trigonométrica de buenas condiciones; estudio que es indudablemente más fácil sobre el plano que sobre el terreno. Así lo he practicado algunas veces, y hecha la elección de la cadena, la he calculado por el método común. Creo que esta ventaja es por sí sola bastante apreciable para compensar el trabajo que se toma el ingeniero al medir mayor número de ángulos de los que en rigor se necesitan; y por otra parte, los ángulos sobrantes siempre pueden utilizarse como medios de comprobación, ó para formar triángulos secundarios.

111. Adoptando el pensamiento fundamental de M. Beuvière, que consiste en suprimir el cálculo trigonométrico, me parecería en general preferible eliminar también la resolución gráfica, sustituyéndola con la aplicación de los principios elementales de Geometría analítica. En efecto, cada visual de las que fijan la posición de un punto, está determinada por su azimut y por las coordenadas de la estación desde la cual se dirige, ya sea esta última alguno de los extremos de la base, como sucede en nuestro ejemplo, ó ya sea alguno de los puntos cuya posición se haya determinado antes por el mismo procedimiento. De aquí se deduce que la ecuación de cada visual será de la forma:

$$y - y' = (x - x') \cot. u'$$

siendo u' el azimut, y x' y' las coordenadas conocidas de la estación desde la cual se supone observado el azimut. La segunda visual, cuyo

azimut representaré por u'' y que parte del punto que tiene x'' y'' por coordenadas, tendrá por ecuación:

$$y - y'' = (x - x'') \cot. u$$

Si para abreviar designamos por b' y b'' las cantidades conocidas, tendremos:

$$b' = y' - x' \cot. u' \qquad b'' = y'' - x'' \cot. u'' \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y entonces las ecuaciones de las dos rectas, serán:

$$y = b' + x. \cot. u'$$
$$y = b'' + x. \cot. u''$$

que combinadas, darán á conocer las coordenadas x y de su punto de intersección, el cual no es otra cosa más que la estación trigonométrica cuya posición se trata de determinar. Restándolas y sumándolas se obtiene respectivamente:

$$O = b' - b'' + x (\cot. u' - \cot. u'')$$
$$2y = b' + b'' + x (\cot. u' + \cot. u'')$$

Transformando los coeficientes de x con el fin de hacerlos más propios para el cálculo logarítmico, resulta finalmente:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(b' - b'') \text{ sen. } u' \text{ sen. } u''}{\text{sen. } (u' - u'')} \\ y &= \tfrac{1}{2}(b' + b'') + \tfrac{1}{2}(b' - b'') \frac{\text{sen. } (u' + u'')}{\text{sen. } (u' - u'')} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) resuelven completamente el problema sin necesidad de cálculos trigonométricos preliminares. Apliquémoslas á nuestro ejemplo recordando que el punto A de la figura 54ª, por ser origen, tiene nulas sus coordenadas, y las de B son $x'' = -3534^{m}.6$ $y'' = +213^{m}.6$. En cuanto á los azimutes en A y en B, son respectivamente:

$$u' = 302° 17' 20'' \qquad u'' = 34° 31' 40''$$

El cálculo será como sigue, puesto que $b' = 0$:

x''......	3.54834—	$b'-b''$...	3.72845—	$\frac{1}{2}(b'-b'')$...	3.42742—
cot. u''......	0.16242	sen. u'...	9.92754	sen. $(u'+u'')$...	9.59514—
		sen. u''...	9.75343		
	3.71076—				3.02256
$y'' = +$	213^{m}6		3.40892	sen. $(u'-u'')$...	9.99967—
$-x''$ cot. $u'' = +$	5137 6	sen. $(u'-u'')$...	9.99967—		
					3.02289—
$b'' = +$	5351^{m}2	x...	3.40925		
		$x = -$	2566^{m}0		$-$ 1054^{m}1
				$\frac{1}{2}(b'+b'') = +$	2675. 6
				$y = +$	1621. 5

Este método es tan sencillo y general como puede desearse, y evita completamente la parte gráfica de la resolución. Cuando se tengan más de dos visuales, que son las estrictamente necesarias, puede obtenerse la comprobación del primer resultado combinando de dos en dos los datos referentes á cada una, y en el caso de que se hallen algunas pequeñas diferencias, se toma el término medio. Es claro que una vez determinadas de esta manera las coordenadas de una estación trigonométrica, pueden servir como nuevos datos para determinar las de otros puntos enlazados con ella por medio de las observaciones angulares.

La resolución analítica que acaba de indicarse, ó la original de M. Beuvière si se prefiere aquélla, me parecen muy aceptables para situar los vértices de las triangulaciones secundarias y aun algunos de la principal, sobre todo cuando habiendo formado y calculado una buena red fundamental, se tiene plena confianza en las coordenadas de los puntos que la forman, puesto que éstas sirven de elementos para determinar las de aquellos.

Si se tiene algún interés en conocer las distancias de una estación á otra; puede conseguirse con mucha facilidad por la fórmula:

$$k = \frac{x - x'}{\text{sen. } u'} = \frac{y - y'}{\text{cos. } u'}$$

Calculemos, por ejemplo, la distancia de E á B:

$x =-$	2566^{m}0	$x - x''$.........	2.98614
$x'' = -$	3534. 6	sen. u''.........	9.75343
$x - x'' = +$	968^{m}6	k.........	3.23271
		$k =$	1708^{m}.9

112. Hay otra modificación de importancia adoptada en las grandes triangulaciones que se ejecutan en los Estados Unidos por las comisiones exploradoras de las costas *(Coast Survey)*. Su objeto no es el de economizar trabajo, sino el de procurarse comprobaciones en cada elemento de la cadena trigonométrica, lo que se logra formando cuadriláteros en lugar de simples triángulos, como lo indica la figura 56ª La resolución de los dos triángulos componentes de cada cuadrilátero $A\ B\ C\ D$, da á conocer las diagonales $A\ C$ y $B\ D$, de modo que la longitud de cada lado $B\ C$, se obtiene por el triángulo $A\ B\ C$, así como por el triángulo $B\ C\ D$, y ambos resultados se comprueban el uno al otro. La misma figura indica el modo de hacer crecer poco á poco los lados partiendo de una base $a\,b$, generalmente mucho menor que la longitud media de aquellos, con la ventaja de que los primeros triángulos resulten bien configurados.

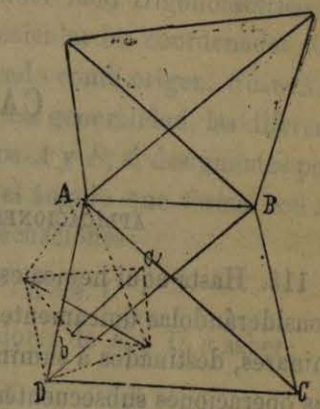

Fig.ª 56.ª

La exploración de las costas, por su naturaleza, demanda la formación de cadenas más bien que de redes trigonométricas, y aun bajo este punto de vista es muy conveniente el cuadrilátero como figura elemental, puesto que permite situar mayor número de puntos que el triángulo, sin que por eso sea preciso extender demasiado las operaciones.

Podrían mencionarse algunos otros procedimientos trigonométricos más ó menos interesantes; pero como no importarían verdaderas modificaciones del método general, no creo necesario extenderme más en esta materia.