

CAPITULO IV.

OBSERVACIÓN DE LOS ÁNGULOS.

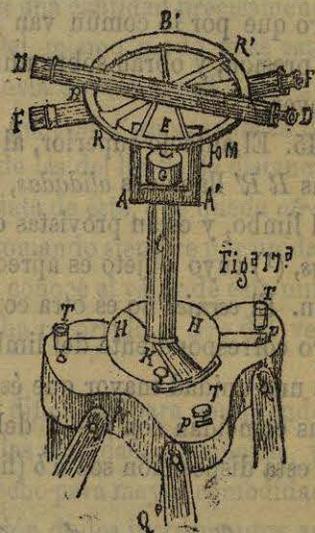
43. Antes de explicar la manera de medir los ángulos de una cadena trigonométrica, describiremos los instrumentos que se emplean y el modo de rectificarlos. Los principales de ellos son el *círculo* y el *teodolito repetidores*.

El *círculo repetidor*, representado en la figura 17^a, descansa en una columna hueca de cobre *C*, que se ajusta perfectamente y gira sobre otra de acero ligeramente cónica, la cual está unida á tres pies *P* provistos en sus extremos de tornillos *T*, que permiten dar diversos grados de inclinación á la columna. En la parte superior de ésta, hay una pieza *A A'* que afecta, poco más ó menos, la forma de una *Y*, destinada á sostener el eje *E* en que gira la parte superior del instrumento, la que consiste en un círculo *B B'* llamado *limbo*, dividido de 0° á 360° en grados y fracciones, y en dos anteojos que se mueven paralelamente al plano del limbo; pero el uno *D D'*, llamado *superior*, gira en el centro de la cara graduada, y el otro, llamado *inferior*, en la parte posterior del círculo y á una pequeña distancia de su centro, á causa del cilindro *L*, que sirve de eje de rotación al limbo. Ambos anteojos son acromáticos: en el foco de sus objetivos, y á poca distancia del ocular, está un pequeño diafragma provisto de dos hilos muy delgados que se cortan en ángulo recto, debiendo corresponder su intersección á un punto del eje óptico. Este aparato, llamado *retícula*, sirve para establecer la coincidencia entre el objeto que se observa y

el eje óptico del anteojo. El tubo que lleva el ocular puede sacarse más ó menos, según la vista del observador, hasta ver con perfecta claridad los hilos; y un tornillo situado en el tubo del anteojo puede hacer variar la distancia focal para distinguir con entera limpieza el objeto que se observa y establecer la coincidencia de que hemos hablado. La retícula es susceptible de un pequeño movimiento en un plano perpendicular al eje óptico, que tiende á acercar ó alejar la intersección de los hilos y el plano del limbo: este movimiento sirve, como veremos, para establecer el paralelismo entre este último plano y los ejes de ambos telescopios.

Los anteojos pueden girar solos é independientemente uno del otro, al derredor del centro del limbo, ó bien se unen al círculo, y entonces se mueven con él al derredor del eje *L*, que sostiene en su otro extremo la pieza *G*, destinada á hacer contrapeso al círculo y los anteojos, á fin de que la falta de equilibrio no incline irregularmente la columna *C*.

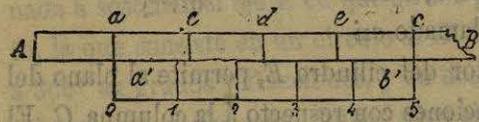
44. Es fácil ahora concebir cuáles son los diversos movimientos de que está dotado el círculo repetidor. El primero, que afecta á todo el instrumento, se verifica al derredor de la columna *C*, la cual lleva consigo el círculo *HH* llamado *azimutal*. El segundo, al derredor del cilindro *E*, permite al plano del limbo tomar todas las inclinaciones con respecto á la columna *C*. El tercero afecta sólo á los anteojos y al limbo, el cual no sale de su plano, puesto que este movimiento se efectúa al derredor del eje *L*, que le es perpendicular y pasa por su centro. El cuarto es el de cada uno de los telescopios separadamente, en planos paralelos al del círculo. Es también fácil comprender que el segundo de estos movimientos combinado con la inclinación que se da á la columna *C* por medio de los tornillos *T*, permite situar el círculo en todas las direcciones posibles con relación al horizonte.



Todos los movimientos pueden paralizarse voluntariamente por medio de tornillos llamados *de presión*. El primero se detiene con el tornillo *K*, que fija el círculo azimutal á uno de los pies del instrumento. El segundo con el tornillo *M*, que une la parte superior del aparato á sus apoyos *A A'*. El tercero, con un tornillo que fija el limbo á su eje *L*. Finalmente, los movimientos de los anteojos se detienen con los tornillos de presión que los reúnen al plano del círculo.

Paralizados los movimientos generales, pueden comunicarse á las diversas partes del instrumento otros suaves, valiéndose de los tornillos llamados de *aproximación*, cuya disposición es muy variada; pero que por lo común van unidos á la pieza que lleva el tornillo de presión, y obran sobre un resorte fijado en la parte que se quiere mover.

45. El anteojo superior, al moverse, lleva consigo una ó varias reglas *RR'* llamadas *alidadas*, cuyos extremos recorren la graduación del limbo, y están provistas de un aparato que se llama *vernier* ó *nonius*, (1) cuyo objeto es apreciar las pequeñas fracciones de la división. El *vernier* no es otra cosa más que un arco igual en extensión á otro correspondiente del limbo, pero dividido en un número de partes una unidad mayor que éste, de tal modo, que *n* divisiones del nonius coincidan con *n* - 1 del círculo. Para comprender la utilidad de esta disposición sea *ab* (fig. 18ª) una parte de la regla graduada



mismo tamaño que *ab*, pero dividida en *n* partes, suponiendo que *ab* lo esté en *n* - 1. Imaginémonos ahora que estando numeradas las divisiones de *a'b'* desde 0 hasta *n*,

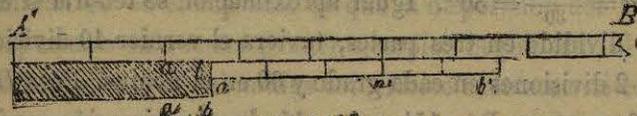
(1) Aunque las voces *vernier* y *nonius* se usan casi como sinónimas, la de *vernier* es la más propia, como derivada del nombre del geómetra francés Vernier, que inventó esta sencilla combinación. Los españoles usan de preferencia la palabra *nonius*, atribuyendo su invención á Pedro Núñez; pero en rigor, aunque la invención de Núñez tuvo también por objeto aproximar las lecturas angulares, su combinación era enteramente diversa de la de Vernier.

se mueva á lo largo de *AB* hasta que el punto 0 coincida con cualquiera de sus divisiones, con *a* por ejemplo. Es claro que la distancia de la división inmediata *c* á la marcada 1, es igual á la diferencia entre la extensión de las partes de *AB* y de *a'b'*; y como estas extensiones están en razón inversa del número de partes, puesto que $ab = a'b'$ se tendrá:

$$ac : a'1 :: n : n - 1$$

de donde $ac - a'1 : ac :: 1 : n$, y $ac - a'1 = \frac{1}{n} ac$. Por la misma razón la distancia de la división 2 á la *d* será $= \frac{2}{n} ac$, y así sucesivamente. Supongamos que se haya hecho coincidir la división 1 con *c*: es evidente que 0 se habrá alejado de *a* una cantidad precisamente igual á la diferencia de las divisiones. Del mismo modo, si se establece la coincidencia entre 3 y *e*, la distancia del 0 á *a* será: $\frac{3}{n} ac$, y así sucesivamente, de manera que si en general *n'* representa la división del vernier que coincide con una de las del limbo, la distancia del *cerro* de aquel á la división más inmediata de éste, que queda *atrás* del *cerro*, estará representada por $\frac{n'}{n} ac$, tomando siempre por unidad a división *ac* del limbo; y así es que si se conoce el valor de esta unidad, será fácil apreciar la fracción que ha recorrido el *cerro* del vernier.

Con lo que hemos explicado no habrá dificultad para comprender la aplicación del vernier á la medida de las cantidades pequeñas, ya sea que se le suponga recto, como lo he hecho para mayor comodidad, ó bien curvo para adaptarlo á la graduación de los instrumentos angulares. Sea *AB* (fig. 19ª), como ántes, una regla, un arco, ó en ge-



neral una escala dividida para medir una magnitud cualquiera, la cual supongamos que aplicada á la escala, abraza un número *N* de partes enteras, más la pequeña fracción *ab*, de modo que su longitud sea $N + ab$. Para apreciar *ab* se aplica el vernier *a'b'* en el punto *b*

donde termina la magnitud, y se observa la división n' que está en coincidencia con alguna de las de la escala, cuyo valor representaremos por D . Entonces la longitud que se busca será: $N + \frac{n'}{n} D$.

Por lo que precede se ve que el nonius proporciona el modo de medir una cantidad igual á la diferencia entre sus divisiones y las del limbo, diferencia que constituye la *aproximación* del instrumento. Si la designamos por a , por D y d el valor de cada división del limbo y del vernier respectivamente, siendo $n - 1$ y n su número, se tendrá:

$$a = D - d \dots\dots\dots (1)$$

La extensión del arco del limbo que coincide con el nonius será: $D(n - 1)$, y la de este último dn . Como son iguales, se tiene la ecuación: $D(n - 1) = dn$, de donde resulta: $D - d = \frac{D}{n}$, y sustituyendo en la (1) se obtiene finalmente:

$$a = \frac{D}{n} \dots\dots\dots (2)$$

lo que quiere decir que la aproximación de un instrumento es igual al valor de una división del limbo, dividido por el número de divisiones del vernier.

Supongamos que en un círculo cada grado esté dividido en seis partes, y que el número de divisiones del nonius que coinciden con las del limbo sea 60. Se tendrá: $D = 10' = 600''$ y $a = \frac{600}{60} = 10''$. Luego con este instrumento podremos apreciar $10''$.

Si el grado está dividido en cuatro partes y el vernier en 30, se tendrá: $a = \frac{900''}{30} = 30''$. Igual aproximación se tendría si estando el grado dividido en tres partes, tuviera el vernier 40 divisiones; ó bien con 2 divisiones en cada grado y 60 en el nonius. Para $D = 20'$, y $n = 20$, y para $D = 15'$ y $n = 15$, la aproximación sería sólo de $1'$.

Recíprocamente si se quiere saber el número de divisiones que debe tener el vernier para que estando el grado dividido en cuatro partes, se puedan apreciar $20''$, se tiene: $n = \frac{15'}{20} = \frac{900''}{20} = 45$. Luego un arco del limbo de 44 divisiones $= 11^{\circ}00'$, se debe dividir en

45 partes. De igual manera pueden hacerse otras muchas combinaciones.

Como sería sumamente incómodo contar las divisiones del nonius desde el *cerro* hasta la que coincida con una del limbo, están por lo común numeradas aquellas que forman un número entero de minutos; así en el primero de nuestros ejemplos, como cada seis divisiones del vernier grabado en la alidada valen $1'$, se numeran desde $0'$ hasta $10'$ de seis en seis, ó bien las líneas que demarcan minutos enteros se hacen un poco mayores. En cuanto al limbo, está numerado de 10° en 10° ó de 5° en 5° , y los grados enteros intermedios están indicados por líneas mayores. Estas disposiciones facilitan la lectura del arco que señala el nonius en cualquiera posición como vamos á verlo.

Supongamos que, por medio del movimiento del anteojo superior, se haga coincidir el *cerro* del limbo con el del vernier, y que en seguida se transporte á otro punto cualquiera, pero en sentido de la numeración, y se desee saber la amplitud del arco recorrido por el telescopio. Lo primero que debe hacerse es ver las decenas de grado comprendidas entre el punto de partida, que es el *cerro* del limbo, y el del nonius, cosa muy fácil puesto que están indicadas por guarismos, y sea 50° . En seguida el número de grados enteros comprendidos entre la última decena y el *cerro* del nonius, que como sabemos, están indicados por líneas mayores, y supongamos que se cuenten tres, con lo que ya tendremos 53 grados enteros. Después se ve cuántas partes de grado hay entre la última línea que señala grados enteros y el *cerro* del vernier, y admitamos que se encuentren cuatro partes, las que representarán $40'$ en el supuesto de que la disposición del limbo sea la que supusimos en nuestro primer ejemplo. Según esto, el arco sería de $53^{\circ} 40'$ si el *cerro* del nonius coincidiese exactamente con la división cuarta; mas como por lo general no sucede esto, imaginémos que el *cerro* se encuentre entre la cuarta y la quinta, y entonces recurriremos al vernier para apreciar el exceso sobre $53^{\circ} 40'$. Para conseguirlo, se busca cuál es aquella de sus divisiones que no parece formar más que una sola con otra del limbo, y una vez que se encuentre, se lee el guarismo que precede inmediatamente en el vernier. Supon-

gamos que la coincidencia tenga lugar en la segunda división del nonius después de la cifra que señala 7', y se tendrá que la cantidad excedente á $53^{\circ} 40'$ es $7' 20''$, por lo que el arco recorrido por el cero del vernier será de $53^{\circ} 47' 20''$.

Debemos advertir que tanto los nonius del círculo superior como los del azimutal, están provistos de microscopios que amplifican las divisiones, sin lo cual sería imposible la lectura de los ángulos; cuando la coincidencia parece existir en dos ó tres líneas consecutivas, se toma el término medio de las indicaciones que les corresponden.

46. Enseñemos ahora el modo de rectificar el círculo repetidor, para lo cual diremos cómo se sitúa el limbo en un plano vertical. Esta operación se efectúa por medio de dos niveles de que está provisto el instrumento, y que se componen de tubos de vidrio perfectamente cerrados y llenos casi en su totalidad de alcohol ó éter, dejando sólo un pequeño espacio, ó *burbuja*, ocupado por el aire ó el vapor del mismo líquido. Esta burbuja, á causa de su peso específico menor que el del líquido, tiende siempre á ocupar la parte más alta, cualquiera que sea la posición del tubo, por lo que si se da á éste una ligera curvatura en el sentido de su longitud, la tangente en la parte media de la burbuja que es el punto culminante, será horizontal; y si se adapta al nivel una escala dividida desde su centro á uno y otro lado, se encontrará el tubo horizontal siempre que ambos extremos de la burbuja señalen divisiones iguales.

Uno de estos niveles está colocado á lo largo del anteojo inferior, é invariablemente unido á él, y el otro de menores dimensiones es paralelo al eje *L* (fig. 17^a) de rotación del limbo, sirviendo el primero para establecer la verticalidad de la columna *C*, y el segundo para situar el cilindro *L* horizontalmente y por consecuencia el plano del limbo en posición vertical. La operación se practica así: por medio de los tornillos *T* del pie, se pone la columna *C* de manera que se aproxime lo más que se pueda á la verticalidad, y en seguida comunicando á la parte superior del instrumento el segundo movimiento de que hemos hablado, al derredor del eje *E*, se establece también á la vista la verticalidad del limbo, y se paraliza este movimiento. Prac-

ticada esta primera aproximación, se hace girar todo el instrumento al derredor de la columna *C*, hasta que el limbo ocupe una posición con poca diferencia paralela á la línea que une dos de los tornillos del pie, ó lo que es lo mismo, que el tercer pie se encuentre en una dirección perpendicular al plano del limbo. En esta posición, muévase el anteojo inferior hasta que la burbuja del nivel se halle en el medio del tubo, lo cual se consigue, primero poco más ó menos, con ayuda de su movimiento general, y en seguida con exactitud por medio de su tornillo de aproximación; que según hemos visto, le comunica pequeños movimientos. Luego que la burbuja ocupa la parte central del tubo, se hace girar el instrumento al derredor de la columna hasta que el vernier del círculo azimutal señale una semicircunferencia, ocupando entonces el limbo una posición paralela á la primera. Si la burbuja, después de restablecido el equilibrio, se detiene en medio del tubo, es prueba de que la columna está situada en el plano vertical perpendicular al eje del nivel; mas si se inclina á uno de los extremos, se hace la corrección para volverla á conducir al centro del tubo, la mitad por medio de los dos tornillos del pie, cuya dirección es paralela á la del limbo, y la otra mitad con el tornillo de aproximación del anteojo inferior. Conviene volver á la primera posición para repetir la prueba, pues es raro que en la primera vez quede destruido todo el error. Luego que, en ambas posiciones, los extremos de la burbuja señalan los mismos guarismos de la escala, se coloca el limbo en una posición perpendicular á aquéllas, lo cual se consigue haciendo que el vernier del círculo azimutal indique haberse movido el instrumento un cuadrante. Es claro que, en esta nueva situación, el limbo será paralelo á la dirección del tercer tornillo, y si la burbuja se detiene á la mitad del tubo, la columna *C*, encontrándose á la vez en los dos planos verticales perpendiculares á ambas posiciones del nivel, será también vertical. En el caso contrario, se hará la corrección con el tercer tornillo del pie sin tocar los otros dos. Generalmente no se destruyen completamente los errores á la primera prueba, sino que hay necesidad de repetir varias veces estos procedimientos, haciendo poco á poco las correcciones, tanto con los tornillos del tripié como con los del anteojo, hasta conseguir

que la burbuja ocupe el medio del tubo en cualquiera posición que se dé al limbo al derredor de la columna.

Una vez satisfechos de la verticalidad de la columna, se pasa á examinar la horizontalidad del eje *L*, que para el efecto lleva, como he dicho, un pequeño nivel. En los mejores instrumentos, este nivel no está fijo al eje, sino que se apoya en él de manera que puede separarse voluntariamente, y en este caso se procede como voy á explicar. Se conduce la burbuja al medio del tubo valiéndose del tornillo de aproximación que hace mover todo el limbo al derredor del cilindro *E*. En seguida se quita el nivel y se invierte de modo que el extremo que estaba, por ejemplo, á la derecha, quede á la izquierda: si en esta segunda posición, vuelve la burbuja al centro, es prueba de que el eje *L* es horizontal; y en el caso contrario, se hará la corrección, la mitad por el tornillo de aproximación, y la otra mitad alargando ó acortando uno de los apoyos del nivel por medio de los tornillos de que está provisto, repitiendo la operación cuantas veces sea necesario hasta conseguir la rectificación completa (1).

Cuando el nivel, por estar fijo, no es susceptible de invertirse, sólo se hará uso del tornillo de aproximación, quedando en la incertidumbre del pequeño error ocasionado por la desigualdad que puede existir en los apoyos, aunque los fabricantes procuran que sea casi nula.

47. Luego que tanto la columna como el limbo se han establecido verticalmente, se procede á corregir el error de *colimación*, que es la falta de paralelismo entre el plano del limbo y la línea que une la intersección de los hilos de la retícula con el centro del lente objetivo, y que se llama *línea de colimación*.

Para conseguirlo, se dirige uno de los anteojos, por ejemplo, el superior, á un objeto muy distante y que ofrezca un punto de mira claro y determinado, por medio de los movimientos generales del instrumento y del limbo, y luego que se establece bien la coincidencia entre dicho objeto y la intersección de los hilos, se lee el ángulo

(1) El fundamento de este modo de proceder se verá en la teoría de los niveles.

que señala el vernier del círculo azimutal. En seguida se hace girar todo el instrumento al derredor de la columna hasta que el mismo vernier indique exactamente una semirevolución ó 180°, y se vuelve á dirigir el anteojo hacia la señal: si ésta queda otra vez cortada por los hilos, el error es nulo, pudiendo considerarse paralelas las dos posiciones que ha tomado el anteojo, en atención á que la pequeña distancia que las separa es insensible con respecto á la del punto de mira. Mas si éste no queda cortado por los hilos, se hará la mitad de la corrección moviendo la retícula por medio de los pequeños tornillos que tiene al efecto y cuyas cabezas sobresalen un poco en el tubo del anteojo cerca del ocular. La otra mitad de la corrección se ejecuta con el movimiento del instrumento al derredor de la columna, y se repite la experiencia, pues casi nunca se destruye enteramente el error con una sola operación. Una vez rectificado, no hay más que hacer coincidir con el mismo punto la retícula del otro anteojo por medio del movimiento especial de que hemos hablado, y se tendrá establecido el paralelismo del limbo y las dos líneas de colimación.

Como estas líneas pueden no coincidir con el eje de figura de los anteojos, esto es, desviarse un poco en el sentido vertical, los mejores instrumentos están dotados de un pequeño movimiento de la retícula al derredor del eje del tubo, que les permite girar 90°; y entonces el desvío que obra en la vertical se reduce á la horizontal, y se procede como hemos explicado hasta que la señal no deje de ser cortada por los hilos al comunicarles este movimiento. Por otra parte, un desvío pequeño en el sentido vertical no tiene influencia alguna en la medida de los ángulos de altura, empleando el principio de la repetición de que muy pronto hablaré.

48. Vamos á explicar ahora el procedimiento que se sigue para tomar el ángulo entre dos objetos. Se comienza por establecer el instrumento sobre su tripié *N* (fig. 17ª), de tal suerte que su centro corresponda verticalmente al punto que sirva de vértice al ángulo, para lo cual se usa una *plomada* *Q* suspendida en medio del tripié, y después se sitúa el plano del limbo en el de los objetos. Aunque esta operación no ofrece dificultad alguna, es cómodo proceder de este modo: al poner el instrumento se hace de manera que uno de los tres

pies ó apoyos del círculo se encuentre en la dirección de uno de los objetos, del de la izquierda por ejemplo: en seguida se hace girar todo el instrumento al derredor de la columna hasta que el cilindro E que sirve de eje de rotación á la parte superior, se halle en la misma dirección, y entonces moviendo el tornillo del pie que se ha dirigido al objeto de la izquierda, se inclina la columna hasta que con el anteojo superior, que de antemano se ha colocado en una posición conveniente, se pueda distinguir la señal. Es ahora claro que el movimiento de la parte superior del círculo al derredor del eje E , se efectúa también al derredor de la línea que une la señal de la izquierda al centro de la estación ó vértice del ángulo; y si en virtud de este movimiento, se hace coincidir el anteojo inferior con la señal de la derecha, se tendrá el limbo colocado en el plano que determinan ambas direcciones, que no es otro más que el de los objetos. Si en esta posición se paralizan todos los movimientos excepto el de los anteojos y el del limbo al derredor de su centro, es evidente que este plano en su rotación no dejará de pasar por ambas señales. Por lo general, es preciso hacer pequeñas correcciones para conseguir la perfecta coincidencia de las retículas con los objetos.

Para proceder á la medida, se pone en contacto el *cero* de uno de los nonius con el punto de partida, que comunmente es el *cero* de la graduación, apretando el tornillo de presión y terminando cuidadosamente la coincidencia con el de aproximación: en seguida se dirige el anteojo superior, sin tocarlo, sino valiéndose del movimiento general del limbo, á la señal de la izquierda A (fig. 20), si las divisiones, vistas desde el centro del círculo, están numeradas de la izquierda á la derecha, ó bien al contrario, si la numeración va en sentido opuesto; y luego que se ha hecho convenir perfectamente la intersección de los hilos con la señal por medio del tornillo de aproximación que mueve todo el círculo, el anteojo ocupará la posición Ca . Si el limbo inferior del instrumento estuviera graduado también, haciendo coincidir de la misma manera el anteojo inferior Cb con la segunda señal B , el ángulo



Fig. 20.

gulo aCb de los anteojos sería el de los objetos, haciendo abstracción del pequeño error que produciría la excentricidad del anteojo inferior; mas no estando dividido, lo que se hace es comunicar al anteojo superior Ca su movimiento independiente del limbo, y hacerlo coincidir por medio de sus tornillos propios con la señal de la derecha B , de modo que ocupe la nueva posición Cb , siendo entonces evidente que el arco ab recorrido por todo el sistema de los nonius es igual á ACB , de modo que no hay más que leer la amplitud del ángulo que indique el vernier que al principio se puso en cero. En cuanto al anteojo inferior, no tiene más uso en esta manera de proceder que el de testificar que durante la operación no se ha movido el limbo, pues es claro que si hubiera sufrido alguna variación con respecto á su posición primitiva, no existiría ya la coincidencia entre el anteojo inferior y la señal B , en cuyo caso se debería restablecer con el movimiento general del instrumento antes de fijar el anteojo superior y leer el ángulo.

49. Veamos ahora de qué deriva el círculo su nombre de *repetidor*. Si el sistema de los nonius fuese exactamente concéntrico con la circunferencia graduada, y al mismo tiempo las divisiones estuviesen exentas de pequeños errores, el procedimiento que hemos explicado daría á conocer con precisión la amplitud del ángulo, por lo menos hasta donde lo permite la aproximación angular del instrumento; mas como estas circunstancias no existen sino con más ó menos imperfección en los mejores círculos, se ha ideado el método de reiterar las medidas del mismo ángulo, con el objeto de disminuir el efecto de los pequeños defectos de construcción, procediendo de este modo: en la primera parte de la operación quedó el anteojo superior en Cb mientras que el *cero* ó en general el punto de partida ocupa la posición Ca ; pues bien, si en virtud del movimiento general del limbo sin tocar los anteojos, se hace de nuevo coincidir el superior con A , el punto a se colocará en a' recorriendo un arco $aa' = ab$; y si después de fijado el círculo en esta posición se lleva sólo el anteojo superior á la señal B , es claro que habrá vuelto á recorrer el arco ab , y la indicación de los nonius será $a'ab$, el cual es doble del ángulo ACB que se desea medir. Volviendo á dirigir el anteojo superior á la pri-