rrección x que deben sufrir los ángulos de la primera mitad de la triangulación, partiendo de $A\ G$, para que el cálculo dé precisamente el valor adoptado.

Se tendrá: $\varepsilon_1 = +0.19$ y $a_1 = 3929.67$.

Triángulo $A\ G\ Z$......	$\alpha_1 = 21.0$	$\beta_1 = 11.2$	Log. const......	6.63778
» $A\ Z\ X$......	$\alpha_2 = 23.5$	$\beta_2 = 2.2$	$\frac{\varepsilon_4}{a_4}$......	5.68439 +
» $X\ Z\ T$......	$\alpha_3 = 0.4$	$\beta_3 = 14.8$		
» $T\ X\ U$......	$\alpha_4 = 22.5$	$\beta_4 = 11.6$		2.32217 +
	64.4	+ 39.8 = 107.2	....	2.03019
				0.29198 +
				$x = +1''.96$

Por el mismo procedimiento encontraríamos que en la segunda mitad de la cadena apoyada en $A\ H$ como base, la corrección es: $-1''.86$. Estos dos resultados son numéricamente menores que el error angular medio de la triangulación, el cual varía desde $0''$ hasta $3''.6$, según se ve en la tabla de los ángulos observados; por consiguiente, nada tiene de absurda la hipótesis establecida, y la diferencia final se explica perfectamente por la existencia de estos leves errores. Si sucediese lo contrario, creo que lo mejor sería revisar las series que produjeron los ángulos observados y desechar los resultados más discordes en el sentido conveniente para disminuir el error final, ó bien hacer aquellas suposiciones más libres de arbitrariedad y que menos deformen el polígono, no alterando mucho los valores angulares obtenidos por la observación directa. Por fortuna las discrepancias en las líneas de comprobación nunca son considerables, á menos que haya existido algún defecto notable en los instrumentos, ó algún vicio radical en la ejecución, lo que puede conocerse desde las primeras observaciones por las fuertes diferencias que resultan en los valores de los mismos elementos; pero en este caso las operaciones son esencialmente malas é inadmisibles y no podrían sujetarse razonablemente á ningún procedimiento fundado en principios científicos.

Antes de proseguir hagamos notar que si es muy pequeña la dife-

rencia resultante en el último lado, y si además todos los triángulos de la cadena son bien configurados, puede introducirse una modificación en nuestra fórmula (2) que facilita algo su aplicación, aunque en realidad es tan poco, que no vale la pena de exponerse por eso á encontrar resultados poco exactos. Suponiendo todos los ángulos de 60°, las diferencias logarítmicas tendrán 12.15 por valor medio, con lo que resulta:

$$x = (5.25217)\ \frac{\varepsilon_n}{n\, a_n}$$

Aplicada al caso anterior se tiene:

log. const..................	5.25217	
$\frac{\varepsilon_4}{a_4}$..................	5.68439 +	
4..................	$-$ 0.60206	
	0.33450 +	$x = +2''.16$

Aunque este guarismo sea sensiblemente el mismo que antes, conservaremos el primero para hacer las correcciones y adoptar los ángulos definitivos.

93. Paso ahora á trazar mi método para corregir los cálculos preliminares de la cadena. La práctica constante hasta hoy ha sido repetirlos, después de hacer á los ángulos las correcciones halladas por las fórmulas anteriores ú otras equivalentes; pero nuestras ecuaciones permiten operar con más rapidez y evitar la monotonía del cálculo trigonométrico usual, lo que por cierto no es indiferente cuando se trata de un gran número de triángulos. La relación (2) da:

$$\varepsilon_n = (3.36222)\, a_n x (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots \beta_n) \ldots\ldots (3)$$

que puede servir para encontrar la corrección que conviene á un lado cualquiera, y como esta es siempre muy pequeña, basta usar logaritmos de tres á cuatro cifras decimales.

Busquemos, por ejemplo, la corrección de la línea TX:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 = 21.0 & \beta_1 = 11.2 & \\
\alpha_2 = 23.5 & \beta_2 = \ \ 2.2 & \text{log. const.} \ldots\ldots\ldots \ 3.362 \\
\alpha_3 = \ \ 0.4 & \beta_3 = 14.8 & \alpha_3 \ldots\ldots\ldots \ 3.486 \\
 & & x \ldots\ldots\ldots \ 0.292 \\
\overline{\ \ 44.9} & \overline{28.2} \ldots\ldots \text{Suma} = 73.1 \ldots\ldots\ldots & 1.864 \\
 & & \left\{ \begin{array}{l} \ \ 9.004 \\ \varepsilon_3 = +\,0^{\text{m}}.10 \end{array} \right.
\end{array}
$$

El lado corregido será, pues, de $3064^{\text{m}}.5$. Nótese que la corrección de cada distancia se determina así independientemente de las demás, y que por tanto no hay peligro de que una equivocación influya en todos los lados, como sucede á menudo en el cálculo trigonométrico.

Puesto que deben corregirse todas las distancias, importa proceder con orden para hacerlo más pronto, de este modo: el logaritmo constante y el de x son comunes á todas las correcciones, y así, convendrá hacer una sola vez la suma; además, las diferencias logarítmicas correspondientes á cada triángulo deben sumarse con las de los triángulos precedentes que se tienen ya sumadas, de manera que lo mejor será sistemar el cálculo como sigue, en el que he designado por s la suma de α y β que pertenece á cada triángulo, y por S la de este y todos los anteriores á él.

$s_1 = 32.2$	$s_2 = 25.7$	$s_3 = 15.2$	$s_4 = \ 34.1$
$S_1 = 32.2$	$S_2 = 57.9$	$S_3 = 73.1$	$S_4 = 107.2$
3.654+	3.654+	3.654+	3.654+
α_1.... 3.401	α_2.... 3.573	α_3.... 3.486	α_4.... 3.594
S_1.... 1.507	S_2.... 1.762	S_3.... 1.864	S_4.... 2.030
8.562+	8.989+	9.004+	9.278+
$+\,0^{\text{m}}.04$	$+\,0^{\text{m}}.10$	$+\,0^{\text{m}}.10$	$+\,0^{\text{m}}.19$

Lo mismo se procede para corregir la otra mitad de la cadena con el valor correspondiente de x, que en nuestro caso es negativo; y se pasa por último á practicar las correcciones de los otros lados, tales como GZ, BH, TZ, AX, etc., que no han servido de bases para calcular otros triángulos, y para los que por consiguiente, no deben entrar más que las α, pues el tercer ángulo de cada triángulo ha permanecido invariable.

Es más cómodo aún, corregir directamente el logaritmo de cada uno de los lados, para lo cual se tiene:

$$\text{log.}\,(a_n + \varepsilon_n) = \text{log.}\,a_n + M\,\frac{\varepsilon_n}{a_n}$$

Sustituyendo el valor de ε_n que hemos hallado antes, conseguiremos eliminar á a_n, y resultará:

$$\text{log.}\,(a_n + \varepsilon_n) = \text{log.}\,a_n + 0.0000001\,x\,S_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

ecuación en que he conservado la anotación S para indicar la suma de las diferencias logarítmicas hasta el orden n de triángulos. Esta última fórmula es tan sencilla, que no creo útil calcular por logaritmos la pequeña corrección de log. a_n; pues todo se reduce á multiplicar por S la diezmillonésima parte de x y añadir el producto con su signo, al logaritmo del lado que resultó en el cálculo preliminar. Como ejemplo, calculemos la corrección para el lado *Mixcoac — San Simón:*

$$
\begin{array}{ll}
0.000000196 \times 107.2 = 0.0000210 + & \\
\text{log.}\,a_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3.5943560 \\
\text{log.}\,(a_n + \varepsilon_n) \ldots\ldots\ldots & \overline{3.5943770}
\end{array}
$$

Este procedimiento da la mayor exactitud y tiene la ventaja de proporcionar desde luego el logaritmo del lado correcto que, como veremos después, se necesita para otros cálculos subsecuentes.

Para que el lector se familiarice con este método, pongo á continuación el cálculo para toda la cadena, en forma de tabla, que es como se hace con más facilidad y sin peligro de equivocación.

	α	β	s	S	log. $(a_n + \varepsilon_n)$	$a_n + \varepsilon_n$
Primera mitad.	21.0	11.2	32.2	32.2	*A Z*... 3.4009197	2517^{m}12
	23.5	2.2	25.7	57.9	*Z X*... 3.5735853	3746. 15
	0.4	14.8	15.2	73.1	*T X*... 3.4863597	3064. 50
	22.5	11.6	34.1	107.2	*U X*... 3.5943770	3929. 86
	—	—	—	—	——	——
$x = +1''.96$...	21.0		21.0	21.0	*G Z*... 3.4355388	2726. 08
	23.5		23.5	44.5	*A X*... 3.4849861	3054. 82
	0.4		0.4	44.9	*T Z*... 3.3456581	2216. 45
	22.5		22.5	67.4	*T U*... 3.6379634	4344. 74
Segunda mitad.	19.1	13.8	32.9	32.9	*A B*... 3.5597476	3628. 67
	8.2	12.3	20.5	53.4	*B X*... 3.5261323	3358. 40
	19.7	18.6	38.3	91.7	*X Y*... 3.5377249	3449. 25
	14.2	7.2	21.4	113.1	*U X*... 3.5943770	3929. 86
	—	—	—	—	——	——
$x = -1'.86$....	19.1		19.1	19.1	*H B*.. 3.6223203	4191. 02
	8.2		8.2	27.3	*A X*... 3.4849980	3054. 91
	19.7		19.7	47.0	*B Y*... 3.6613704	4585. 33
	14.2		14.2	61.2	*U Y*... 3.5191874	3305. 12

Para comprobación he repetido el cálculo de UX y AX en las dos partes de la triangulación, y se ve que concuerdan perfectamente á pesar de haber aproximado el valor de los lados hasta los centímetros; pero aun en las mejores triangulaciones, sólo se toman los decímetros, que es acaso más de lo que se necesita, y de lo que realmente se puede estar seguro de apreciar en las operaciones más exactas de la topografía.

94. Sucede con mucha frecuencia que ya sea por equivocación, ó ya por necesitarse pronto los valores aproximativos de los lados, se ejecutan los cálculos partiendo de un valor también aproximativo de la base; en tal caso, es muy fácil corregir toda la cadena sin repetir el cálculo. Sea, en efecto, C el factor de a en nuestra ecuación (1), el que suponemos constante, puesto que admitimos que se han corregido ya los ángulos y establecido definitivamente sus valores, según hemos visto en todo lo que antecede; entonces la ecuación mencionada será: $a_n = a\,C$.

Mas si la verdadera longitud de la base es $a + c$, se deberá hacer la corrección correspondiente al lado calculado a_n, y resulta:

$$a_n + c_n = (a + c)\,C$$

Eliminando á C se obtiene:

$$c_n = a_n \frac{c}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

lo que indica que las correcciones son proporcionales á las distancias. Como el factor $\frac{c}{a}$ es constante, se hará el cálculo con la mayor facilidad; pero es todavía mejor corregir los logaritmos por la ecuación siguiente que se deduce de las anteriores:

$$\log.(a_n + c_n) = \log.\,a_n + (9.63778)\frac{c}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

y todo queda reducido á sumar á cada logaritmo una cantidad constante.

Supongamos por un momento que la base de esta triangulación debiera reducirse á 2990 metros, y busquemos la corrección que corresponde á la línea TU cuyo valor y logaritmo constan en la tabla del cálculo precedente. Se tiene: $c = -2^{m}.032$, y los dos métodos de corrección serán:

ECUACIÓN (5).		ECUACIÓN (6).	
c......	0.30792—		
a......	3.47597		
Const	6.83195—		6.83195—
TU......	3.63796	Const.......	9.63778
	0.46991—		6.46973—
			—0.0002949
$c_n =$	— 2.95		
$TU =$	4344.74	TU......	3.6379634
$TU + c_n =$	4341.79		3.6376685......$TU + c_n = 4341^{m}.79$

la decimal —0.0002949 sería la corrección común á todos los logaritmos.

95. Habiendo expuesto ya los procedimientos generales para calcular y coordinar los elementos de una triangulación, creo que ellos serán suficientes para resolver todos los casos que se presenten en el orden común de esta clase de operaciones. En la imposibilidad de considerar en una obra elemental todos aquellos problemas que acaso se resolverían fácilmente por métodos particulares, estoy convencido de que el ingeniero y el calculador, bien penetrados del objeto que me propuse, hallarán siempre en estas indicaciones las bases para la resolución de casos especiales; con ellas y un conocimiento profundo de la trigonometría, cuyo estudio no cesaré de recomendar, se presentarán siempre los medios de evitar hipótesis infundadas y la propagación de errores que tiendan á alterar las condiciones geométricas de la figura.

En cuanto al límite 0.0002 de incertidumbre final en el lado de prueba, es claro que no debe tomarse por un precepto invariable, pues en triangulaciones de igual mérito los errores crecerán en general con el número de triángulos; pero en cadenas que no excedan de 30 á 40 triángulos lo creo aun algo exagerado, porque supone una diferencia en el cálculo de las dos partes de la cadena, de 1 metro en 2500, lo que probablemente no sucederá más que en el caso de que los errores angulares sean muy fuertes, ó que tengan el carácter de errores constantes.

El estudio de la influencia de los errores de observación, que acaso tendré ocasión de exponer en otra parte de esta obra, me ha conducido á considerar como indicios muy fundados de que en la triangulación no existen más que errores puramente fortuitos, los hechos de que la suma de las diferencias por exceso respecto de 180°, no discrepe mucho de la suma de las diferencias por defecto; así como que el número de triángulos en que se verifica lo primero, sea casi el mismo que aquel en que sucede lo segundo.

De aquí resulta que si designamos por m el valor medio del error angular, con abstracción del signo; por ω el error angular medio final, atendiendo á los signos; por ε_1 y ε_2 respectivamente las sumas de los errores positivos y negativos, y por R la relación entre los números de triángulos n_1 y n_2, cuyos errores son de distinto sig-

no, se tendrá en los n triángulos de la red trigonométrica:

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3n} \qquad \omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3n} \qquad R = \frac{n_1}{n_2}$$

y el mejor indicio cuando $\omega = 0$, y $R = 1$. En el valor de R tomaremos siempre por numerador el número más pequeño, á fin de que esta relación nunca resulte mayor que la unidad.

En la cadena que forma nuestro ejemplo, los errores positivos dan por suma $31''.1$, y los negativos $22''.4$; el número de triángulos de error positivo es 5, y el de los que tienen error por defecto es 4, de donde resulta $\omega = 0''.32$ y $R = 0.8$, valores bastante próximos á los límites antes indicados, para juzgar favorablemente del mérito de la triangulación. Como también resulta $m = 1''.98$, se ve que la corrección x hallada para coordinar los cálculos, es algo menor que el valor medio del error angular, y que por consiguiente fué muy razonable nuestra suposición.

96. En la triangulación que ha servido de ejemplo se hicieron doce repeticiones de cada ángulo con teodolitos que aproximaban á $10''$ la lectura angular. Como tipo de operaciones más comunes, voy ahora á presentar algunos triángulos de la última cadena que he medido haciendo uso de un teodolito pequeño cuya aproximación era sólo de $1'$, y en la que tomé los ángulos de tres á cuatro veces, siguiendo el método de repetición que se ha expuesto en el núm. 67. La base de esta triangulación, que consta como ejemplo en el núm. 25, es la línea JP (fig. 46ª), de 11457ᵐ.0, que une los cerros llamados de *San José* y de *Las Palmas*. En la tabla siguiente, que contiene cuatro triángulos de la red, la última columna presenta las longitudes de los lados opuestos á los ángulos corregidos, y son los resultados del cálculo preliminar.

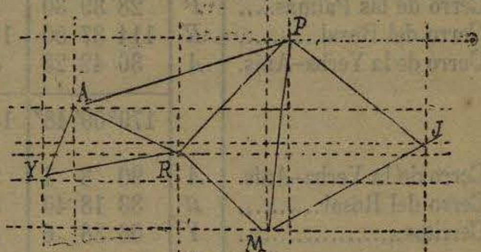

Fig.ª 46ª

La triangulación de que forman parte estos triángulos, fué bastante extensa en todos sentidos; pero suponiendo que sólo constase de los cuatro triángulos cuyos elementos se ven en la tabla, la figura 46ª manifiesta que formarían una verdadera cadena, en la cual no es posible aplicar los métodos de discusión y corrección que se aplicaron en el primer ejemplo. En efecto, aquellos procedimientos parten de la posibilidad de calcular un mismo lado por dos vías diferentes, lo que tiene lugar siempre que la triangulación forma una red trigonométrica; pero no puede verificarse en una simple cadena como en el caso actual. Además de esto, como ninguno de los vértices de este ejemplo, se presta á la comprobación de sumar todos los ángulos observados al derredor de un punto para comparar la suma á 360°, resulta que la única rectificación hecha para obtener los ángulos corregidos, consiste en reducir la de cada triángulo á la suma 180°, distribuyendo entre ellos el error. De esta manera se han obtenido las cantidades de la última columna.

VÉRTICES.	Letras.	Ángulos observados.	Ángulos corregidos.	Lados opuestos.
Cerro de San José.......	J	62°19′56″	62°19′46″	$MP = 11933^m7$
Cerro de las Palmas.....	P	59 53 39	59 53 29	$JM = 11715.3$
Cerro de San Marcos....	M	57 46 55	57 46 45	$JP = 11457.0$
		180°00′30″	180°00′00″	
Cerro de las Palmas.....	P	39 27 37	39 27 19	$MR = 7665.5$
Cerro de San Marcos....	M	56 40 31	56 40 13	$PR = 10078.6$
Cerro del Rosal..........	R	83 52 47	83 52 28	$MP = 11993.7$
		180°00′55″	180°00 00	
Cerro de las Palmas.....	P	28 39 30	28 39 34	$AR = 8086.2$
Cerro del Rosal..........	R	114 37 50	114 37 54	$AP = 15326.6$
Cerro de la Yerba-Anís.	A	36 42 28	36 42 32	$PR = 10078.6$
		179°59′48″	180°00′00″	
Cerro de la Yerba-Anís.	A	90 3 1	90 3 5	$RY = 9682.5$
Cerro del Rosal..........	R	33 18 43	33 18 46	$AY = 5317.7$
Cerritos..................	Y	56 38 6	56 38 9	$AR = 8086.5$
		179°59′50″	180°00′00″	

No es muy frecuente que las triangulaciones se extiendan en forma de cadenas en un solo sentido; pero sin embargo, en el Capítulo siguiente, después de tratar lo relativo al cálculo de las coordenadas de los vértices, indicaré un método que he aplicado alguna vez para coordinar, en casos análogos, los resultados obtenidos por caminos diferentes.