Sustituyendo en la última el valor de a_2 y en éste el de a_1, se obtiene:

$$a_3 = a\,\frac{\text{sen.}\,B_1\,\text{sen.}\,B_2\,\text{sen}\,B_3}{\text{sen.}\,A_1\,\text{sen.}\,A_2\,\text{sen.}\,A_3}$$

Prosiguiendo así, el último lado tendrá por expresión:

$$a_n = a\,\frac{\text{sen.}\,B_1\,\text{sen.}\,B_2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\text{sen.}\,B_n}{\text{sen.}\,A_1\,\text{sen.}\,A_2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\text{sen.}\,A_n}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Como suponemos que los ángulos incluyen los errores, este valor que es el que resulta del cálculo, contiene x_n, de modo que el lado correcto será:

$$a_n \pm x_n = a\,\frac{\text{sen.}\,(B_1 \pm \frac{4}{3}e)\,\text{sen.}\,(B_2 \pm \frac{4}{3}e)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\text{sen.}\,(B_n \pm \frac{4}{3}e)}{\text{sen.}\,(A_1 \mp \frac{2}{3}e)\,\text{sen.}\,(A_2 \mp \frac{2}{3}e)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,\text{sen.}\,(A_n \mp \frac{2}{3}e)}$$

en el cual he tomado para e el término medio de las diferencias que resultan en cada triángulo, respecto de 180°.

Tomando los logaritmos de esta ecuación y repaesentando por α_1, $\alpha_2\,\ldots\ldots\ldots\,\alpha_n$ y $\beta_1, \beta_2\,\ldots\ldots\ldots\,\beta_n$ para los ángulos A y B respectivamente, las diferencias logarítmicas por 1″ tales como se encuentran en las tablas de los senos, se obtendrá fácilmente:

$$\log.\,a_n + \log.\left(1 \pm \frac{x_n}{a_n}\right) = \log.\,a + \left[\begin{array}{l}\log\text{sen}\,B_1 + \log\text{sen}\,B_2 \ldots + \log\text{sen}\,B_n \\ -\log\text{sen}\,A_1 - \log\text{sen}\,A_2 \ldots - \log\text{sen}\,A_n\end{array}\right]$$

$$\pm\,\frac{2}{3}\left[\begin{array}{l}2(\beta_1 + \beta_2\,\ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + \alpha_1 + \alpha_2\,\ldots\ldots\ldots + \alpha_n\end{array}\right]$$

Si la ecuación (1) se expresa también bajo la forma logarítmica y se combina con la anterior, resulta.

$$\log.\left(1 \pm \frac{x_n}{a_n}\right) = \pm\,\frac{2}{3}e\begin{pmatrix}2(\beta_1 + \beta_2\,\ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + \alpha_1 + \alpha_2\,\ldots\ldots\ldots + \alpha_n\end{pmatrix}$$

Desarrollando el binomio logarítmico hasta el segundo término solamente, puesto que $\frac{x_n}{a_n}$ es siempre muy pequeño, se tendrá por último representando por M el módulo 0.4342945 ...... de las tablas:

$$M\,\frac{x_n}{a_n} = \frac{2}{3}\,e\begin{pmatrix}2(\beta_1 + \beta_2\,\ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + \alpha_1 + \alpha_2\,\ldots\ldots\ldots + \alpha_n\end{pmatrix}$$

Como los logaritmos de que se hace uso comunmente tienen siete decimales, los valores de β_1, β_2, α_1, α_2, etc., deben expresar *diez millonésimos*, de suerte que dividiendo el segundo miembro por 10.000,000, se tiene después de hechas las operaciones:

$$\frac{x_n}{a_n} = 0.00000015\,e\begin{pmatrix}2(\beta_1 + \beta_2\,\ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + \alpha_1 + \alpha_2\,\ldots\ldots\ldots + \alpha_n\end{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

que es la relación buscada para calcular el error de un lado cualquiera en la hipótesis más desfavorable.

He tratado la cuestión en general, porque siempre es conveniente formarse una idea del error final que puede cometerse en una operación; pero siendo mi principal objeto asignar un límite á la magnitud de un triángulo para que sus lados calculados no presenten en el plano diferencia apreciable respecto de sus valores exactos, supondré $n = 1$; y si admitimos además que el triángulo sea equilátero, tendremos que las diferencias logarítmicas serán iguales entre sí y su valor medio de 12.15. Entonces nuestra fórmula se convierte en:

$$a_1 = \frac{x_1}{0.00000547\,e}$$

ó con la aproximación necesaria para el caso en esta otra.

$$a_1 = 180000\,\frac{x_1}{e}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Vamos á establecer ahora la condición de que x_1 sea inapreciable en el plano.

37. Se llama *escala* la relación que existe entre las líneas del plano y las que estas representan sobre el terreno; y así se dice que un plano está construído en la escala de *uno á diez mil*, ó de $\frac{1}{10000}$, cuando 10000 metros ú otras unidades cualesquiera del terreno, están representadas por una en el papel. Generalmente se acostumbra á designar las escalas por fracciones cuyo numerador es la unidad y cuyos denominadores indican el número de unidades del terreno que equivalen á una sobre el plano. Es claro que esta relación nos permite determinar la longitud que debe tener una línea en el papel cuando

se conoce su valor en el terreno: por ejemplo, en la escala de $\frac{1}{15000}$ quiere saberse cuál debe ser el tamaño de una línea que representa una distancia de 4780^{m}. Se pondrá esta proporción:

$$15000:1::4780:y=\frac{478}{1500}=0^{m}3187$$

Si, por el contrario, se ha medido en el plano una línea de $0^{m}672$ y se quiere saber cuánto representa, en la escala de $\frac{1}{20000}$, se tendrá:

$$1:20000::0^{m}672:y=20000\times0^{m}672=13440 \text{ metros.}$$

Según esto, es fácil comprender que una misma longitud l se representa en el plano por una recta tanto más pequeña cuanto menor es la escala, y que para cada escala habrá ciertas distancias que sean absolutamente inapreciables en el plano: por ejemplo, una extensión de 5^{m} se representa por $0^{m}001$ es la escala de $\frac{1}{5000}$; por $0^{m}0005$ en la de $\frac{1}{10000}$; y por $0^{m}000125$ en la de $\frac{1}{40000}$. En los dos primeros casos los 5^{m} pueden apreciarse perfectamente, pero en el último son del todo insensibles, perdiéndose en el pequeño espesor de las líneas más finas que puedan trazarse con los instrumentos más delicados. En el papel se estima cómodamente la tercera y con bastante aproximación la cuarta parte de un milímetro; pero es casi imposible responder de su quinta parte ó de $0^{m}0002$, que es la cantidad que se considera como *el límite de la extensión apreciable*. A pesar de esto, tomaremos como límite la mitad de esta cantidad ó $0^{m}0001$ (un diezmilímetro); y como este número equivale á una longitud tanto mayor cuanto menor es la escala, resulta que á cada valor de ésta, corresponderá cierta extensión que no puede figurar sobre el papel.

38. Volviendo al asunto que nos ocupa, estableceremos la condición de que el error x_1 corresponda á esta pequeñísima fracción, designando por $\frac{1}{r}$ la escala que se ha creído conveniente adoptar para la construcción; y entonces se tendrá esta proporción: si una en el plano equivale á r unidades sobre el terreno, la fracción $0^{m}0001$ equivaldrá á x_1; de la que se obtiene:

$$x_1=0^{m}0001\times r.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3) tendremos:

$$a_1=18\frac{r}{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

que es la que da el mayor valor de los lados en función de la escala y de los errores angulares: como la hemos deducido de la suposición más desventajosa, estaremos seguros de que no será posible apreciar en el plano las diferencias, aun en el caso de que nuestra hipótesis llegue á verificarse. La cantidad e, que principalmente depende del instrumento que debe usarse, se puede determinar experimentalmente tomando varias veces los tres ángulos de un triángulo, de la manera que enseñaremos en el lugar correspondiente, y comparando la suma de ellos con 180°. La diferencia e que se encuentre será el error medio posible de un triángulo. En cuanto á la escala, se fija por la extensión del terreno comparada con la que se quiere dar al plano.

Para aplicar nuestra fórmula, supongamos que se haya adoptado la escala de $\frac{1}{20000}$, y que midiendo los tres ángulos de un triángulo, se haya encontrado en término medio $s=179°\,59'\,45''$. Se tendrá: $r=20000$ y $e=15''$. La máxima longitud es por consiguiente:

$$a_1=\frac{18\times20000}{15}=24000 \text{ metros.}$$

De este modo he calculado la siguiente tabla para las diversas escalas de la primera columna, que son las más usadas, y para diferentes valores de e desde $1'$ hasta $10''$. La última columna contiene los distintos valores de x_1 en el terreno, que equivalen á $0^{m}0001$ en el plano.

TABLA DE LA MAYOR LONGITUD DE LOS LADOS.

ESCALA $= \frac{1}{r}$	10″	20″	30″	40″	50″	60″	x_1
$\frac{1}{5000}$	9000^m	4500^m	3000^m	2250^m	1800^m	1500^m	0^{m}5
$\frac{1}{10000}$	18000	9000	6000	4500	3600	3000	1.6
$\frac{1}{15000}$	27000	13500	9000	6750	5400	4500	1.5
$\frac{1}{20000}$	36000	18000	12000	9000	7200	6000	2.0
$\frac{1}{25000}$	45000	22500	15000	11250	9000	7500	2.5
$\frac{1}{30000}$	54000	27000	18000	13500	10800	9000	3.0
$\frac{1}{35000}$	63000	31500	21000	15750	12600	10500	3.5
$\frac{1}{40000}$	72000	36000	24000	18000	14400	12000	4.0
$\frac{1}{45000}$	81000	40500	27000	20250	16200	13500	4.5
$\frac{1}{50000}$	90000	45000	30000	22500	18000	15000	5.0

Repito que los números de esta tabla no deben considerarse más que como el límite que jamás será prudente traspasar; porque es claro que aunque no sean perceptibles los errores de los primeros lados, siempre influyen en la posición de los vértices, y pueden ocasionar en los últimos diferencias sensibles, especialmente cuando el número de los triángulos es considerable. También debemos advertir que para fijar la extensión de los lados se atiende siempre al poder de los anteojos: los de los instrumentos comunes que se usan en la Topografía alcanzan con bastante claridad hasta quince ó veinte mil metros, y por otra parte, cuando los triángulos adquieren mayores dimensiones, entran ya en el dominio de la Geodesia, y si se quiere proceder con exactitud, deben guiarse las operaciones según los métodos que prescribe esta ciencia.

39. Cuando sucede que porque no se encuentre terreno á propósito, ó por cualquiera otra circunstancia, la base medida sea notablemente menor que la extensión media que se ha juzgado conveniente adoptar para los lados de la cadena, en virtud de las consideraciones que preceden, se hacen crecer lentamente las distancias procurando formar triángulos isósceles hasta que adquieran las dimensiones que se desea. Estableceré con este motivo una fórmula que puede ser útil en muchos casos para regular el incremento de los lados.

Sea $AB = b$, la base, (fig. 10)ª y designemos por b', b'' ...... b_n los lados del primero, segundo, etc., triángulos que supondremos isósceles y semejantes, siendo el último lado b_n el que representa la longitud que se haya adoptado, y A los ángulos iguales adyacentes á b, b', b'', etc. Si desde el ángulo opuesto á b se considera bajada una perpendicular á este lado, los triángulos rectángulos que resultan darán:

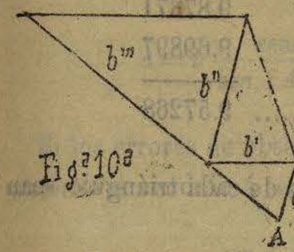

Fig.ª 10ª

$$b' = \frac{0.5\, b}{\cos.\ A}$$

Haciendo la misma operación en los otros triángulos, se tiene:

$$b'' = \frac{0.5\, b'}{\cos.\ A}: \qquad b''' = \frac{0.5\, b''}{\cos.\ A}: \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b_n = \frac{0.5\, b_{n-1}}{\cos A}$$

Sustituyendo en la última ecuación los valores de todas las que preceden, se obtendrá sin dificultad:

$$b_n = b\,\frac{(0.5)^n}{\cos.^n A}$$

de la que resulta:

$$\cos. A = 0.5 \sqrt[n]{\frac{b}{b_n}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Supongamos que habiendo medido una base de 2500^m, se quiere saber el valor que se debe dar á los ángulos adyacentes á las bases para que á los 4 triángulos adquieran los lados una longitud media de 8000^m.

$b = 2500$	log	3.39794
$b_n = 8000$	"	— 3.90309
$n = 4$		9.49485
	" $\sqrt[4]{\ }$	9.87371
	" 0.5	9.69897
$A = 68°\ 3'$	" cos. A	9.57268

Será necesario, pues, que los ángulos iguales de cada triángulo sean de cosa de 68°.

Si se desea saber después de qué número de triángulos llegarán los lados á 10000^m, siendo la base de 3000^m, y en el supuesto de que los ángulos adyacentes sean de 67°, se despejará á n tomando los logaritmos en la ecuación (1), con lo que resulta:

$$n = \frac{\log. \frac{b_n}{b}}{\log. \frac{0.5}{\cos. A}}$$

log. b_n	4.00000	log. 0.5.........	9.69897	
" b	— 3.47712	" cos A......	— 9.59188	
" $\frac{b_n}{b}$	0.52286	" $\frac{0.5}{\cos A}$	0.10709	$n = \frac{523}{107} = 5$

40. Todo lo que se ha dicho con respecto á las triangulaciones fundamentales, se aplica tambien á las cadenas secundarias, aunque teniendo presente que como éstas son de menor importancia, no es necesario ser tan estricto en el cumplimiento de las reglas que preceden; así es que en los últimos triángulos cuyos lados son ya muy pequeños, se omite á veces la observación del tercer ángulo, el cual se deduce restando de 180° la suma de los dos observados. Con este modo de proceder, no se puede saber ni aun el efecto final de los errores de observación, de manera que admitiendo la igualdad numérica de éstos, vamos á examinar los dos casos que se presentan.

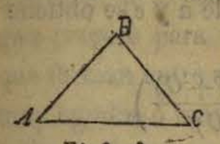

Fig.ª 11ª

Sea $A\,C = b$ el lado conocido, desde cuyos extremos se observan los ángulos A y C (Figura 11ª) para situar el punto B por la intersección de ambas visuales. Los lados a y c se calcularán por las ecuaciones:

$$a = b\,\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. }(A + C)} \qquad c = b\,\frac{\text{sen. } C}{\text{sen. }(A + C)}$$

Si los errores de observación tienen distintos signos en A y C, las anteriores vendrán á ser:

$$a \pm x = b\,\frac{\text{sen. }(A \pm \alpha)}{\text{sen. }(A + C)} \qquad c \mp y = b\,\frac{\text{sen. }(C \mp \alpha)}{\text{sen. }(A + C)}$$

las cuales dan respectivamente.

$$x = \alpha\, a \cot. A \qquad y = \alpha\, c \cot. C$$

Sustituyendo en ellas los valores de a y c, se cambian en

$$x = \alpha\, b\,\frac{\cos. A}{\text{sen. }(A + C)} \qquad y = \alpha\, b\,\frac{\cos. C}{\text{sen. }(A + C)}$$

Estos resultados demuestran que el caso más favorable se tiene cuando $A + C = 90°$, ó lo que es lo mismo, cuando las visuales dirigidas á B se cortan en ángulo recto. En esta circunstancia, x disminuye al paso que crece A; pero como esto no puede suceder sino á costa de C que al decrecer aumenta el valor de y, resulta que para que las diferencias de a y c sean las mismas, se debe tener: $A = C = 45°$.

Si α es del mismo signo en A y C, las ecuaciones serán:

$$a \pm x = b\,\frac{\text{sen. }(A \pm \alpha)}{\text{sen. }(A + C \pm 2\,\alpha)} \qquad c \pm y = b\,\frac{\text{sen. }(C \pm \alpha)}{\text{sen. }(A + C \pm 2\alpha)}$$

las que tratadas como en el número 32, darán por resultado:

$$x = \alpha\, a[\cot. A - 2\cot.(A + C)] \qquad y = \alpha c[\cot. C - 2\cot.(A + C)]$$

Si en estas ecuaciones se sustituyen los valores de a y c se obtiene sin dificultad:

$$x = b\,a\left(\frac{\cos. A}{\operatorname{sen.}(A+C)} - \frac{2\operatorname{sen.} A \cos.(A+C)}{\operatorname{sen.}^2(A+C)}\right)$$

$$y = b\,a\left(\frac{\cos. C}{\operatorname{sen.}(A+C)} - \frac{2\operatorname{sen.} C \cos.(A+C)}{\operatorname{sen.}^2(A+C)}\right)$$

Hagamos notar que el signo de los segundos términos no es más que aparente, á menos que se tenga: $A + C < 90°$. Si $A + C = 90°$, sacaremos la misma consecuencia que en el caso anterior, esto es, que para que los errores de ambos lados sean numéricamente iguales, el triángulo debe ser isósceles-rectángulo, siendo de 45° los ángulos observados.

41. De todas las consideraciones que preceden, se deduce que, en los reconocimientos que se practican para formarse un plan de triangulación, debe tenerse presente para la elección de los vértices: 1º, que los triángulos se acerquen lo más que sea posible á la forma equilátera, cuidando de aumentar poco á poco los lados cuando la base sea menor que la longitud media que se haya adoptado: 2º que los puntos elegidos sean notables, bien por su importancia como edificios públicos, cerros, límite de tierras, etc., ó bien por su situación favorable para enlazarlos con las triangulaciones secundarias que sirven de apoyo inmediato á las demás operaciones del levantamiento: 3º que el número de los triángulos sea el menor posible, porque además de la economía de tiempo y de trabajo que de esto resulta, las probabilidades de error aumentan con el número de los triángulos; pero se combinará esta prescripción con el poder de los anteojos y con la mayor longitud de los lados, según el error angular que se crea posible cometer y la escala que haya de emplearse.

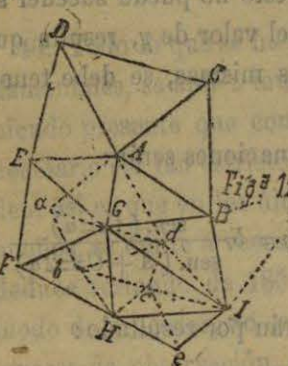

Fig.ª 12.ª

Es conveniente en los reconocimientos para elegir los puntos trigonométricos, proceder por los polígonos de este modo: Desde el punto A, (fig. 12ª) que supondremos ser uno de los

extremos de la base, se fija la atención en B, C, D, E y G que se juzgan propios para vértices, tomando aproximadamente los ángulos que forman entre sí de dos en dos, para estar seguros de que no sean muy agudos ó muy obtusos. En seguida se pasa á cada uno de ellos, á G por ejemplo, para cerciorarse de si son ó no visibles E y B que desde él deben observarse, y satisfechos de esto, se eligen F, H, I, con el fin de cerrar el nuevo polígono $ABIHFE$ al derredor de G, prosiguiendo de esta manera en toda la extensión del terreno.

Una vez hecha la elección de los vértices de la cadena primaria, se hace también la de los puntos a, b, c, d, etc., que han de formar los triángulos secundarios, atendiendo, aunque en menor escala, á las mismas condiciones que para aquellos, y procurando, sobre todo, enlazarlos cuanto sea posible con los de primer orden. Si por ser muy pequeños, el ingeniero no cree necesario tomar más que dos ángulos de cada uno, tratará de que las visuales que fijan el tercer punto sean perpendiculares entre sí, y si se puede, que sean más de dos, pues es claro que si no hay error todas deberán cortarse en el mismo punto, lo que proporciona comprobación.

42. Para poder observar los ángulos, se construyen en los vértices *señales* ó *monumentos* cuya duración y tamaño dependen de la importancia y exactitud de las operaciones. En la mayor parte de los casos basta establecer estacas fijadas sólidamente en el suelo en posición vertical para que sirvan de punto de mira, y provistas de una bandera para distinguirlas á lo lejos. A fin de no exponerse á perder los puntos porque el viento ú otra causa cualquiera derribe el asta, conviene señalarlos además con otra estaca pequeña cubierta enteramente por la tierra (fig. 13ª) ó con un cerco de piedras colocado al derredor de la bandera, etc.

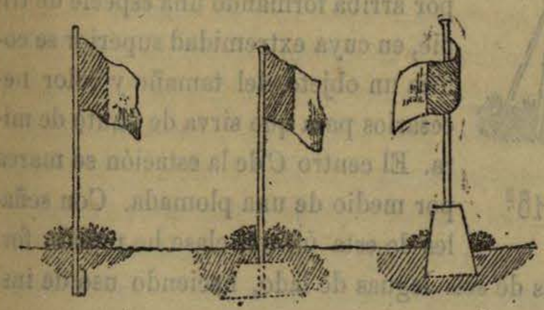

Fig.ª 13.ª Fig.ª 14.ª Fig.ª 15.ª

Cuando se desea proceder con más exactitud, ó encontrar en cualquier tiempo los puntos trigonométricos, se hace uso de trozos de madera ó de piedra *A*, (fig. 14ª) de cosa de 0^m3 de grueso, con una cavidad cilíndrica *B* en el centro, destinada á recibir la bandera, y cubierta del todo por la tierra que se aprieta fuertemente á su derredor. Si son de madera, es conveniente rodearlos de una capa de carbón, con el objeto de que estén menos expuestos á la acción de la humedad. Finalmente, se usan también pequeños trozos de pirámide ó de cono (fig. 15ª), construídos de mampostería, cantería ó ladrillo. Señales de esta última clase son las que se han construído para la triangulación del Distrito.

Las banderas deben tener un color que forme contraste con el objeto sobre el que se proyectan para poderlas distinguir con claridad. En nuestros trabajos hemos usado banderas cuadradas de 0^m5 de lado, con la mitad roja y la otra blanca, porque según la hora del día y el estado de la atmósfera, se ve mejor uno de estos colores que el otro. Para distancias considerables, y sobre todo, cuando las señales están establecidas en alturas de manera que desde las otras estaciones se vean proyectadas sobre el fondo del cielo, es preferible usar ó un solo madero (fig. 16ª) en cuya parte superior se ata un haz de paja, ó de cualquiera hierba que presente un punto de mira conveniente, ó bien se forma la señal con tres maderos atados por arriba formando una especie de tripié, en cuya extremidad superior se coloca un objeto del tamaño y color necesarios para que sirva de punto de mira. El centro *C* de la estación se marca por medio de una plomada. Con señales de esta última clase he podido formar triángulos de más de seis leguas de lado, haciendo uso de instrumentos topográficos comunes.

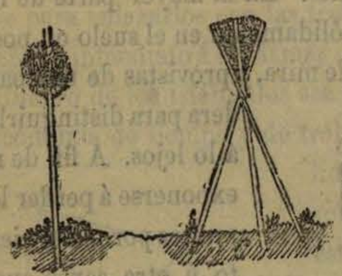

Fig.ª 16ª

En cuanto á las dimensiones que conviene dar á las señales, en altura como en espesor, se comprende desde luego que dependen en gran parte de la magnitud de los lados trigonométricos;

pero trataré este punto después de indicar el modo de medir los ángulos.

En general, las torres, cúpulas ú otros objetos terminados en punta que se vean desde lejos, suministran buenas señales, aunque tienen el inconveniente de que no siempre es posible colocarse en la vertical del punto de mira cuando se miden los ángulos desde ellas, y por tanto exigen un método particular de observación que pronto daremos á conocer.
