65. No se puede asentar regla alguna invariable sobre el número de veces que deben repetirse los ángulos, ni sobre el mayor error que debe admitirse en cada triángulo, pues esto depende tanto de la aproximación del teodolito como de la mayor ó menor precisión que se desea obtener, según la importancia de la operación; pero creo que con buenos instrumentos, basta en todos casos repetir de cuatro á seis veces los ángulos de la cadena principal, y de dos á cuatro los de las otras; y con respecto á los errores, me atrevo á proponer que no se tolere en las triangulaciones de alguna importancia un error que exceda de 20″ por ángulo, y en las secundarias desde 20″ hasta 1′, esto es, admitiendo mayor error al paso que disminuye la magnitud ó importancia de los triángulos. En general, el error de cada ángulo no debe exceder de la aproximación que da el instrumento, y en cada orden de triángulos se deben repetir los ángulos un mismo número de veces.

Durante la marcha de las operaciones, deben aprovecharse todas las comprobaciones que se presenten, como son: ligar siempre que se pueda las triangulaciones secundarias con las principales, tomar algunas veces dos ó más ángulos adyacentes como si fuera uno solo, y comparar el resultado con la suma que dan medidos aisladamente, situar cada punto desde el mayor número posible de vértices, etc., etc. En general, la armonía de los resultados es tanto mayor, cuanto más íntimo es el enlace de las operaciones; y teniendo esto presente, el ingeniero buscará el mejor modo de proceder, pues sería imposible enumerar aquí los distintos casos que se presentan según las localidades, y de los que debe sacar el mejor partido posible.

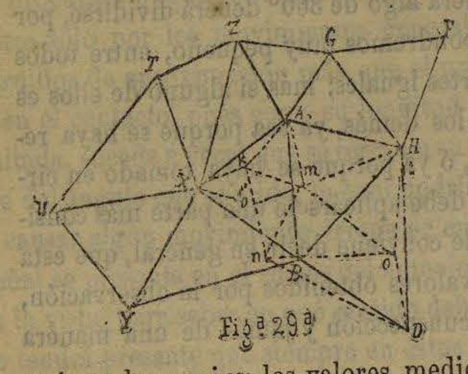

Fig.ª 29ª

66. Al paso que se procede, se van inscribiendo las observaciones en un *apunte* ó *registro* en el que se anotan las estaciones que se van ocupando; los puntos que desde ellas se observan, con los nombres, letras ó números que los designan; las indicaciones del principio y fin de cada serie en los nonius; los valores medios de los ángulos, y finalmente,

todas las notas que se crean necesarias para mayor claridad. Como ejemplo, pondré á la vista las observaciones hechas en la estación *A* de la figura 29ª que representa algunos triángulos de la cadena topográfica del Distrito. Las líneas llenas forman la triangulación principal medida especialmente por el ingeniero D. Miguel Iglesias, y algunos triángulos por el Sr. D. J. Antonio de la Peña; y las puntuadas representan la cadena secundaria ejecutada por el ingeniero D. Ramón Almaraz. Aquí sólo pondré los ángulos de la primera, que se han tomado seis veces en cada posición del anteojo, haciendo uso de teodolitos de Ertel con dos vernieres.

TRIANGULACION DEL DISTRITO.

ESTACIÓN EN LA IGLESIA DE IXTACALCO.

POSICIÓN DIRECTA.

Vértices observados.	Letras.	Repeticiones.	I Nonius.	II.	Angulos medios.	Notas.
Iglesia de Mexicalcingo......	B	0	77°28′30″	29′30″		La base de esta cadena es el lado F G, etc.
Iglesia de San Simón	X	1	137 4 00	5 00		
" " "	"	6	75 1 40	2 40	59°35′31″.7	
Iglesia de San Simón	X	0	68 58 50	59 40		
Garita de la Candelaria......	Z	1	152 52 20	53 30		
" " "	"	6	212 21 40	22 30	83°53′48″.3	
Garita de la Candelaria......	Z	0	212 21 40	22 30		
Extremo occidental de la base..............................	G	1	285 19 00	19 10		
" " "	"	6	290 1 30	2 10	72°56′37″.5	
Extremo occidental de la base..............................	G	0	16 11 45	10 40		
Puente llamado «*Tres Puentes*»..............................	H	1	84 23 00	22 20		
" " "	"	6	65 21 10	20 10	68°11′34″.6	
Tres Puentes.........................	H	0	65 21 10	20 10		
Iglesia de Mexicalcingo......	B	1	140 42 50	42 30		
" " "	"	6	157 33 10	33 00	75°22′ 4″.2	
POSICIÓN INVERSA.						
Iglesia de Mexicalcingo......	B	0	110° 2′10″	1′30″		
Iglesia de San Simón.........	X	6	107 36 20	35 40	59°35′41″.7	
Iglesia de San Simón.........	X	0	107 36 20	35 40		
Garita de la Candelaria......	Z	6	250 59 00	58 00	83°53′45″.0	
Garita de la Candelaria......	Z	0	298 32 30	31 10		
Extremo occidental de la base..............................	G	6	16 11 50	10 40	72°56′34″.2	
Extremo occidental de la base..............................	G	0	69 45 20	46 10		
Tres Puentes.........................	H	6	118 55 20	56 20	68°11′40″.8	
Tres Puentes.........................	H	0	337 33 00	33 10		
Iglesia de Mexicalcingo......	B	6	69 45 20	46 10	75°22′ 6″.7	

De igual manera se procede en todas las demás estaciones. En la tercera columna de la tabla anterior, el 0 expresa para cada nonius la indicación del instrumento cuando se dirige al primer punto para comenzar la serie, y el 1 la primera lectura que se hace para conocer el valor aproximativo del ángulo, y determinar así el número de circunferencias enteras que ha recorrido el vernier al llegar á la sexta observación. La fórmula del núm. 49 da: $G = an + g$; de modo que después de sustituir el valor aproximativo de a, el valor de G, comparado con la última lectura, indicará el número de circunferencias. Por ejemplo, la observación directa del último ángulo entre Tres Puentes y Mexicalcingo, da: $g = 65° \, 20' \, 40,''$ y restando esta cantidad de la primera lectura, se tiene el ángulo aproximativo $a = 75° \, 22'$; luego $G = (75° \, 22') \times 6 + 65° \, 20' \, 40'' = 517° \, 32' \, 40''$. Como la última indicación es: $157° \, 33' \, 5''$ es claro que el vernier habrá recorrido una circunferencia solamente, y el valor correcto de G será: $G = 360° + 157° \, 33' \, 5'' = 517° \, 33' \, 5''$, lo cual dará: $a = \frac{G-g}{6} = 75° \, 22' \, 4''.2$, que es la cantidad inscrita en la sexta columna. Igualmente la observación inversa indica $(75° \, 22') \times 6 + 337° \, 33' \, 5'' = 789° \, 45' \, 5''$, de suerte que para que la última lectura se acerque á este valor será preciso añadirle dos circunferencias ó 720°, hecho lo cual se tiene el valor de $G = 779° \, 45' \, 45''$. Siendo $g = 337° \, 33' \, 5''$, el ángulo $\frac{G-g}{6} = 75° \, 22' \, 6''.7$. Tomando el medio, el ángulo finalmente observado, será: $HAB = 75° \, 22' \, 5''.45$. Todos estos cálculos son muy sencillos, y con alguna práctica se consigue hacerlos en la memoria sin recurrir á los números.

67. Es muy conveniente observar todos los ángulos que tienen por vértice un mismo punto de la manera siguiente: después de anotado el punto, de partida, se dirige la primera visual á cualquiera de las señales, á A por ejemplo (fig. 30ª), y se fija el limbo llevando el anteojo á la señal inmediata B. Hasta aquí se ha marchado de acuerdo con el método enseñado; pero en lugar de seguir repitiendo el mismo ángulo, se lee la indicación de los nonius y se lleva el telescopio á la señal que sigue C, donde se vuelve á leer el ángulo, y

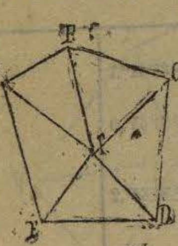

Fig.ª 30.ª

se continúa de este modo hasta la última E. Es evidente que la diferencia de los arcos obtenidos para cada dos señales es igual al ángulo que estas forman entre sí, y se tomará por su valor definitivo el medio de todos los resultados que se tienen repitiendo la operación cuantas veces se quiera, y tomando otros de los vértices por puntos de partida. Las ventajas principales de este procedimiento consisten en que la suma de todos los ángulos observados al derredor de un punto es siempre igual á 360°, y de consiguiente no hay que hacer corrección alguna, y que, lo mismo que en el método común de repetición, cada ángulo se toma con diferentes partes de la graduación. Su única desventaja consiste en que las muchas lecturas que es preciso hacer, ocupan más tiempo; pero hay sin embargo una circunstancia que disminuye notablemente este defecto, y es que obteniendo cada resultado parcial, se pueden desechar aquellos notoriamente erróneos, lo que no sucede en el método común, en que el error que se cometa en alguna de las visuales, influye siempre en el valor final del ángulo.

La disposición que se da al registro cuando se sigue este método de observación, es así:

TRIANGULACION DE............ —POSICIÓN DIRECTA.

Estaciones.	Puntos observados.	REPETICIONES. 1ª	2ª	3ª	4ª	Ángulos medios.	Notas.
	A	000°00′00″	316°17′30″	251°38′10″	164°10°20″	43°42′24″	
	B	43 42 25	000 00 00	295 20 20	207 52 50	64 39 41	Puesto un vernier en 0 el otro señalaba exactamente 180°; de consiguiente $g = 0$.
F	C	108 22 10	64 39 40	000 00 00	272 32 30	87 27 29	
	D	195 49 40	152 7 10	87 27 25	000 00 00	79 52 17	
	E	275 41 50	231 59 30	167 19 50	79 52 15	84 18 9	

Para la posición inversa del anteojo se adopta absolutamente la misma forma. En la segunda serie de observaciones se ha comenzado por B, en la tercera por C, y así sucesivamente. Fácilmente se comprende que en lugar de 00° 00′ 00″ se habría podido tomar cualquiera otra indicación por punto de partida, y cuando los nonius no se correspondan exactamente se anotará en la última columna el valor de g para cada serie.

Veamos cómo se deducen los ángulos observados, por ejemplo, entre el último punto E y el primero A.

Por la primera serie se tiene:	360° 00′ 00″	— 275° 41′ 50″	= 84° 18′ 10″
„ „ segunda „ „	316 17 30	— 231 59 30	= 84 18 00
„ „ tercera „ „	251 38 10	— 167 19 50	= 84 18 20
„ „ cuarta „ „	164 10 20	— 79 52 15	= 84 18 5
		Valor medio del ángulo $E F A$......	= 84° 18′ 8″.75

No contando más que los segundos, se tiene: 84° 18′ 9″, que es la cantidad escrita en la sétima columna.

68. Con los valores que resultan de las observaciones, al paso que se practican se va formando un croquis semejante al de la figura 29ª, que sirve para dar á conocer la colocación relativa de los vértices y cuyo objeto es facilitar las operaciones ulteriores. En él se representa la base con arreglo á una escala cualquiera, y los ángulos se construyen con el *transportador*, que es un semicírculo graduado que acompaña generalmente á los estuches de instrumentos de delineación, ó más exactamente, valiéndose de una tabla de cuerdas. Hay impresas estas tablas que dan las cuerdas que corresponden á todos los arcos desde 0° hasta 180°, de minuto en minuto; pero cuando no se tienen, se calcula la correspondiente al ángulo que se quiere construir, recordando que si éste se designa por a, y se supone el radio igual á r, se tiene la cuerda por la relación

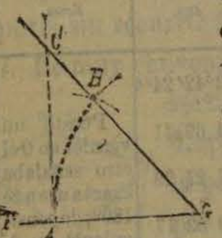

Fig.ª 31ª

$$c = 2\, r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\, a$$

facilísima de valuar por logaritmos.

Supongamos que sobre la recta $F G$ (fig. 31) se quiera construir un ángulo de 47° 19′ 21″. Con un radio cualquiera, por ejemplo, de 0ᵐ2, se describirá desde G un arco indefinido $A B$, y para conocer la cuerda se tendrá:

Log. 2........................ 0.30103
„ r........................ 9.30103
„ sen. 23° 39′ 40″...... 9.60350
„ c........................ 9.20556 $c = 0$ᵐ1605

de consiguiente, con esta cantidad como radio se trazará desde A otro arco cuya intersección con el primero determina el punto B, que unido con G, formará con $F G$ el ángulo que se desea $F G B =$ 47° 19′ 21″. Al fin de esta obra se verá una tabla de cuerdas calculadas para $r = 1$, y de la cual pueden tomarse, para cualquier otro radio, multiplicándolas por el nuevo valor de r. Para el ángulo del ejemplo anterior la cuerda de la tabla es 0.8027, que multiplicada por 0ᵐ2, radio que se adoptó en la construcción, da 0ᵐ1605 como por el cálculo directo.

Se podría también construir el ángulo valiéndose de su tangente, puesto que se tiene: $A C = A G \tan. A G B = r \tan a$. En nuestro caso resultará:

Log. r........................ 9.30103
„ tan. 47° 10′ 21″...... 0.03525
„ $A C$.................. 9.33628 $A C = 0$ᵐ2169

de modo que no habrá más que tomar esta longitud en la perpendicular levantada en A, y se unirán los puntos G y C.

Si el ángulo por construir $F G B$ (fig. 32ª) es muy obtuso, es preferible prolongar la línea $F G$, y trazar el ángulo $B G F' = 180° - a$, ó bien se hará la construcción de este último hacia abajo de $F G$ prolongando la línea $B' B$ que resulta. Cuando se hace uso de la tangente y el ángulo difiera poco de 90°, como las tangentes son muy grandes, es también más cómodo levantar en G una perpendicular y construir sobre ella el complemento del ángulo que se desea.

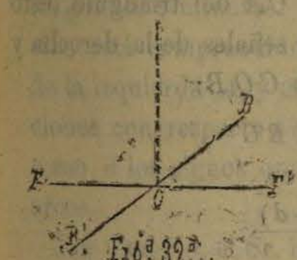

Fig.ª 32ª

De esta manera, con la base de la triangulación $F G$ (fig. 29ª) y los ángulos adyacentes FGH y GFH, se construye el primer triángulo, y los lados de éste sirven á su vez de bases para proseguir la formación del croquis. Por lo común se trazan con tintas de color diferente los diversos órdenes de triángulos para distinguirlos.

69. Ocupémonos ahora de algunos casos particulares que se presentan en la medida de los ángulos. Cuando se adoptan por señales las cruces de las torres, veletas, edificios, etc., sucede con frecuencia que no es posible colocarse en ellas, ni en ningún punto de su vertical, cuando se deben observar los ángulos que tienen allí su vértice, y entonces se toman situando el instrumenso lo más cerca que se pueda del centro de estación, y se reducen á este último punto por medio de un sencillo cálculo que voy á indicar.

Sea C (fig. 33ª) el centro de estación, O el punto desde donde se observan los vértices A y B, y designemos, además por O el ángulo medido $A\,O\,B$, y por x el que se busca $A\,C\,B$. Se mide con el mayor cuidado la pequeña distancia $C\,O = r$, y el ángulo $C\,O\,A = d$ que se llama *ángulo de dirección.*

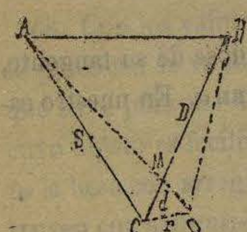

Fig.ª 33.ª

Con estas anotaciones tendremos:

$$AMB = O + CBO = x + CAO,$$

de donde resulta:

$$x - O = CBO - CAO.$$

Para obtener los valores que forman el segundo miembro, llamarémos D y S respectivamente los lados $C\,B$ y $C\,A$ del triángulo, esto es, las distancias de centro de estación á las señales de la derecha y de la izquierda, y tendremos en el triángulo $C\,O\,B$:

$$D : r :: \text{sen.}(O+d) : \text{sen. } C\,B\,O$$

de donde:

$$\text{sen. } CBO = \frac{r\,\text{sen.}(O+d)}{D}$$

y en el triángulo $C\,O\,A$:

$$S : r :: \text{sen. } d : \text{sen. } CA\,O, \quad \text{de donde:} \quad \text{sen. } C\,A\,O = \frac{r\,\text{sen. } d}{S}$$

Como r es siempre muy pequeño con respecto á los lados de los triángulos, $CB\,O$ y $C\,A\,O$ lo son también, y podemos tomar los arcos en partes del radio por sus senos, con lo que sustituyendo se tiene la diferencia entre el ángulo observado y el reducido al centro de estación:

$$x - O = \frac{r\,\text{sen.}(O+d)}{D} - \frac{r\,\text{sen.}\,d}{S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Esta diferencia queda igualmente expresada en partes del radio, y para expresarla por su número de segundos, será preciso multiplicarla por sen. $1''$, lo que equivale á dividir el segundo miembro por este factor, hecho lo cual se obtiene finalmente:

$$x - O = \frac{r\,\text{sen.}(O+d)}{D\,\text{sen. } 1''} - \frac{r\,\text{sen.}\,d}{S\,\text{sen. } 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Los lados D y S se obtienen por la resolución aproximativa del triángulo $A\;B\;C$, en que se deduce el tercer ángulo C, ó aun se usa el observado en O suponiéndolo igual á C. Esta suposición no ocasiona error sensible, puesto que $x - O$ sólo expresa un corto número de segundos; mas si después de aplicada la fórmula, se ve que difieren bastante C y O, se repite el cálculo usando los nuevos valores obtenidos, aunque repito que raras veces es necesario. [*Véase la nota del número 34.*]

En la ecuación anterior es de más influencia r que d; por consiguiente, debe medirse r con mucha precisión tomando para d sólo los grados y minutos. Se tendrá presente que este ángulo de dirección está comprendido entre el centro de la estación C, y la señal de la izquierda A, y como el punto O puede ocupar diversas posiciones con respecto á C, se pondrá cuidado en dar á sen. $(O+d)$ y sen. d los signos que les correspondan, según los valores de los arcos.

Por ejemplo, el Sr. ingeniero Peña hizo en la estación de Mixcoac las siguientes observaciones: ángulo tomado fuera del centro, entre Coyoacán y San Angel, $O = 52°\,30'\,12''$; ángulo de dirección, $d = 79°\,15'\,40''$; distancia al centro, $r = 0^{m}847$; distancia aproximativa entre Mixcoac y San Angel, $D=3001^{m}$; distancia aproximativa entre Mixcoac y Coyoacán, $S=3294^{m}$. Con estos datos se tiene:

log. r	9.92788		9.92788		Primer término	+ 43″.42
„ sen. $(O+d)$	9.87268 +	sen. d	9.99233 +		Segundo íd.	− 52″.11
C log. sen. 1″	5.31443		5.31443		$x-O=-$	8″.7
„ D	− 3.47727	S	− 3.51772		$O=$	52° 30′ 12″.0
	1.63772 +		1.71692 +		$x=$	52° 30′ 3″.3

70. Los signos que pongo después de los logaritmos indican la naturaleza de los números correspondientes, esto es, si son positivos ó negativos; mientras que los que van antes expresan las operaciones que con ellos deben ejecutarse, según la fórmula. Estas anotaciones son útiles para seguir las reglas del álgebra, y las adoptaré en los cálculos, porque evitan las equivocaciones de los signos. En el ejemplo que sigue cambia de signo uno de los términos.

El mismo ingeniero obtuvo en la propia estación de Mixcoac los siguientes elementos para medir el ángulo entre San Angel y el vértice llamado "Loma del Muerto."

$$O=65^\circ 36' 18''.0;\ d=141^\circ 14' 15'';\ r=0^{m}791;\ D=3400^{m};\ S=3001^{m}.$$

r	9.89818		9.89818		Primer término	− 21″.72
sen. $(O+d)$	9.65468 −	log. sen. d	9.79664 +		Segundo id.	− 34″.0
sen. 1″	− 4.68557		− 4.68557		Reducción al centro	− 55″.8
D	− 3.53148	„ S	− 3.47727		Angulo medido	65° 36′ 48″.0
	1.33681 −		1.53198 +		Angulo reducido	65° 35′ 22″2

Si alguna de las distancias D ó S fuese de tal magnitud que se pudiera considerar infinitamente grande respecto de r, sería nulo el término de la fórmula (2) en que entra la distancia supuesta infinita. Así, por ejemplo, si se midiere el ángulo entre un astro y una señal terrestre, suponiendo que el primero esté á la derecha, se tendrá:

$$x-O=-\frac{r\,\text{sen.}\,d}{S\,\text{sen.}\,1''}$$

y si ambas distancias fuesen infinitas, $x-O$ sería igual á O. Esto sucede siempre que se mide un ángulo entre dos astros.

El Sr. Moral en su *Curso de Geodesia*, reduce la fórmula (2) á un solo término, eliminando á S y haciendo la hipótesis de que los ángulos C y O sean iguales, lo cual ocasiona muy poco error, atendida la pequeñez de la reducción $x-O$. El triángulo ABC produce:

$$S=D\frac{\text{sen.}\,B}{\text{sen.}\,(B+C)}$$

Tomando O por C, sustituyendo en la ecuación (2), desarrollando y reduciendo, se halla:

$$x-O=\frac{r\,\text{sen.}\,O\,\text{sen.}\,(B-d)}{D\,\text{sen.}\,B\,\text{sen.}\,1''}$$

En lugar de eliminar á S, podría eliminarse á D, y por el mismo procedimiento se obtendría:

$$x-O=\frac{r\,\text{sen.}\,O\,\text{sen.}\,(B-d)}{S\,\text{sen.}\,(O+B)\,\text{sen.}\,1''}$$

Apliquemos estas fórmulas á nuestro último ejemplo. El ángulo en la "Loma del Muerto" es: $B=51^\circ 48' 45''$, y por consiguiente se tendrá:

$$O-d=-75^\circ 37' 57'';\quad B-d=-89^\circ 25' 30'';\quad O+B=117^\circ 25' 3''$$

r	9.89818		r	9.89818
sen. O	9.95938		sen. O	9.95938
sen. $(B-d)$	9.99998 −		sen. $(B-d)$	9.99998 −
	9.85754 −			9.85754 −
sen. B	− 9.89541		sen. $(O+B)$	− 9.94825
D sen. 1″	− 8.21705		S. sen. 1″	− 8.16284
	1.74508 −			1.74645 −
$x-O=$	− 55″.6		$x-O=$	− 55″.8

Cuando todos los ángulos que tienen un mismo vértice se observan fuera del centro de la estación, deben reducirse con el mismo valor de r, si es que todos se han medido desde el mismo punto. En cuanto al ángulo de dirección, si es d para el primer ángulo O, será $d + O$ para el segundo O'; $d + O + O'$ para el tercero O'', etc., suponiéndolos ordenados de izquierda á derecha. Como comprobación de los cálculos, deberá hallarse que la reducción de cada uno de los ángulos es numéricamente igual á la suma de todas las demás reducciones, y de signo contrario, pues es evidente que prescindiendo de los pequeños errores de observación, tanto los ángulos observados fuera del centro de estación como los reducidos, deben dar por suma 360°, y por consiguiente, deberá ser nula la suma de todas las reducciones.

71. Suele suceder, especialmente cuando la señal trigonométrica es una torre ó macizo, que el centro C no es visible desde O, y entonces para obtener á d y á r se procede así: Sea NPN (fig. 34ª) la sección de la señal y O, como antes, el punto de observación. Se medirán los ángulos AON y AON' formados por la señal de la izquierda A, con las visuales tangentes á la sección, y la semisuma de ellos será el ángulo de dirección $d = AOC$.

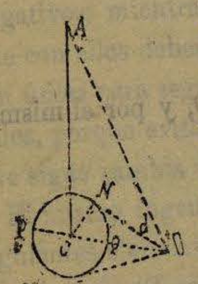

Fig.ª 34ª

En efecto, se tiene:

$$d = AON + NOC = AON + \frac{NON'}{2} = AON + \frac{AON' - AON}{2}$$

de donde reduciendo,

$$d = \frac{AON + AON'}{2}$$

Para obtener á r, la propiedad de la tangente y la secante tiradas desde O, da esta ecuación, designando por R el radio de la sección:

$$\overline{ON}^2 = OQ \times (2R + OQ)$$

de donde despejando resulta:

$$r = \frac{\overline{ON}^2}{OQ} - R$$

Puede obtenerse también esta cantidad valiéndose del triángulo rectángulo CNO que da:

$$r = \frac{R}{\text{sen.}\,(d - AON)}$$

Si la base de la señal fuese rectangular (figura 35ª), se medirán las rectas ON, ON'. Se tomará sobre una de ellas un punto cualquiera n y se tirará la recta nn' paralela á la diagonal NN', para lo cual se situará n' por la proporción

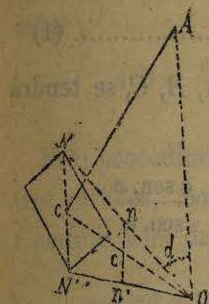

Fig.ª 35ª

$$ON : On :: ON' : On' = \frac{ON' \times On}{ON}$$

En seguida se mide Oc, y se calcula $OC = r$, puesto que se tiene:

$$On : ON :: Oc : r = \frac{ON \times Oc}{On}$$

La resolución del pequeño triángulo Ocn, en el que se conocen los tres lados, da á conocer el ángulo nOc, y entonces se tiene: $d = AON + nOc$.

Cuando la sección de la señal es un polígono cualquiera, se procede de una manera análoga valiéndose de líneas auxiliares y haciendo uso de los teoremas de la Geometría.

72. Todo lo que precede enseña los procedimientos generales para observar los ángulos de una cadena; pero sucede con bastante frecuencia que algún punto que importa situar en el plano no puede ligarse fácilmente con la triangulación por los métodos comunes, y en tales casos se recurre á resoluciones particulares, como la que sigue y otras que tendré ocasión de indicar.

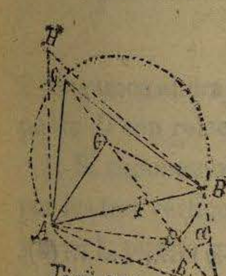

Fig.ª 36ª

Supongamos que D (fig. 36ª) sea un punto, que por cualquiera causa no se puede enlazar inmediatamente con la cadena; pero desde el cual se descubren los tres vértices del triángulo ABC. Se medirán los del ángulo $ADC = \beta$