(figura 45ª) se mide el azimut $u = N\,C\,A$ de la dirección $C\,A$, y llamamos u' el azimut conocido $N'\,A\,B$ del lado trigonométrico $A\,B$, tendremos en el caso que representa la figura:

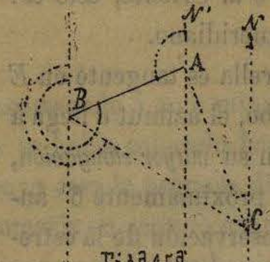

Fig.ª 45ª

$$A = 180° + u - u'$$
$$B = u' - (u + C)$$

y por consecuencia:

$$a = c\,\frac{\text{sen.}\,(u' - u)}{\text{sen.}\,C}\,; \qquad b = c\,\frac{\text{sen.}\,[u' - (u + C)]}{\text{sen.}\,C}$$

En los valores de A y B se harán las modificaciones que exija la situación del punto C respecto de los vértices, para lo cual conviene construir un croquis que la represente; y cuando se recurra á esta clase de procedimientos deben apuntarse en el registro, en la columna destinada á las *Notas*, todos los datos y explicaciones que se crean necesarias para evitar la confusión. El problema actual no es susceptible de una resolución muy exacta por este método, en atención á que la medida de un azimut en que se funda, no puede en lo general hacerse con el mismo grado de precisión que una observación angular entre dos puntos terrestres; pero en otra ocasión veremos que adquiere bastante importancia en la Planometría parcial cuando se hace uso de la *brújula*, que es un instrumento que da directamente ángulos azimutales respecto de una línea que difiere poco de la meridiana.

Para terminar esta parte de la triangulación diremos que cuando sea posible, conviene medir el azimut de dos ó más lados distantes, con el objeto de comprobar la orientación comparando el resultado de la observación directa, con el que se obtiene por medio de los ángulos de la cadena.

CAPITULO VI.

CÁLCULO DE LOS TRIÁNGULOS.

88. Luego que se han recogido en el terreno todos los datos y apuntes necesarios; que se han hallado los promedios de las series para convencerse, antes de abandonar el campo de operaciones, de que la suma de los tres ángulos de cada triángulo y de los que se observan al derredor de un mismo vértice, no difieren de la suma teórica más que una pequeña cantidad que no exceda de los límites de error que se crea conveniente admitir, y por último, luego que se ha construído el croquis de las operaciones, que es tan útil para aclarar las anotaciones del registro trigonométrico, se procede á la resolución de los triángulos para determinar en seguida la posición de cada vértice independientemente de los demás.

Los cálculos en realidad no ofrecen dificultad alguna, pues el caso común es uno de los más usuales de la trigonometría elemental, y si les he consagrado un Capítulo especial, es únicamente para indicar algunas reglas relativas al mejor modo de guiar las operaciones numéricas. En efecto, la marcha que debe seguirse en ella no es del todo indiferente, porque es fácil comprender que los pequeños errores de observación que siempre existen, aun después de hechas las correcciones con más ó menos arbitrariedad, pueden propagarse y combinarse de mil maneras diversas de un triángulo á otro, de tal suerte que produzcan diferencias apreciables en los últimos lados de la cadena. El calculador debe, por lo tanto, adoptar un camino sistemático para distribuir los errores del mejor modo posible, evitar su acumulación en una sola parte de la red trigonométrica é independerse hasta cierto punto de las influencias nocivas á la armonía de los resultados. Esto exige por lo común una resolución aproximativa, especialmente cuando no todos los ángulos se han observado desde el centro de estación, pues se recordará que en la fórmula que se emplea para reducirlos, entran como elementos los lados del triángulo; y en vista de los resultados preliminares es como se debe estudiar con la mayor atención el modo más conveniente de distribuir los errores resultantes.

Para la ejecución de los cálculos provisionales observaremos las reglas generales siguientes: 1ª Se comenzará por hacer la suma de los ángulos de cada triángulo y dividir entre ellos el error total por partes iguales, de modo que aquella se reduzca á 180°. 2ª Si hay uno ó más puntos centrales que sirvan de vértice común á varios ángulos cuya suma no dé exactamente 360°, se dividirá la diferencia también por igual entre todos ellos; mas como esta última operación altera naturalmente la suma de los ángulos de cada triángulo, es preciso hacerla en los otros dos ángulos con signo diferente. Estas dos reglas se siguen siempre que todas las observaciones son dignas de igual confianza; en el caso contrario podrá hacerse la distribución en razón del grado de incertidumbre; pero siempre con mucho discernimiento, principalmente si los errores angulares son de alguna consideración.

89. Algunos geómetras suponen que, en igualdad de circunstancias, un ángulo resulta tanto más exacto cuanto mayor es el número de observaciones de que proviene. Admitido este principio como cierto, se deduce que cuando los tres ángulos de un triángulo, ó bien cuando todos los ángulos que tienen un vértice común, no se han medido un mismo número de veces, el error final no deberá distribuirse por partes iguales, sino en proporción del grado de incertidumbre, ó lo que es lo mismo, en razón inversa del número de repeticiones que corresponden á cada ángulo. Según esto, sean A, B, C los tres ángulos obtenidos respectivamente por l, m y n observaciones, y $e = 180° - (A + B + C)$ el error resultante. Si llamamos x, y, z las correcciones, puesto que deben ser inversamente proporcionales á l, m y n, tendremos que los productos lx, my y nz serán iguales; y designándolos por P, podremos establecer las ecuaciones de condición:

$$lx = P \qquad my = P \qquad nz = P$$

Como, además, las correcciones deben ser tales que den e por suma, se tendrá:

$$e = P\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

de lo que resulta:

$$P = \frac{e}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{lmn}{lm + ln + mn}\, e \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

y por consiguiente:

$$x = \frac{P}{l} \qquad y = \frac{P}{m} \qquad z = \frac{P}{n} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sean, por ejemplo, $A + B + C = 180°\,1'\,30''$ y $l = 4$, $m = 5$, $n = 6$. Con estos datos se tiene:

$$P = -\frac{4 \times 5 \times 6}{20 + 24 + 30} \times 90 = -145.9$$

$$x = -36''.5 \qquad y = -29''.2 \qquad z = -24''.3$$

El principio que sirve de fundamento á este método, no creo que debe aceptarse de una manera general; pero al menos proporciona un medio de distribuir el error con menos apariencia de arbitrariedad.

90. Pasemos ahora al cálculo de la triangulación, tomando como primer ejemplo algunos triángulos de la cadena del Distrito representados en la figura 29ª Estos triángulos, aunque demasiado pequeños para que pudieran servir de tipo en las operaciones topográficas del orden común, forman parte de un trabajo especial ejecutado con esmero, y por lo tanto son propios para exponer el método general con que debe discutirse la distribución de los errores en una operación

delicada. En seguida presentaré otros triángulos del orden común, y medidos por consiguiente con más rapidez.

Los ángulos medios, ó sean los observados, constan en la tabla siguiente; al lado de ellos están los corregidos de la diferencia respecto de 180° y por último los adoptados para la resolución:

TRIANGULACION DEL DISTRITO.

Triángulos.	Nombres de los vértices.	Ángulos. Observados.	Reducidos á 180°	Admitidos.
F	Extremo oriental de la base.	65° 2′ 20.″4	65° 2′ 20.″4	65° 2′ 20.″[illegible]
G	„ occidental „	53 32 32. 5	53 32 32. 5	53 32 32.[illegible]
H	Tres Puentes................	61 25 7. 1	61 25 7. 1	61 25 7.[illegible]
		180 00 00. 0	180 00 00. 0	180 00 00.[illegible]
G	Extremo Oeste de la base..	74 26 43. 3	74 26 40. 4	74 26 38.[illegible]
H	Tres Puentes................	37 21 47. 5	37 21 44. 7	37 21 42.[illegible]
A	Ixtacalco (iglesia)..........	68 11 37. 7	68 11 34. 9	68 11 38.[illegible]
		180 00 8. 5	180 00 00. 0	180 00 00.[illegible]
A	Ixtacalco......................	72 56 36. 3	72 56 36. 7	72 56 40.[illegible]
G	Extremo Oeste de la base..	61 58 42. 1	61 58 42. 5	61 58 40.[illegible]
Z	Candelaria....................	45 4 40. 4	45 4 40. 8	45 4 39.[illegible]
		179 59 58. 8	180 00 00. 0	180 00 00.[illegible]
A	Ixtacalco......................	83 53 46. 7	83 53 48. 2	83 53 51.[illegible]
Z	Candelaria....................	54 10 41. 7	54 10 43. 3	54 10 41.[illegible]
X	San Simón (iglesia).........	41 55 26. 9	41 55 28. 5	41 55 27.[illegible]
		179 59 55. 3	180 00 00. 0	180 00 00.[illegible]
X	San Simón....................	36 16 1. 4	36 16 00. 5	36 16 00.[illegible]
Z	Candelaria....................	54 52 19. 6	54 52 18. 7	54 52 18.[illegible]
T	La Piedad (iglesia).........	88 51 41. 7	88 51 40. 8	88 51 40.[illegible]
		180 00 2. 7	180 00 00. 0	180 00 00.[illegible]

Triángulos.	Nombres de los vértices.	Ángulos. Observados.	Reducidos á 180°.	Admitidos.
T	La Piedad......................	61°12′ 32.″1	61°12′ 35.″3	61°12′ 35.″1
X	San Simón.....................	75 40 42. 1	75 40 45. 3	75 40 45. 6
U	Mixcoac (iglesia)............	43 6 36. 2	43 6 39. 4	43 6 39. 3
		179 59 50. 4	180 00 00. 0	180 00 00. 0
X	San Simón.....................	52 43 45. 8	52 43 42. 2	52 43 42. 5
U	Mixcoac........................	56 8 59. 6	56 8 56. 0	56 8 55. 9
Y	Coyoacán (iglesia)...........	71 7 25. 4	71 7 21. 8	71 7 21. 6
		180 00 10. 8	180 00 00. 0	180 00 00. 0
X	San Simón.....................	84 40 19. 2	84 40 17. 9	84 40 18. 2
Y	Coyoacán.......................	46 49 29. 2	46 49 27. 9	46 49 27. 8
B	Mexicaltzingo (iglesia).....	48 30 15. 4	48 30 14. 2	48 30 14. 0
		180 00 3. 8	180 00 00. 0	180 00 00. 0
X	San Simón.....................	68 43 41. 4	68 43 43. 7	68 43 42. 2
B	Mexicaltzingo................	51 40 35. 0	51 40 37. 3	51 40 35. 4
A	Ixtacalco.......................	59 35 36. 7	59 35 39. 0	59 35 42. 4
		179 59 53. 1	180 00 00. 0	180 00 00. 0
A	Ixtacalco.......................	75 22 5. 4	75 22 3. 6	75 22 7. 1
B	Mexicalcingo.................	47 43 45. 8	47 43 44. 1	47 43 42. 3
H	Tres Puentes.................	56 54 14. 1	56 54 12. 3	56 54 10. 6
		180 00 5. 3	180 00 00. 0	180 00 00. 0
B	Mexicaltzingo................	69 16 15. 0	69 16 15. 0	69 16 15. 0
H	Tres Puentes.................	47 46 7. 9	47 46 7. 9	47 46 7. 9
D	Ixtapalapa (cerro)...........	62 57 37. 1	62 57 37. 1	62 57 37. 1
		180 00 00. 0	180 00 00. 0	180 00 00. 0

Por la tabla se verá que si se toman los ángulos medios antes de hacer corrección alguna, las observaciones al derredor de A y X dan $-17''.2$ y $-3''.2$ respectivamente, y después de hecha la primera corrección resulta $-17''.5$ y $-1''.9$. Así, pues, el error angular medio en A permanece el mismo con poquísima diferencia, mientras que al derredor de X se reduce casi á la mitad. De aquí resulta que aun reduciendo la suma de cada triángulo á 180°, queda todavía para cada uno de los ángulos en A un error de $-3''.5$, y para los apoyados en X uno de $-0''.3$. Este último es del todo insignificante y para hacerlo desaparecer bastará modificar ligeramente la cifra decimal de los valores de los ángulos al derredor de X sin que por esto se altere sensiblemente la suma de los triángulos, pues á cada uno de los ángulos que terminan el polígono $A\,Z\,T\,U\,Y\,B$ le corresponderían sólo $-0''.15$, cantidad que no produce variación sensible en el valor de los lados. Si muchas veces se conservan las cifras decimales, es por no aumentar materialmente las causas de error en las adiciones ó sustracciones que sea preciso ejecutar con las cantidades á que pertenecen; pero al menos en las operaciones de esta categoría no hay inconveniente alguno en desecharlas, tomando la unidad entera más próxima, en los valores que definitivamente se adopten.

Respecto de los errores en los ángulos A, como son algo más considerables, hay ya fundamento para temer su influencia; mas como por ahora no tenemos indicio alguno que nos guíe en su mejor distribución, procedemos como en el caso anterior añadiendo $3''.5$ á los ángulos en A y restando $1''.75$ á cada uno de los otros dos para no alterar las sumas, como se ve en la última columna de la tabla precedente.

Es preciso convenir en que la marcha hasta aquí seguida no está autorizada más que por la carencia de mejores medios, y habrá casos en que los errores finales, más fuertes que en el ejemplo que consideramos, produzcan variaciones sensibles en los lados de una cadena algo extensa; pero guiando los cálculos de la manera que vamos á hacerlo, siempre será fácil hallar hasta cierto punto el indicio de una mala suposición y del modo de coordinar mejor los resultados.

Como la base de nuestra triangulación es $F\,G$ perteneciente al primer triángulo, calcularemos primero el lado $G\,H$ para lo cual tenemos un lado y los tres ángulos. Una vez calculado $G\,H$ y el triángulo $G\,H\,A$, podemos proseguir de dos maneras: ó partiendo del lado $G\,A$ por los triángulos $G\,A\,Z$, $Z\,A\,X$, etc., que están en la parte de arriba en el croquis, para terminarlos en $A\,H$, ó bien siguiendo un orden inverso, esto es: comenzando por $A\,H$ y terminando en $A\,G$. Ambos caminos serían indiferentes suponiendo todas las operaciones exactas; pero en la práctica es mucho más conveniente dividir el cálculo en dos grupos, que partiendo de la misma base, se reunan en un lado común, distante de ésta igual número de triángulos con poca diferencia. Así es que ciñéndonos por ahora al polígono $H\,B\,Y$..... $Z\,G$, cerrado todo por los triángulos que no tienen más que un lado exterior, comenzaremos por $A\,G$ para terminar en $U\,X$, y por $A\,H$ para terminar en el mismo lado $U\,X$, debiendo encontrar valores sensiblemente iguales si no hay errores de importancia en las operaciones. Luego que esté definitivamente arreglado el polígono, calcularemos el triángulo $B\,H\,D$, que tanto por ser en cierto modo independiente del polígono principal, ó de sus vértices centrales, como por no haber error en sus ángulos, es de una importancia comparativamente menor.

91. Antes de poner á la vista los cálculos, indiquemos dos procedimientos que tienden á disminuir el trabajo. Al calcular cada triángulo, tal como $F\,G\,H$, puesto que se van á determinar los dos lados, se tendrá:

$$G\,H = F\,G\,\frac{\text{sen. } F}{\text{sen. } H} \qquad\qquad F\,H = F\,G\,\frac{\text{sen. } G}{\text{sen. } H}$$

Se ve que ambas ecuaciones tienen común la *base del cálculo* $F\,G$ y su ángulo opuesto H: de consiguiente, haciendo una sola vez la operación indicada por la fórmula, se evitará una sustracción en cada triángulo. La segunda indicación que creemos útil consiste en conservar las diferencias logarítmicas por $1''$ de cada uno de los *senos*, pues si por los resultados hallamos que es preciso modificar más ó menos los primeros cálculos, será mucho más fácil variar simplemen-

CALCULOS DE LA TRIANGULACION DEL DISTRITO.

F G H	*F G* .... 3.4759662 sen. *H* .... 9.9435631 3.5324031 sen. *F* .... 9.9574134 3.4898165 *G H* = 3089^{m}.0	11.5 9.8	3.5324031 sen. *G*... ...... 9.9054161 3.4378192 *F H* = 2740^{m}.4	15.6
A G Z	*A G* .... 3.3051391 sen. *Z* .... 9.8500718 3.4550673 sen. *G* .... 9.9468361 3.4009134 *A Z* = 2517^{m}.2	21.0 2.2	3.4550673 sen. *A* .... 9.9804674 3.4355347 *G Z* = 2726^{m}.0	6.4
A Z X	*A Z* .... 3.4009134 sen. *X* .... 9.8248716 3.5760418 sen. *A* .... 9.9975322 3.5735740 *Z X* = 3746^{m}.1	23.5 2.2	3.5760418 sen. *Z* .... 9.9089356 3.4849774 *A X* = 3054^{m}8	15.2
X T Z	*Z X* .... 3.5735740 sen. *T* .... 9.9999142 3.5736598 sen. *Z* .... 9.9126826 3.4863424 *T X* = 3064^{m}.4	0.4 14.8	3.5736598 sen. *X* .... 9.7719895 3.3456493 *T Z* = 2216^{m}.4	28.7
T X U	*T X* .... 3.4863424 sen. *U* .... 9.8346831 3.6516593 sen. *T* .... 9.9426967 3.5943560 *U X* = 3929^{m}67	22.5 11.6	3.6516593 sen. *X* .... 9.9862909 3.6379502 *T U* = 4344^{m}.6	5.3

BASE: F G = 2992^{m}.032.

G H A	*G H* .... 3.4898165 sen. *A* .... 9.9677571 3.5220594 sen. *H* .... 9.7830797 3.3051391 *A G* = 201^{m}.7	8.4 27.6	3.5220594 sen. *G* .... 9.9837927 3.5058521 *A H* = 3205^{m}.2	5.8
A H B	*A H* .... 3.5058521 sen. *B* .... 9.8692111 3.6366410 sen. *H* .... 9.9231127 3.5597537 *A B* = 3628^{m}.7	19.1 13.8	3.6366410 sen. *A* .... 9.9856829 3.6223239 *H B* = 4191^{m}.1	5.5
A B X	*A B* .... 3.5597538 sen. *X* .... 9.9693558 3.5903979 sen. *A* .... 9.9357443 3.5261422 *B X* = 3358^{m}.5	8.2 12.3	3.5903979 sen. *B* .... 9.8946052 3.4850031 *A X* = 3054^{m}.9	16.6
B X Y	*B X* .... 3.5261422 sen. *Y* .... 9.5628824 3.6632598 sen. *B* .... 9.8744822 3.5377420 *X Y* = 3449^{m}.4	19.7 18.6	3.6632598 sen. *X* .... 9.9981193 3.6613791 *B Y* = 4585^{m}4	2.0
X Y U	*X Y* .... 3.5377420 sen. *U* .... 9.9193332 3.6184088 sen. *Y* .... 9.9759892 3.5943980 *U X* = 3930^{m}.05	14.2 7.2	3.6184088 sen. *X* .... 9.9007900 3.5191988 *U Y* = 3305^{m}.2	16.0

te las últimas cifras de los logaritmos que volverlos á tomar de las tablas. Las diferencias mencionadas son necesarias si en lugar de seguir el método común, se adopta un nuevo procedimiento que indicaré, para corregir los cálculos preliminares, sin necesidad de repetir toda la resolución como se ha hecho hasta hoy.

Conviene, pues, arreglar los cálculos de la manera que consta en las páginas siguientes.

Como se ve, ambos valores de UX sólo difieren 0^m38, cantidad que no llega á 0.0001 de su longitud, de suerte que bastaría adoptar por resultado final su término medio $3929^m.86$, y en este caso la incertidumbre no llegaría á 0,00005 que es cuanto puede necesitarse. Este resultado no es excepcional; en toda triangulación practicada con esmero y calculada convenientemente para dividir la influencia de pequeños errores, la incertidumbre final no excede por lo común de 0.0002 de la longitud del lado de prueba, y esto me parece suficiente en todos casos.

92. Si la diferencia fuese más considerable, y si estudiando los valores de los errores angulares no se tuviese razón para modificar unos ángulos más que otros, se recurrirá á un método de corrección que voy á desarrollar. El mismo camino se sigue cuando habiendo medido dos bases hacia los extremos de la cadena, se calcula una de ellas partiendo de la otra; entonces si el resultado del cálculo difiere sensiblemente de la medida directa, y si además se tiene fundamento para atribuir la misma confianza á las medidas de ambas bases, se supone, para conseguir la concordancia de los resultados, que los ángulos tienen un ligero error, el cual se determina estableciendo la condición de que el lado calculado sea igual al medido, y de que no por eso se altere la suma de los tres ángulos de cada triángulo.

Mr. Puissant encuentra una fórmula aplicable á este caso, que tiene el inconveniente de incluir como factor una suma algebraica de *cotangentes*, lo que la hace sumamente impropia para el cálculo logarítmico, siendo preciso ó tener una tabla de cotangentes naturales, ó deducirlas de sus valores logarítmicos con un aumento considerable de trabajo. He procurado reemplazarla con otra libre de este defecto.

Hemos visto ya (núm. 36) que un lado cualquiera de la triangulación puede derivarse inmediatamente de la base por la ecuación:

$$a_n = a \frac{\text{sen. } B_1 \text{ sen. } B_2 \ldots\ldots \text{ sen. } B_n}{\text{sen. } A_1 \text{ sen. } A_2 \ldots\ldots \text{ sen. } A_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero si suponemos que este lado sea la otra base medida que resultó igual á $a_n + \varepsilon_n$, será preciso, para coordinar el cálculo con la medida, añadir x segundos á los ángulos B y restarlos de los ángulos A para que no varíen las sumas. Se tendrá, pues:

$$a_n + \varepsilon_n = a \frac{\text{sen. } (B_1 + x) \text{ sen. } (B_2 + x) \ldots\ldots\ldots \text{ sen. } (B_n + x)}{\text{sen. } (A_1 - x) \text{ sen. } (A_2 - x) \ldots\ldots\ldots \text{ sen. } (A_n - x)}$$

Para determinar á x, apliquemos á estas ecuaciones un método semejante al que seguimos en el número 36, y no habrá dificultad en obtener:

$$x = (6.63778) \frac{\frac{\varepsilon}{a_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots \beta_n} \quad \ldots\ldots (2)$$

La cantidad que va dentro del paréntesis es el logaritmo de la constante 4342945. (1) En cuanto á $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \beta_1, \beta_2$, expresan las diferencias logarítmicas de los senos, por $1''$, tales como constan en la tabla precedente, del cálculo trigonométrico.

En la cadena que he tomado por ejemplo, la diferencia final es tan pequeña, que desde el punto de vista práctico no hay necesidad de modificar los valores suministrados por la resolución, porque si en el último lado no resulta más que $0^m.19$ de duda respecto del medio, es muy probable que sea menor en los otros. Esto no obstante, para que se vea el modo de aplicar nuestra fórmula, adoptemos la distancia *Mixcoac — San Simón* de $3929^m.86$, y busquemos la co-

(1) Advertiré una vez por todas que siempre que escriba una cantidad numérica entre paréntesis, indico *el logaritmo de un factor constante*, y no debe entenderse que es el factor mismo, de modo que al aplicar las fórmulas, debe *sumarse* con los logaritmos de los demás factores. Esta anotación convencional para abreviar, ha sido adoptada ya en varias obras inglesas de matemáticas aplicadas.