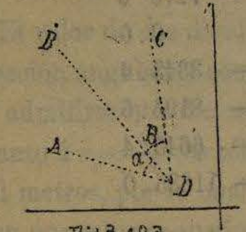
vieron haciendo uso de los ángulos corregidos, se verá que las diferencias son casi insignificantes.

101. La teoría de las coordenadas va á permitirme dar una resolución más general del problema de los tres vértices, expuesto en el núm. 72. La nueva solución tiene por objeto hallar directamente las coordenadas del punto que se desea enlazar con la cadena trigonométrica, y es fácilmente aplicable al caso en que se hayan observado no solamente tres, sino un número mayor de vértices, lo cual debe hacerse siempre que sea posible, tanto para evitar la indeterminación del problema, que aunque muy remota, puede presentarse según consta en el número citado, como para obtener comprobación y de consiguiente más confianza en los resultados.

Antes de emprender el cálculo numérico que desarrollaré en seguida, debe hacerse la construcción gráfica indicada en el número 73, con el objeto de medir sobre el croquis las coordenadas aproximativas del punto que se quiere ligar á la triangulación. Basta para esto trazar la meridiana y la perpendicular de alguno de los vértices observados, lo que es fácil, puesto que suponemos conocidos los azimutes de todos los lados, y tirar perpendiculares á estas líneas desde el punto que se trata de determinar. Las longitudes de las perpendiculares representarán las diferencias de abscisas y ordenadas de ambos puntos, las cuales combinadas con las coordenadas del vértice trigonométrico darán á conocer la posición aproximativa del otro punto. Si la construcción se ejecuta con cuidado y la escala del croquis no es muy pequeña, se podrán determinar las coordenadas del punto con aproximación de 8 á 10 metros generalmente, y en seguida se corrigen de la manera que voy á exponer.

Sean $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ las coordenadas de los puntos A, B, C respectivamente (fig. 48ª), y $(x\, y)$ las coordenadas *aproximativas* del punto D, desde el cual se han medido los ángulos α y β. Si estas coordenadas fueran exactas, el azimut del primer punto A se calcularía por la ecuación:



Figª 48ª

$$\tan. u_1 = \frac{x_1 - x}{y_1 - y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y la distancia $A\,D = k_1$ sería:

$$k_1 = \frac{x_1 - x}{\text{sen.}\, u_1} = \frac{y_1 - y}{\cos.\, u_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Designando por $\mathrm{d}\,x$ y $\mathrm{d}\,y$ las correcciones incógnitas que deben sufrir las coordenadas aproximativas, las exactas, serán $x + \mathrm{d}\,x$, $y + \mathrm{d}\,y$, con lo cual el azimut correcto se convertirá en $u_1 + \mathrm{d}\,u_1$. Diferenciando la primera ecuación se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}\,u_1}{\cos.^2 u_1} = \frac{(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,y - (y_1 - y)\,\mathrm{d}\,x}{(y_1 - y)^2} = \frac{(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,y - (y_1 - y)\,\mathrm{d}\,x}{k_1^2 \cos.^2 u_1}$$

de donde la corrección del azimut expresada en segundos, resulta:

$$\mathrm{d}\,u_1 = \frac{(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,y - (y_1 - y)\,\mathrm{d}\,x}{k_1^2\, \text{sen.}\, 1''}$$

Haciendo por abreviación

$$p_1 = \frac{x_1 - x}{k_1^2\, \text{sen.}\, 1''} \qquad q_1 = \frac{y_1 - y}{k_1^2\, \text{sen.}\, 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

la expresión del azimut correcto será:

$$u_1 + p_1\,\mathrm{d}\,y - q_1\,\mathrm{d}\,x$$

De igual manera hallaríamos que los azimutes exactos de B y C son respectivamente:

$$u_2 + p_2\,\mathrm{d}\,y - q_2\,\mathrm{d}\,x$$
$$u_3 + p_3\,\mathrm{d}\,y - q_3\,\mathrm{d}\,x$$

Como las diferencias sucesivas de estos azimutes deben dar los ángulos observados α y β, podremos determinar las incógnitas $\mathrm{d}\,x$ y $\mathrm{d}\,y$ estableciendo las ecuaciones de condición:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_2 + (p_1 - p_2)\,\mathrm{d}\,y - (q_1 - q_2)\,\mathrm{d}\,x - \alpha = O \\ u_2 - u_3 + (p_2 - p_3)\,\mathrm{d}\,y - (q_2 - q_3)\,\mathrm{d}\,x - \beta = O \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

que suministran ambos valores.

Tal es con muy corta diferencia la resolución dada por Gauss; [1] pero por muchas aplicaciones que he hecho de las fórmulas, encuentro más conveniente dar á los valores p y q otra forma que simplifica el cálculo. Introduciendo en ellos el valor de k en función de la diferencia de abscisas, se halla fácilmente:

$$p_1 = \frac{\text{sen.}^2 u_1}{(x_1 - x)\,\text{sen. } 1''} = (5.31443)\,\frac{\text{sen.}^2 u_1}{x_1 - x}$$

$$q_1 = \frac{\text{sen.}^2 u_1}{(x_1 - x)\,\text{tan. } u_1\,\text{sen. } 1''} = \frac{p_1}{\text{tan. } u_1}$$

De esta manera se evita el cálculo de k, y se tiene además la ventaja de que los logaritmos que entran en los valores de p y q se tienen ya por el cálculo de la fórmula (1).

Numerando los puntos observados como lo están en la figura, por el orden en que se van presentando de izquierda á derecha, vemos que para cada uno de ellos, designando en general por n el número que le corresponde, deberán calcularse las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \text{tan. } u_n &= \frac{x_n - x}{y_n - y} \\ p_n &= (5.31443)\,\frac{\text{sen.}^2 u_n}{x_n - x} \\ q_n &= \frac{p_n}{\text{tan. } u_n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

y en seguida se establecen las ecuaciones (4) de condición. Sólo el cálculo de u_n demanda logaritmos de siete decimales; para los otros valores bastan logaritmos de cuatro ó cinco.

102. Es preciso tener mucho cuidado con el juego de los signos para dar á cada azimut calculado el valor que le corresponde. La tangente de u_n resultará positiva ó negativa según que las diferencias

[1] Carta de Gauss á Schumacher inserta en el periódico intitulado *Astronomische Nachrichten*, tomo I, pág. 80.

de abscisas y ordenadas de que depende, tengan el mismo signo ó signos contrarios. Si ambas diferencias son positivas, el azimut se tomará menor que 90°, porque el punto observado estará en el primer cuadrante, respecto del que sirve de estación; y si las dos son negativas deberá tomarse el azimut mayor que 180° y menor que 270°, puesto que el punto se hallará en el tercer cuadrante. En el caso de que tan. u_n resulte negativa, es necesario ver si el signo proviene de $x_n - x$ ó de $y_n - y$; proviniendo de que $x_n - x$ sea negativa, el azimut será mayor que 270°, porque el punto estará en el último cuadrante. Si el signo negativo proviene de la diferencia de ordenadas $y_n - y$, el punto observado estará en el segundo cuadrante y su azimut será mayor que 90° y menor que 180°. Todo esto no es más que la aplicación de las reglas sobre los signos de las líneas trigonométricas según el cuadrante en que se consideran, y no puede originar duda ni error alguno. En cuanto á los signos de las p y las q, nótese que como sen.$^2 u$ es siempre positivo, el signo de p es el de la diferencia de abscisas, y el de q el de la diferencia de ordenadas.

Si se reflexiona que en las triangulaciones el objeto final del problema consiste en determinar las coordenadas de las diversas estaciones, esta resolución es acaso más breve y sencilla que la expuesta en el número 72, sobre todo cuando se observan más de tres puntos; porque en aquella es preciso combinarlos de tres en tres, mientras que en esta, por n puntos observados, se tendrán $n-1$ ecuaciones de condición de la forma (4) todas las cuales se pueden utilizar en la determinación de dx y dy casi sin aumento alguno de trabajo. A la verdad, puesto que dos ecuaciones únicamente son bastantes para determinar las correcciones, la tercera y siguientes que convierten el problema en más que determinado, no quedarán en general exactamente satisfechas por los valores de dx y dy deducidos de las primeras, á causa de la existencia de los pequeños errores de la observación y aun de los datos mismos; pero combinando todas las ecuaciones de condición se obtendrán los valores más plausibles de las incógnitas, que aunque no satisfagan con entera precisión las ecuaciones de que provienen, sólo darán lugar á pequeños residuos, debiendo considerarse como resultados medios de los valores que se obtendrían por diversas combinaciones que, de dos en dos, se hiciesen de todas las ecuaciones de condición. Cuando no se atribuya el mismo grado de confianza á todos los ángulos medidos, ya sea por haberse tomado en circunstancias desiguales, ó simplemente por no haberse observado un mismo número de veces; si se quiere proceder con toda exactitud, debe multiplicarse cada ecuación de condición por un factor proporcional al grado de confianza atribuído al ángulo que figura en ella. Un ejemplo completamente detallado dará á conocer las ventajas de esta resolución. El siguiente presenta el caso en que observé cuatro puntos cuyos nombres, coordenadas y números de órden constan á continuación:

		x	y
Núm. 1.........	Cerro de Santiago.........	− 3069^{m}3.........	− 2062^{m}3
„ 2.........	Cerro de Tlaxahuan	0 . 0.........	0 . 0
„ 3.........	Cerro del Toro............	+ 12 . 1.........	+ 5600 . 7
„ 4.........	Cerro del Anís............	− 4621 . 8.........	+ 7049 . 6

Los ángulos medidos fueron:

Entre 1 y 2.........	α = 55° 32′ 19″	por 4	observaciones.
„ 2 y 3.........	β = 103 4 37	„ 2	„
„ 3 y 4.........	γ = 60 18 15	„ 2	„

Por la resolución gráfica del número 73 encontré que las coordenadas aproximativas del punto de estación eran: $x = -2160^m$ ($y = +2270^m$.

	1	2	3	4
$x_n - x$..... $y_n - y$.....	− 909^{m}3 − 4332. 3	+ 2160^{m}0 − 2270. 0	+ 2172^{m}1 + 3330. 7	− 2461^{m}8 + 4779. 6
$x_n - x$..... $y_n - y$.....	2.9587072− 3.6367185−	3.3344538 3.3560259−	3.3368798 3.5225355	3.3912528− 3.6793916
tan. u_n.... u_n =	9.3219887 191° 51′ 13″	9.9784279− 136° 25′ 21″	9.8143443 33° 6′ 37″	9.7118612− 332° 4′ 55″
Const...... sen.$^2 u_n$... $x_n - x$.....	5.31443 8.62526 − 2.95871−	5.31443 9.67686 − 3.33445	5.31443 9.47479 − 3.33688	5.31443 9.32153 − 3.39125−
p_n..... tan. u_n....	0.98098− 9.32199	1.65684 9.97843−	1.45234 9.81434	1.24471− 9.71186−
q_n.....	1.65899−	1.67841−	1.63800	1.53285
p_n = q_n =	− 9.57 − 45.60	+ 45.38 − 47.69	+ 28.34 + 43.45	− 17.57 + 34.11

Como el primer ángulo se tomó doble número de veces que los demás, multiplico por 2 la primera ecuación de condición, con lo que se obtienen las siguientes:

$$- 109.8\ dy - 4.2\ dx = + 774''$$
$$+ 17.0\ dy + 91.1\ dx = - 847$$
$$+ 45.9\ dy - 9.3\ dx = - 207$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones consiste en hacer positivos todos los coeficientes de una de las incógnitas y sumar todas las ecuaciones, y en seguida hacer lo mismo respecto de la otra incógnita. De este modo se tendrán las dos únicas ecuaciones que siguen:

$$+ 172.7\ dy + 86.0\ dx = - 1828$$
$$+ 80.9\ dy + 104.6\ dx = - 1414$$

Dividiendo cada una de ellas por el coeficiente de $d y$ resulta:

$$d y + 0.50 \, d x = - 10.59$$
$$d y + 1.29 \, d x = - 17.48$$

que por adición y sustracción dan:

$$2.00 \, d y = - 28.07 - 1.79 \, d x$$
$$0.79 \, d x = - 6.89$$

La última da $d x = - 8^{m}.72$, valor que sustituído en la primera produce $d y = - 6^{m}.23$. Con estos valores las coordenadas correctas del punto de estación serán:

$$x + d x = - 2168^{m}.7 ; \quad y + d y = + 2263^{m}.8$$

Si no se hubiera multiplicado por 2 la primera ecuación de condición, esto es: si se hubieran supuesto todas las observaciones dignas de igual confianza, habríamos obtenido $d x = - 8^{m}.44$, y $d y = - 6^{m}.20$, resultados casi idénticos á los anteriores.

Sustituyendo $d x = - 8.72$ y $d y = - 6.23$ en las tres ecuaciones de condición, obtendremos:

Por la primera,	+ 721 en lugar de + 774.	Residuo = 53″
Por la segunda,	— 900 en lugar de — 847.	Residuo = 53
Por la tercera,	— 205 en lugar de — 207.	Residuo = 2

El promedio de los residuos es 36″, que cabe dentro de los límites del error posible de observación, puesto que los ángulos se midieron con un teodolito que sólo aproximaba á 1′ las lecturas angulares. Por otra parte, los residuos son bastante pequeños para que sea fácil hacerlos desaparecer casi del todo; con sólo un incremento de medio metro en la abscisa, y un decremento de la misma cantidad en la ordenada del punto de estación, esto es: adoptando $d x = - 8^{m}.2$ y $d y = - 6^{m}.7$. Estos últimos valores son, con muy corta diferencia, los que se habrían obtenido aplicando otro método para combinar y resolver las ecuaciones de condición; pero como los cálculos serían más complicados, nos atendremos al procedimiento expuesto, que proporciona un medio sencillo de fijar la posición del punto con todo el grado de precisión que demandan las operaciones topográficas,

las que ordinariamente se limitan á la apreciación final de metros enteros.

104. En todo lo que se ha dicho hasta ahora respecto de orientación y de cálculo de coordenadas, no nos hemos apartado de la hipótesis del paralelismo de las meridianas entre sí, así como del de sus perpendiculares; pero dijimos también en otra parte que á causa de la forma esférica de la tierra, todas las perpendiculares trazadas desde diversos puntos de una misma meridiana son líneas que convergen hacia los puntos Este y Oeste del horizonte, puesto que estos son los polos del círculo meridiano. Por una razón análoga todas las meridianas que se pueden considerar trazadas por distintos puntos de una misma línea dirigida de Oriente á Poniente, son convergentes hacia los polos de la tierra, que lo son también del círculo ecuatorial cuyo plano es perpendicular á todos los meridianos. La suposición del paralelismo no produce error sensible cuando se trata de pequeñas distancias, y aun puede admitirse siempre para el cálculo de las coordenadas sin inconveniente alguno, porque es claro que tal hipótesis equivale á adoptar en el cálculo los ángulos que los diversos lados trigonométricos forman con el meridiano del punto de partida, aunque estos difieran sensiblemente de sus azimutes tales como se observarían en un extremo del lado mismo; pero hay casos en que no se puede prescindir de tomar en cuenta la convergencia de los meridianos sin exponerse á cometer graves equivocaciones.

Si en los extremos de una línea situada próximamente de Oriente á Occidente, se observan los azimutes directo é inverso de la misma, en lugar de encontrar entre ellos una diferencia de 180°, se hallará 180°, más ó menos una cantidad, que á la latitud media de la República, puede estimarse en cosa de 1′ por cada legua de distancia, la cual proviene de la convergencia de los meridianos. Como las operaciones topográficas en nuestro país abrazan muchas veces extensiones considerables, me parece de todo punto necesario establecer métodos para llevar en cuenta la convergencia, por lo menos cuando se desea comprobar la exactitud de las operaciones recurriendo á observaciones azimutales directas, ó bien cuando se tiene necesidad de saber cuál es la orientación de todas las líneas que limitan una figura, como sucede á veces al definir los linderos de una propiedad rústica. Omitiendo aquella corrección, podría suceder que, siendo buenas las operaciones, se encontrase á los dos ó tres miriámetros una diferencia en los azimutes que podría llegar á 8′ ó más, la que se atribuiría tal vez á error en las observaciones, y en tal caso se deformaría el polígono al quererlo distribuir.

En los tratados de Geodesia se establecen fórmulas sencillas para calcular la convergencia; pero como contienen ciertos datos que comunmente no posee el topógrafo, las he sustituído con otra que sin sacrificio de exactitud, sólo demanda el conocimiento de la latitud media de la localidad en que se opera, y esto con aproximación de la cuarta parte y aun de la mitad de un grado.

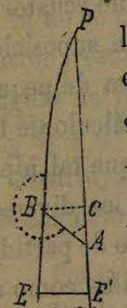


Fig.ª 49ª

Sea P (figura 49ª) el polo ó punto de convergencia de las meridianas de A y B; u el azimut del lado $A\ B$; y u' el inverso, ó el azimut de $B\ A$. Llamemos, además, φ y φ' respectivamente las latitudes de A y B, que siendo $E\ E'$ el ecuador, serán iguales á los arcos $A\ E'$ y $B\ E$.

En el triángulo esférico $P\ A\ B$, atendiendo á que los lados $P\ A$ y $P\ B$ son complementos de las latitudes φ y φ' respectivamente se hallará:

$$\text{sen.}\, u' = -\,\text{sen.}\, u \,\frac{\cos.\, \varphi}{\cos.\, \varphi'},$$

y si designamos por c la convergencia de los meridianos se tiene:

$$u' = 180^\circ + u + c$$

Tomando el *seno* de este ángulo y teniendo presente que por ser c muy pequeño puede tomarse la unidad por su *coseno*, y el arco por su *seno*, resultará:

$$\text{sen.}\, u' = -\,\text{sen.}\, u - c \cos.\, u$$

Igualando los dos valores de sen. u' y llamando d la pequeña diferencia de latitud de A y B, se obtiene:

$$\text{sen.}\, u + c \cos.\, u = \frac{\text{sen.}\, u \cos.\, \varphi}{\cos.\, (\varphi + d)} = \frac{\text{sen.}\, u \cos.\, \varphi}{\cos.\, \varphi - d\, \text{sen.}\, \varphi}$$

Dividiendo los dos términos del segundo miembro por cos. φ, resulta:

$$\text{sen.}\, u + c \cos.\, u = \frac{\text{sen.}\, u}{1 - d \tan.\, \varphi}$$

Como el denominador difiere muy poco de la unidad, elévese al numerador hasta la primera potencia, y entónces:

$$\text{sen.}\, u + c \cos.\, u = \text{sen.}\, u + d \tan.\, \varphi\, \text{sen}\, u$$

de donde resulta:

$$c = d \tan.\, \varphi \tan.\, u$$

Para hallar el valor de d, si desde B se traza el arco $B\ C$ perpendicular á la meridiana de A, tendremos que la latitud del punto C será sensiblemente la misma que la de B, y entonces la distancia $A\ C$ expresada en segundos, será igual á d. En el triángulo $A\ B\ C$ que por su pequeñez puede suponerse plano, llamando k el lado $A\ B$, se tiene:

$$A\ C = k \cos.\, u$$

y designando por ρ el radio del meridiano terrestre, el número de segundos que abraza la distancia $A\ C$ será:

$$d = \frac{648000'' \times A\ C}{\pi\, \rho} = \frac{A\ C}{\rho\, \text{sen.}\, 1''} = \frac{k \cos.\, u}{\rho\, \text{sen.}\, 1''}$$

Sustituyendo este valor en el de c se obtiene:

$$c = \frac{k\, \text{sen.}\, u \tan.\, \varphi}{\rho\, \text{sen.}\, 1''}$$

Recordando que k sen. u es la diferencia de abscisas entre A y B que antes hemos designado por x, si hacemos $F = \frac{\tan.\, \varphi}{\rho\, \text{sen.}\, 1''}$, la fórmula anterior será finalmente:

$$c = F\, x$$

Los valores de F dependen de φ, y por consiguiente, he podido calcular sus logaritmos, que constan en la tabla siguiente, cuyo argumento es la latitud φ.

LOGARITMOS DEL FACTOR F.

LATITUD.	LOG. F.	Dif. por 1'.	LATITUD.	LOG. F.	Dif. por 1'.	LATITUD.	LOG. F.	Dif. por 1'.
15°00'	7.9404	5.0	21°00'	8.0963	3.7	27°00'	8.2190	3.1
15 30	7.9554	4.8	21 30	8.1075	3.7	27 30	8.2282	3.0
16 00	7.9699	4.7	22 00	8.1185	3.6	28 00	8.2374	3.0
16 30	7.9839	4.6	22 30	8.1293	3.6	28 30	8.2465	3.0
17 00	7.9977	4.4	23 00	8.1399	3.5	29 00	8.2554	2.9
17 30	8.0110	4.3	23 30	8.1503	3.4	29 30	8.2643	2.9
18 00	8.0240	4.2	24 00	8.1605	3.4	30 00	8.2730	2.9
18 30	8.0368	4.1	24 30	8.1706	3.3	30 30	8.2817	2.9
19 00	8.0492	4.0	25 00	8.1806	3.3	31 00	8.2903	2.8
19 30	8.0613	4.0	25 30	8.1904	3.2	31 30	8.2988	2.8
20 00	8.0732	3.9	26 00	8.2000	3.2	32 00	8.3073	2.8
20 30	8.0849	3.8	26 30	8.2096	3.1	32 30	8.3156	2.8
21 00	8.0963		27 00	8.2190		33 00	8.3239	

Admitiendo que por los métodos enseñados en el Capítulo V se pueda medir un azimut con la aproximación de 2', es claro que debemos considerar que esta cantidad es el error posible de la observación directa, ya sea por exceso ó por defecto. Si, pues, á cosa de cuatro leguas al Oriente ó al Occidente del punto en que se ha medido el azimut de una línea, se mide también el de otra y se comparan las dos observaciones deduciendo uno de los azimutes por medio del otro y de los ángulos de la cadena, toda diferencia superior á 4' no debe suponerse originada por el error posible de las medidas directas, sino que fundadamente debe atribuirse al efecto de la convergencia de los meridianos. En otros términos: debe tomarse en cuenta la convergencia al asignar los azimutes de las líneas establecidas á más de cuatro leguas al Este ó al Oeste del punto en que se haya hecho la orientación de un polígono, en atención á que desde esa distancia el error ocasionado por la hipótesis del paralelismo de los meridianos puede considerarse superior al error posible de la observación directa.

Para aplicar la sencillísima fórmula $c = Fx$, debe comenzarse por tomar el logaritmo de F que corresponda á la latitud media del lugar en que se trabaja, en la cual no importa gran cosa cometer un error de varios minutos, y este logaritmo es el que se emplea para toda la cadena. De esta manera no es indispensable calcular una por una las convergencias que corresponden á todos los lados por medio de su proyección x, sino que puede tomarse en lugar de esta cantidad, la suma algebraica de las proyecciones comprendidas entre los puntos cuyos meridianos se trata de comparar. Así, por ejemplo, si en la triangulación representada en la figura 46ª se quisiera calcular la convergencia de los meridianos que pasan por los vértices J y R, tendríamos:

$$\begin{aligned} \text{Proyección de } JM &= +\ 10789^{\text{m}} \\ \text{,, } \quad \text{de } MR &= +\ \ 5641 \\ \hline x &= +\ 16430^{\text{m}} \end{aligned}$$

La latitud media de la localidad en que medí aquella cadena es próximamente $\varphi = 22°\ 29'$. Obtendremos pues:

$$\begin{aligned} F \ldots\ldots\ldots\ldots &\ 8.1289 \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots &\ 4.2156 \\ \hline c \ldots\ldots\ldots\ldots &\ 2.3445 \qquad c = 3'\ 41'' \end{aligned}$$

En la suposición del paralelismo hallamos que los azimutes de los lados que parten de R son los que constan en el número 98; pero tomando en cuenta la convergencia sería preciso aumentarles la cantidad c, de suerte que el del lado $R\,Y$, por ejemplo, vendría á ser 99° 16' 3''. Con el mismo valor de F hallaríamos que los meridianos que pasan por los vértices extremos J é Y tienen una convergencia de 5' 50'', de suerte que si en Y hubiéramos medido el azimut del lado YR, deberíamos haber encontrado 279° 18' 12'' en lugar de 279° 12' 22'' que resultó por la deducción partiendo del punto J.

En la fórmula general que da el azimut inverso:

$$u' = u \pm 180° + c$$

debe atenderse á los signos para evitar equivocaciones. En el segundo término se tomará el signo superior ó el inferior según que u sea menor ó mayor que 180°, y en cuanto á c se tomará positivo siempre que lo sea x, quiere decir: siempre que el meridiano cuya convergencia se desea hallar esté al Occidente del que sirve de punto de partida. Supongamos, por ejemplo, que en Y se hubiera obtenido por la observación directa:

$$\text{az. } YR = u = 279^\circ\ 18'\ 12''.$$

y que quisiésemos hallar su inverso $u' = \text{az. } RY$. Siendo Y el punto de partida, la proyección del lado YR sobre la perpendicular á la meridiana, sería negativa, esto es: $x = -9557^m$, y tendremos:

F 8.1298		$u - 180^\circ = 99^\circ\ 18'\ 12''$
x .... 3.9803—		$c = \quad -2 \quad 9$
c .... 2.1101—		$u' = 99^\circ\ 16'\ 3''$

que fué el mismo resultado que obtuvimos partiendo de J.

CAPITULO VIII.

CONSTRUCCIÓN DEL PLANO DE LA TRIANGULACIÓN.

105. La serie de operaciones descritas hasta aquí nos ha proporcionado todos los elementos necesarios para proceder á la construcción del plano, ó lo que es lo mismo, á la formación de una figura semejante á la que abraza la red trigonométrica. La construcción de los planos, que se designa algunas veces con el nombre de *planografía*, es una operación realmente muy sencilla en cuanto á su parte teórica; pero cuyo resultado final, aunque depende en gran manera de la habilidad del dibujante, depende también de la precisión de los instrumentos y de los métodos que adopte, y por eso me parece oportuno trazar algunas reglas para la mejor elección de unos y otros, recomendando desde luego al lector la ejecución material de todas las operaciones, que es el único modo de adquirir la práctica necesaria para reducir al menor valor posible los errores inherentes á toda operación gráfica.

El simple hecho de que en una red trigonométrica se conozcan por la observación directa todos los ángulos de los triángulos componentes ó elementales, basta para dar á conocer la facilidad con que puede construirse una figura que le sea semejante, si bien el conocimiento único de aquellos datos no da los medios de ejecutar la construcción con arreglo á una *escala* ó relación determinada de antemano. Por el contrario, el conocimiento adicional de las distancias entre los vértices, permite fijar la escala, escoger deliberadamente el