CAPITULO VII.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DE LOS VÉRTICES.

97. Todo lo que se ha dicho en los Capítulos anteriores nos pone en estado de poder asignar á cada vértice trigonométrico una situación perfectamente definida con relación á los demás; pero en todos casos es muy conveniente, y en algunos del todo necesario, determinar la posición de cada uno de los puntos trigonométricos con entera independencia de los otros. Esto se consigue por medio de las anotaciones adoptadas en la Geometría analítica, esto es: refiriendo las posiciones á dos líneas fijas que se toman por ejes de coordenadas.

Aunque cualquier sistema de líneas puede llenar igualmente bien el oficio de ejes de coordenadas, se adoptan de preferencia la meridiana y su perpendicular en atención á que presentan desde luego un sistema de ejes rectangulares, que simplifica los cálculos, y á que la orientación de los lados trigonométricos se refiere á aquellas líneas. Vimos ya en efecto (núm. 76), que conociendo el azimut de un lado de la cadena, pueden deducirse con la mayor facilidad los de todos los demás, puesto que hasta ahora hemos admitido la hipótesis del paralelismo de las meridianas entre sí, así como el de sus perpendiculares. Todo consistirá, pues, en trazar sobre el croquis la meridiana y la perpendicular de cada vértice, y en combinar por adición ó sustracción el azimut conocido de uno de los lados, con los ángulos de la red. Así, por ejemplo, en la figura 46ª el azimut medido direc-

tamente es el del lado PJ; y para obtener los de todas las líneas que parten de P, no se tendrá que hacer otra cosa más que restar sucesivamente los ángulos que tienen ese punto por vértice. Designando por u el azimut medido, se tendrá:

$$\begin{aligned}
&\text{az. } PM = u - JPM\\
&\text{az. } PR = u - JPR = \text{az. } PM - MPR\\
&\text{az. } PA = u - JPA = \text{az. } PR - RPA
\end{aligned}$$

Para poder continuar con los triángulos que sigan, se calcula el azimut inverso de uno de los lados, de AP por ejemplo:

$$\text{az. } AP = \text{az. } PA + 180^\circ$$

y siguiendo el mismo método, puede obtenerse por comprobación el azimut del lado primitivo, de esta manera:

$$\begin{aligned}
&\text{az. } AY = \text{az. } AP - PAY\\
&\text{az. } YA = \text{az. } AY + 180^\circ\\
&\text{az. } YR = \text{az. } YA - AYR\\
&\text{az. } RY = \text{az. } YR - 180^\circ\\
&\text{az. } RM = \text{az. } RY + YRM\\
&\text{az. } MR = \text{az. } RM - 180^\circ\\
&\text{az. } MJ = \text{az. } MR - RMJ\\
&\text{az. } JM = \text{az. } MJ - 180^\circ\\
&\text{az. } JP = \text{az. } JM - MJP
\end{aligned}$$

El último valor es el azimut inverso del primitivo u, y por consiguiente deberá resultar igual á él, con diferencia de 180°.

De esta manera con la meridiana y perpendicular que pasan por cada vértice, quedan formados tantos triángulos rectángulos como lados tiene la red, y en cada uno se conoce la hipotenusa y los ángulos, siendo uno de ellos el azimut del lado trigonométrico correspondiente. Nada es, pues, más sencillo que calcular los catetos de esos triángulos, ó sea las *proyecciones* de los lados trigonométricos sobre la meridiana y su perpendicular; proyecciones que vienen á ser las diferencias de coordenadas de los vértices unidos por cada uno de los lados.

98. El origen de las coordenadas se elige arbitrariamente, y por lo

común es el más importante de los vértices, á no ser que se quiera referir la cadena á la posición de un punto fijado de antemano, en cuyo caso lo que debe hacerse es determinar la situación de uno de los vértices trigonométricos por lo menos, respecto de aquel punto, problema que no viene á ser más que una simple transformación de coordenadas, para pasar de un sistema rectangular á otro también rectangular de ejes paralelos á los primeros; y todo queda reducido á añadir una cantidad constante á las coordenadas, calculadas respecto de cualquiera de las estaciones trigonométricas, tomada al principio por origen.

Por lo general, se toma la meridiana por eje de ordenadas, y su perpendicular por eje de abscisas; y así, designando por k la longitud de un lado cualquiera y por u su azimut, la diferencia de abscisas y ordenadas de sus extremos, se tiene por las fórmulas siguientes:

$$x = k \operatorname{sen.} u \qquad y = k \cos. u$$

Los signos de x é y serán los que corresponden al *seno* y al *coseno* del azimut. Según el modo que he adoptado de contar este ángulo, resulta que el *seno* es positivo en los dos primeros cuadrantes y negativo en los dos últimos; mientras que el *coseno* es positivo en el primero y el cuarto, y negativo en el segundo y el tercero. Para mayor claridad pondré en forma de tabla los signos y los valores de las líneas trigonométricas, para los diversos azimutes que suponen el punto en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Cuadrantes.	Azimutes.	x	y
I ó bién *N. O.*	$u < 90°$	$+ k \operatorname{sen.} u$	$+ k \cos. u$
II „ *S. O.*	$u > 90$	$+ k \operatorname{sen.} (180° - u)$	$- k \cos. (180° - u)$
III „ *S. E.*	$u > 180$	$- k \operatorname{sen.} (u - 180°)$	$- k \cos. (u - 180°)$
IV „ *N. E.*	$u > 270$	$- k \operatorname{sen.} (360° - u)$	$+ k \cos. (360° - u)$

Por ejercicio tomemos provisionalmente por origen el punto *R* de la figura 46ª, y calculemos las coordenadas de los vértices situados á su derredor, que ofrecen ejemplos de los cuatro casos. El azimut medido es el del lado *J P*, y resultó de 50° 36′ 30″. Con este y los ángulos corregidos que constan en el registro que termina el Capítulo anterior, se obtiene:

az. *J P* =	230°36′ 30″
J P M = −	59 53 29
M P R = −	39 27 19
az. *P R* =	131°15′ 42″
az. *R P* =	311 15 42

Con este azimut y los ángulos corregidos al derredor de *R* se calculan los azimutes de todos los lados que parten de *R*, á saber:

az. *R Y* = 99° 12′ 22″; az. *R A* = 65° 53′ 36″; az. *R P* = 311° 15′ 42″; az. *R M* = 227° 23′ 14″

y el cálculo de las coordenadas respecto de *R* será:

R Y.........	3.9859749	....	3.9859749
az. *R Y*...... sen......	9.9943696	cos......	9.2040833−
	3.9803445		3.1900582−
	$x = + 9557^{m}.5$		$y = - 1549^{m}.0$
R A.........	3.9077614	....	3.9077614
az. *R A*...... sen......	9.9603693	cos......	9.6111813
	3.8681307		3.5189427
	$x = + 7381^{m}.3$		$y = + 3303^{m}.3$
R P.........	4.0033992	....	4.0033992
az. *R P*...... sen......	9.8760477−	cos......	9.8192141
	3.8794469−		3.8226133
	$x = - 7576^{m}.1$		$y = + 6646^{m}.9$
R M.........	3.8845400	....	3.8845400
az. *R M*...... sen......	9.8668460−	cos......	9.8306144−
	3.7513860−		3.7151544−
	$x = - 5641^{m}.4$		$y = - 5189^{m}.8$

En estos cálculos se toman los logaritmos de los lados, tales como resultan de la resolución definitiva de los triángulos, con el objeto de evitar los pequeños errores que podrían originarse del diverso grado de aproximación numérica, y también para evitar trabajo innecesario.

Se pasa en seguida á otro de los puntos tales como P ó M, cuyas coordenadas se tienen ya calculadas, á fin de hallar las de los vértices que faltan, como sucede con el punto J. El az. $P\,R$ combinado con los ángulos en P, dará: az. $P\,J = 230°\ 36'\ 30''$, y con este elemento y la longitud del lado, se hallan las diferencias de coordenadas de sus extremos, que serán $-\ 8854^m.3$ de proyección en la perpendicular, y $-\ 7270^m.8$ de proyección en la meridiana. Estas diferencias combinadas con las coordenadas de P, producen: $x = -\ 16430^m.4$ é $y = -\ 623^m.9$ para el punto J. De la misma manera se prosigue en toda la cadena.

Los números precedentes son las coordenadas referidas al vértice R; pero si quisiéramos cambiar de origen, restaríamos de estas las coordenadas del nuevo origen atendiendo á los signos. Supongamos, por ejemplo, que con el objeto de que todas las ordenadas resulten del mismo signo, creyéramos conveniente adoptar el punto P por origen. Como las coordenadas de este referidas á R, son: $x = -7576^m.1$, $y = +\ 6646^m.9$, obtendríamos:

Vértices.	x	y
J	$-\ 8854^m3$	$-\ 7270^m8$
P	0. 0	0. 0
A	$+\ 14957.\ 4$	$-\ 3344.\ 0$
Y	$+\ 17133.\ 6$	$-\ 8195.\ 9$
R	$+\ 7576.\ 1$	$-\ 6646.\ 9$
M	$+\ 1934.\ 7$	$-\ 11836.\ 7$

Donde luego se comprende que no es necesario que el origen pase precisamente por un punto trigonométrico, y aun es conveniente elegirlo de manera que todas las coordenadas resulten positivas, en atención á que hay entonces menos peligro de equivocar los signos cuando aquellas tengan que combinarse. Así, por ejemplo, adoptando por ejes la meridiana que pasa por el punto más oriental J, y la perpendicular que pasa por el más meridional M, se conseguirá el objeto indicado. El origen que resulta de la intersección de ambas líneas, se hallará $4565^m.8$ al Sur de J, y 10789^m0 al Oriente de M, que son las proyecciones del lado $J\,M$ sobre la meridiana y su perpendicular. De aquí se deduce que las coordenadas de este nuevo origen respecto del que pasa por P, son: $x = -\ 8854^m.3$, $y = -\ 11836^m.7$, y haciendo la transformación se obtiene:

Vértices.	x	y
J	0^m0	4565^m8
P	8854. 2	11836. 7
A	23811. 7	8492. 7
Y	25987. 9	3640. 8
R	16430. 4	5189. 8
M	10789. 0	0. 0

99. La comprobación del cálculo de las coordenadas consiste en comparar la diferencia de posición de dos puntos extremos, sirviéndose de distintos lados. Por ejemplo, la suma algebraica de las proyecciones de $J\,P$, $P\,A$ y $A\,Y$ dará la diferencia de coordenadas de los vértices J é Y, la cual también puede obtenerse por las proyecciones de los lados $J\,M$, $M\,R$ y $R\,Y$. Los dos resultados deben ser iguales, prescindiendo de los pequeños errores causados por la aproximación numérica. En nuestro caso se tendrá:

Proyección de	$J\,P$	$+\ 8854^m3$ ... $+\ 7270^m8$		Proyección de	$J\,M$	$+\ 10789^m0$ ... $-\ 4565^m8$
„	$P\,A$	$+14957.\ 4$ ... $-3344.\ 0$		„	$M\,R$	$+\ 5641.\ 4$ ... $+5189.\ 8$
„	$A\,Y$	$+\ 2196.\ 2$ ... $-4851.\ 9$		„	$R\,Y$	$+\ 9557.\ 5$ ... $-1549.\ 0$
		25987. 9 $-$ 925. 1				25987. 9 $-$ 925. 0

El resultado de esta prueba, que debe hacerse antes de combinar las proyecciones para hallar las coordenadas de los vértices, indica que no ha habido equivocación alguna en el cálculo.

La concordancia de los resultados debe existir siempre que la triangulación sea una cadena como la que sirve de ejemplo; pero puede haber otros casos en que no exista, aun cuando el cálculo esté libre de error. Esto suele verificarse cuando se comparan las coordenadas de dos puntos distantes, deducidas por medio de dos ó más cadenas independientes, como sucedería si partiendo de un mismo punto situado, por ejemplo, en un perímetro muy extenso, se formasen dos cadenas de triángulos dirigidas en sentidos opuestos y que volviesen á concurrir en otro punto distante del primero. En este caso, aunque la base de ambas triangulaciones fuese la misma, las pequeñas modificaciones de los ángulos que son necesarias para reducir á 180° la suma de los de cada triángulo, originarían también ligeras variaciones en las distancias, y por consecuencia, se hallaría en general alguna diferencia entre las coordenadas del vértice extremo y común á las dos cadenas.

La falta de armonía entre los resultados, aun en la misma cadena trigonométrica, puede también provenir de esta otra causa. Algunos ingenieros son de opinión que el cálculo de los azimutes de los lados debe hacerse valiéndose de los ángulos *observados* y no de los corregidos, como lo hice en el ejemplo precedente. Para proceder así se fundan en el hecho de que la corrección de los ángulos para reducirlos á la suma teórica, siempre se hace con más ó menos arbitrariedad. Este hecho es innegable y más de una vez lo he manifestado así; pero también es cierto que siendo los errores de observación ya positivos ó ya negativos, es muy probable que en el conjunto de los lados de una triangulación se verifique una compensación más ó menos completa, cuyo efecto inmediato es el de no alterar sensiblemente las direcciones de los mismos lados. Aun cuando resultase alguna ligerísima alteración, siempre la figura que se obtenga será *cerrada*, es decir: sujeta á la condición geométrica de que la suma de sus ángulos interiores sea igual á $(n-2)\times 180°$, siendo n el número de lados; condición que no puede existir sino accidentalmente, cuando no es de 180° la suma de los ángulos de cada triángulo elemental.

100. Sin hacer mención de otros casos análogos en que pueden hallarse diferencias entre las coordenadas de un punto distante, obtenidas por diversos sistemas de líneas y ángulos, paso á exponer el

método de corrección que he usado algunas ocasiones para distribuir el error entre todas las partes elementales de cada sistema. Supongo para esto que tanto los lados como los ángulos necesitan corrección, siendo constante la de los segundos y proporcional á su longitud la de los primeros.

Sean X' Y' respectivamente las diferencias de abscisas y ordenadas entre los puntos A y B (figura 47ª), obtenidas por un sistema de lados trigonométricos AM, MN, NB; y X'', Y'' las mismas diferencias obtenidas por otro sistema AP, PQ, QB. Sea, además, n el número de lados del primer sistema, y n' el del segundo. Como las diferencias de coordenadas provienen de la suma algebraica de las proyecciones, tendremos:

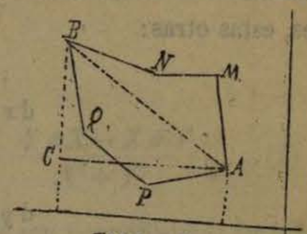

Fig.ª 47ª

PRIMER SISTEMA.	SEGUNDO SISTEMA.
$X' = x'_1 + x'_2 + \dots\dots x'_n$	$X'' = x''_1 + x''_2 + \dots\dots x''_{n'}$
$Y' = y'_1 + y'_2 + \dots\dots y'_n$	$Y'' = y''_1 + y''_2 + \dots\dots y''_{n'}$

Si las operaciones fueran perfectas, deberían haber resultado las ecuaciones $X' - X'' = 0$; $Y' - Y'' = 0$. Así es que para satisfacerlas establezcamos las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} \Delta X' + \Delta X'' &= X' - X'' \\ \Delta Y' + \Delta Y'' &= Y' - Y'' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (1)$$

en las que designo por Δ la corrección que debe sufrir la cantidad á la cual va antepuesta. Como estas correcciones son las resultantes de las que corresponden á todas las proyecciones, considerando á las correcciones de estas últimas como cantidades diferenciales, á causa de su pequeñez, tendremos:

$\Delta X' = dx'_1 + dx'_2 + \dots\dots dx'_n$	$\Delta X'' = dx''_1 + dx''_2 + \dots\dots dx''_{n'}$
$\Delta Y' = dy'_1 + dy'_2 + \dots\dots dy'_n$	$\Delta Y'' = dy''_1 + dy''_2 + \dots\dots dy''_{n'}$

Según vimos en otra parte, las fórmulas que dan las proyecciones, son:

$$x = k \operatorname{sen.} u \qquad y = k \cos. u$$

siendo u el azimut contado desde 0° hasta 360°, y k el lado trigonométrico. Por la diferenciación se obtienen fácilmente de las anteriores, estas otras:

$$dx = + y\,du + x\frac{dk}{k}$$

$$dy = - x\,du + y\frac{dk}{k}$$

La cantidad du representa la corrección angular expresada en partes del radio, y dk la corrección del lado k. Estas últimas debiendo ser proporcionales á la longitud de los lados, la relación $\frac{dk}{k}$ es constante. Designándola por r, y aplicando las fórmulas anteriores á todas las diferencias elementales de coordenadas, se obtiene:

$$\Delta X' = +(y'_1 + y'_2 + \ldots\ldots y'_n)du + (x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots x'_n)r = +Y'du + X'r$$
$$\Delta Y' = -(x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots x'_n)du + (y'_1 + y'_2 + \ldots\ldots y'_n)r = -X'du + Y'r$$

Del mismo modo hallaríamos:

$$\Delta X'' = + Y''du + X''r \qquad \Delta Y'' = - X''du + Y''r$$

con lo que las ecuaciones (1) de condición, serán:

$$(X' + X'')r + (Y' + Y'')du = X' - X''$$
$$(Y' + Y'')r - (X' + X'')du = Y' - Y''$$

en las que todo es conocido con excepción de du y r, que pueden determinarse por su combinación. Designando para abreviar por X

é Y respectivamente los resultados medios, y por ΔX, ΔY las semidiferencias obtenidas, esto es:

$$X = \tfrac{1}{2}(X' + X'') \qquad \Delta X = \tfrac{1}{2}(X' - X'')$$
$$Y = \tfrac{1}{2}(Y' + Y'') \qquad \Delta Y = \tfrac{1}{2}(Y' - Y'')$$

las ecuaciones precedentes vendrán á ser:

$$Xr + Y du = \Delta X$$
$$Yr - X du = \Delta Y$$

cuya resolución dará independientemente:

$$r = \frac{X\Delta X + Y\Delta Y}{X^2 + Y^2} \qquad du = \frac{Y\Delta X - X\Delta Y}{X^2 + Y^2} \ldots\ldots (2)$$

Una vez calculadas r y du, que siempre son pequeñísimas fracciones, se puede corregir cada una de las diferencias elementales, valiéndose para ello de logaritmos de cuatro cifras decimales solamente, por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} dx &= xr + y\,du \\ dy &= yr - x\,du \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Para facilitar el cálculo logarítmico de r y du, si llamamos K la distancia de los puntos extremos A y B, y U el azimut de uno respecto del otro, se tiene en el triángulo rectángulo $A\,B\,C$:

$$\tan. U = \frac{X}{Y} \qquad K = \frac{X}{\operatorname{sen.} U} = \frac{Y}{\cos. U} \ldots\ldots\ldots (4)$$

y entonces las ecuaciones (2) serán:

$$r = \frac{X\Delta X + Y\Delta Y}{K^2} \qquad du = \frac{Y\Delta X - X\Delta Y}{K^2} \ldots\ldots (5)$$

Apliquemos estas fórmulas. Si en los triángulos que han servido de ejemplo para el cálculo de coordenadas, hubiéramos hecho uso de los ángulos *observados* tales como constan en el registro que termina el Capítulo precedente, habríamos hallado algunas diferencias entre las coordenadas del punto extremo Y (figura 46ª), según que se determinasen por la parte P, A, Y, ó por M, R, Y. Si proyectásemos separadamente sobre los ejes los lados $J\,P$, $P\,A$, $A\,Y$, y en seguida $J\,M$, $M\,R$, $R\,Y$, obtendríamos los siguientes resultados prescindiendo de las fracciones de metro:

Por $J\,P$, $x'_1 = +\ 8854^m$ $y'_1 = +7271^m$	Por J M, $x''_1 = +10789^m$ $y''_1 = -4566^m$
Por $P\,A$, $x'_2 = +14958$ $y'_2 = -3342$	Por M R, $x''_2 = +\ 5642$ $y''_2 = +5189$
Por $A\,Y$, $x'_3 = +\ 2177$ $y'_3 = -4852$	Por $R\,Y$, $x''_3 = +\ 9557$ $y''_3 = -1551$
$X' = +25989^m$ $Y'' = -\ 923^m$	$X'' = +25988^m$ $Y'' = -\ 928^m$

Las sumas algebraicas de estas proyecciones representan las diferencias de coordenadas de los puntos J é Y, y se ve que no resultan enteramente iguales á causa de haber usado los ángulos observados. Las discordancias no pueden calificarse de muy considerables si se atiende á que la distancia que hay entre los dos puntos excede de seis leguas; pero sin embargo, distribuyamos la corrección entre los dos vértices aplicando las fórmulas (4) y (5), y en seguida la (3).

$X = +\ 25988^m5$	$Y = -\ 925^m5$	X.......... 4 41478	.... 4.41478
$\Delta X = +\ \ 0.\ 5$	$\Delta Y = +\ \ 2.\ 5$	Y.......... 2.96638 — sen. U	9.99972
		tan. U.... 1.44840 — K	4.41506
		$U = 92°\ 2'\ 22''$	
$X \Delta X = +\ 12994.2$		$Y \Delta X = -\ \ 462.7$	
$Y \Delta Y = -\ \ 2313.7$		$X \Delta Y = -\ 64971.2$	
10680.5............	4.02857	— 65433.9.........	4.81580—
K^2............	8.83012	K^2.........	8.83012
r............	5.19845	d u.........	5.98568—
$r = +$	0.0000158	d $u = -$	0.0000968

El valor de d u dividido por sen. $1''$ dará $19''.96$ ó sea $20''$ por corrección angular, y como el teodolito sólo daba directamente $1'$, puede admitirse que d u es inferior al error posible de observación. En cuanto á $r = \frac{\mathrm{d}\,k}{k}$ es sólo de un poco más de un decímetro en diez mil metros, por lo cual inferimos que las discordancias se explican bien por estos pequeños errores.

Con los valores hallados se corrige cada una de las coordenadas ó proyecciones elementales como sigue:

PROYECCIONES DE $J\,P$.		PROYECCIONES DE $J\,M$.	
$x\,r = +\ 0^m14$	$y\,r = +\ 0^m12$	$x\,r = +\ 0^m17$	$y\,r = -\ 0^m07$
$y\,\mathrm{d}u = -\ 0.70$	$x\,\mathrm{d}u = +\ 0.86$	$y\,\mathrm{d}u = +\ 0.44$	$x\,\mathrm{d}u = +\ 1.05$
$\mathrm{d}x = -\ 0.56$	$\mathrm{d}y = +\ 0.98$	$\mathrm{d}x = +\ 0.61$	$\mathrm{d}y = +\ 0.98$
$x = +\ 8854.0$	$y = +\ 7271.0$	$x = +\ 10789.0$	$y = -\ 4566.0$
8854.6	7270.0	10789.6	4565.0

De igual manera se corrigen todas las demás proyecciones, teniendo siempre cuidado de hacer la corrección sustractiva para el sistema que dió resultados mayores, y que es el primero en nuestro caso. Las proyecciones corregidas son:

PRIMER SISTEMA.			SEGUNDO SISTEMA.		
Proyecciones de $J\,P$...	$+\ 8854^m.6$...	$+7270^m.0$	Proyecciones de J M...	$+10789^m.6$...	$-4565^m.0$
,, $P\,A$...	$+\ 14957.4$...	-3343.4	,, M R...	$+\ 5641.6$...	$+5189.6$
,, $A\,Y$...	$+\ 2176.5$...	-4852.1	,, $R\,Y$...	$+\ 9557.3$...	-1550.1
	$+25988^m.5$	$-\ 925^m.5$		$+25988^m.5$	$-\ 925^m.5$

Se ve que las sumas concuerdan perfectamente. En todos estos cálculos debe tenerse mucho cuidado con el juego de los signos.

Después de hecha la corrección se combinan las proyecciones para determinar las coordenadas de cada vértice. En este ejemplo, tomando el punto P por origen, resulta:

Vértices.	x	y
J	$-\ \ 8854^m6$	$-\ \ 7270^m0$
P..................	0.0	0.0
A	$+\ 14957.4$	$-\ \ 3343.4$
Y..................	$+\ 17133.9$	$-\ \ 8195.5$
R..................	$+\ \ 7576.6$	$-\ \ 6645.4$
M..................	$+\ \ 1935.0$	$-\ 11835.0$

Si se comparan estos valores con los del número 98, que se obtu-