recurra á esta clase de procedimientos con la mayor moderación, ó cuando sea absolutamente indispensable, procurando siempre servirse de ángulos que no sean muy agudos. En general debe tenerse presente que las condiciones que se han establecido en el número 12, son las que proporcionan los mejores resultados, especialmente si el terreno que se elige presenta un horizonte despejado que permita configurar á satisfacción los primeros triángulos.

29. Aunque en teoría basta el conocimiento de un solo lado para calcular todos los de la cadena, como en la práctica es indudable que siempre se cometen pequeños errores, por más exactos que sean los instrumentos y los métodos empleados, es preciso medir, al fin de las operaciones, otra base, distante de la primera lo más que sea posible, lo cual no sólo sirve de comprobación, sino que proporciona los medios de dividir los errores de la manera más ventajosa, según veremos en la parte relativa al cálculo de los triángulos.

30. Para concluir lo tocante á las bases, advertiremos que todo lo que se diga en la Geodesia con respecto á ésta, como á las demás partes de la triangulación, es también aplicable á la Topografía; pues aunque lo que se ha explicado, es suficiente para los casos comunes, hay muchas veces necesidad de recurrir á métodos geodésicos en los vastos terrenos de la República cuando se desea proceder con toda exactitud.

CAPITULO III.

DE LA ELECCIÓN DE LOS VÉRTICES.

31. Un reconocimiento previo del terreno, y el estudio detenido de las localidades dan mucha luz sobre la elección de los puntos que bien por su situación en alturas, ó por su importancia como monumentos, edificios públicos, límites, etc., merezcan la atención del ingeniero. No puedo menos de recomendar estos reconocimientos, ejecutados, si es posible, con algún instrumento de fácil transporte, y teniendo presentes todas las consideraciones de que trataré en este capítulo, persuadido de que el tiempo que se emplea en ellos queda ampliamente recompensado con la seguridad de poderse trazar un plan fijo de operaciones, evitándose con él las vacilaciones consiguientes de trabajar al acaso, y por tanto con mucha menos rapidez. Pero no basta estar convencido de la importancia de ciertos puntos bajo el aspecto que hemos considerado, sino que además es preciso ver si los triángulos establecidos en ellos satisfacen á las mejores condiciones para que los errores de observación tengan la menor influencia posible en los resultados. Investiguemos, pues, cuáles son estas condiciones.

32. Para conseguirlo, supongamos que siendo A, B y C los ángulos de un triángulo, y a, b, c los lados opuestos, sean α y β los pequeños errores cometidos al medir los ángulos A y B, y x el que resulta en el lado a en virtud de ellos. Supongamos también que b es la

base medida ó un lado conocido por las resoluciones anteriores, cuyo valor consideraré por ahora como exacto, y consultemos al análisis sobre la forma que conviene dar al triángulo para que x sea el menor posible.

Tenemos que la ecuación que da el lado a si A y B fueran correctos, es:

$$a = b \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B} \qquad (1)$$

Mas en virtud de los errores, se convertirá en esta otra:

$$a + x = b \frac{\text{sen. } (A + \alpha)}{\text{sen. } (B + \beta)} \qquad (2)$$

Desarrollando tendremos:

$$a \text{ sen. } B \cos. \beta + a \cos. B \text{ sen. } \beta + x \text{ sen. } B \cos. \beta + x \cos. B \text{ sen. } \beta$$
$$= b \text{ sen. } A \cos. \alpha + b \cos. A \text{ sen. } \alpha$$

Pero reflexionando que α y β son siempre muy pequeños, podremos tomar los arcos por sus senos y la unidad por sus cosenos, y desechando además el producto $x\beta$, que es de segundo orden, resulta:

$$a \text{ sen. } B + a \beta \cos. B + x \text{ sen. } B = b \text{ sen. } A + \alpha b \cos. A$$

Abreviando con ayuda de la ecuación (1), sustituyendo el valor de b sacado de la misma y despejando se tiene:

$$x = a (\alpha \cot. A - \beta \cot. B)$$

Los pequeños errores α y β son siempre debidos á las mismas causas, tales como la imperfección de los instrumentos, de la vista del observador, etc., y por tanto son independientes del valor de los ángulos, de modo que pueden suponerse iguales, y entonces la fórmula anterior viene á ser:

$$x = a \alpha (\cot. A - \cot. B) \qquad (3)$$

Este sesultado indica que el error que resulta en el lado a será tanto menor cuanto menos difieran A y B, y llegará á ser nulo cuando $A = B$. De la misma manera, el error y del tercer lado c tendría por expresión:

$$y = c \alpha (\cot. C - \cot. B)$$

y sería $= 0$, si $C = B$. De modo que la condición más ventajosa se tiene cuando $A = B = C$, ó lo que es lo mismo, cuando el triángulo es equilátero.

En el cálculo que precede hemos supuesto que α y β son del mismo signo. Analicemos el caso contrario, suponiendo que β se convierte en $-\beta$, y la ecuación (2) será:

$$a + x = b \frac{\text{sen. } (A + \alpha)}{\text{sen. } (B - \beta)}$$

Haciendo en esta última las mismas consideraciones que anteriormente, llegaremos á obtener:

$$x = a \alpha (\cot. A + \cot. B)$$

Sustituyendo en lugar de las cotangentes sus equivalentes $\frac{\cos.}{\text{sen.}}$ se tendrá después de reducir al mismo denominador:

$$x = a. \alpha \frac{\text{sen. } (A + B)}{\text{sen. } A \text{ sen. } B} = a \alpha \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A \text{ sen. } B}$$

Si restamos la fórmula que da $\cos. (A+B)$, de la que da $\cos. (A-B)$, obtendremos:

$$\text{sen. } A \text{ sen. } B = \frac{\cos. (A - B) - \cos. (A + B)}{2}$$

y sustituyendo en la anterior, resulta:

$$x = a. \alpha \frac{2 \text{ sen. } C}{\cos. (A - B) + \cos. C} \qquad (4)$$

Por esta expresión se ve igualmente que el factor de a, α será tanto más pequeño, cuanto menos difieran A y B, y el caso más favorable se tiene cuando $A = B$. El valor de y sería:

$$y = c. \alpha \frac{2 \text{ sen. } A}{\cos. (B - C) + \cos. A}$$

el cual llegaría á su *minimum* cuando $B = C$.

Ambas hipótesis nos han conducido, pues, á admitir como principio que *en la triangulación la forma equilátera es la más favorable para disminuir el efecto de los errores angulares.*

33. A la verdad, este precepto, no es aplicable estrictamente en la práctica, aunque debe procurarse en cuanto sea posible acercarse á su cumplimiento, evitando el uso de ángulos muy agudos: en las operaciones delicadas se desechan, por lo común los ángulos menores que 30° y mayores que 120°. A pesar de esto, como en general un punto queda mejor situado por triangulación que de cualquiera otra manera, especialmente cuando sirve de vértice á varios triángulos, creo que sin perder de vista el principio enunciado puede el ingeniero, en algunos casos excepcionales, valerse de ángulos agudos.

34. Busquemos ahora el error que resulta en uno de los lados, originado por el que se supone cometido en b que sirve de base para el cálculo, y el que llamaremos δ suponiendo á los ángulos exactos. La ecuación (1) se convertirá en:

$$a + z = (b + \delta)\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

Haciendo la multiplicación y reduciendo se encuentra:

$$z = \delta \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

El ángulo B es el opuesto á la base b, y si es muy agudo, el multiplicador de δ será mayor que la unidad y de consiguiente $z > \delta$. (*)

(*) Aunque este principio se comprende fácilmente, como es de una grande importancia en la práctica, me parece oportuno darle más desarrollo.

Si una variable y depende de un coeficiente a y de otra variable x, cuyo valor se deduce de la observación, y en el que se comete un error $d\,x$, el error que resulta para y será mayor ó menor que $d\,x$ según que a sea mayor ó menor que la unidad.

En efecto, el enlace de estas tres cantidades puede representarse por la ecuación:

$$y = a\,x$$

Diferenciando se tendrá $d\,y = a\,d\,x$. Hagamos la constante $a = 1 + m$, y sustituyendo en la diferencial y transportando, se obtendrá:

$$d\,y - d\,x = m\,d\,x$$

Para no salir de los límites, supongamos $B = 30°$, y entonces el valor medio de A y C sera:

$$\frac{150°}{2} = 75°$$

Haciendo las sustituciones, el coeficiente δ resulta:

$$\frac{\text{sen. } 75°}{\text{sen. } 30°} = 1.9$$

lo que indica que el error z viene á ser casi doble de δ.

El signo de $d\,y - d\,x$ dependerá del de m. Si m es positivo, en cuyo caso $a > 1$, se tendrá: $d\,y > d\,x$.

Si m es negativo, en cuyo caso $a < 1$, se tendrá: $d\,y < d\,x$.

Luego cuando a es una fracción, el error de la variable dependiente y es *menor* que el que se comete en la variable independiente x.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera determinar una distancia contando el número de segundos que transcurren entre las percepciones de la luz y de la detonación que produce un cañonazo, sabiendo que el sonido recorre un espacio de 341^{m} próximamente por segundo. Nuestra ecuación aplicada á este caso sería $y = 341\,x$, y si quisiéramos valuar el error que puede cometerse, tendríamos: $d\,y = 341\,d\,x$. En esta ecuación $d\,x$ representa el error cometido en la valuación del tiempo, y para esto son tan limitados, nuestros medios de observación, que apenas puede responderse de la apreciación de $0^{s}.2$, y así es que considerando á esta pequeña cantidad como el error *posible* de observación, resultará:

$$d\,y = 341^{m} \times 0.2 = 68^{m}2$$

Así, pues, habría una incertidumbre de $68^{m}2$ en la distancia, y sería necesario repetir las pruebas multitud de veces para llegar á un resultado medianamente aproximado, pudiendo asegurarse que jamás se conocería la distancia con precisión.

Si por el contrario, se desea saber el número de segundos que emplea el sonido en recorrer una distancia dada, se tendrá: $y = \frac{1}{341}\,x$, y aun suponiendo un gran error, tal como de 20^{m} en la apreciación de la distancia, el que resultaría para y sería sólo $d\,y = \frac{1}{341} \times 20 = 0^{s}.059$, cantidad casi inapreciable.

El método de *aproximaciones sucesivas*, tan usado especialmente en los cálculos astronómicas, para corregir una cantidad que se conoce aproximativamente, se deriva inmediatamente del prineipio que acabo de demostrar.

Sea, en efecto, L la magnitud que se busca, l su valor aproximativo, y designemos por y la corrección que se desea encontrar, de manera que se tenga:

$$L = l + y$$

Este resultado recomienda de nuevo el medir las bases con extremo cuidado, á fin de que δ tenga el menor valor posible, y darles una extensión poco diferente de los demás lados, con el objeto de que no se aumenten los errores de observación.

Mas si al investigar el valor de y, se halla que esta cantidad es precisamente una función de la incógnita L, que en general podemos representar por $y = a\,L$, es claro que en todo rigor, esta corrección no debería emplearse, puesto que es indeterminada por contener la incognita; mas si el coeficiente a es pequeño, no hay inconveniente en la práctica, en sustituir el valor aproximativo en lugar del valor real, esto es, tomar $y = a\,l$. Si esta corrección fuese muy pequeña, la sustitución no alteraría su verdadero valor, ó por lo menos el error resultante sería del todo despreciable; mas admitamos que introducida en la ecuación de arriba diese una cantidad L' diferente de L, aunque más aproximada que l: en tal caso repetiríamos el cálculo de y usando el nuevo valor encontrado, esto es: $y = a\,L'$, y proseguiríamos así hasta que resultara para L, una cantidad igual á la última que se había empleado en el cálculo de la corrección. En los problemas de la astronomía práctica, esta clase de correcciones son siempre muy pequeñas, de manera que por lo común, basta la primera aproximación, ó á lo más, la segunda, para obtener el resultado que se desea.

No deben perderse de vista estas consideraciones, siempre que se proponga alguna nueva fórmula ó procedimiento para deducir por medio de ciertos datos, el valor de una incógnita. Un ejemplo hará conocer la importancia práctica del método de aproximaciones sucesivas.

Supongamos que no se conociera medio alguno sencillo y directo para extraer la raíz cuadrada de un número N, que supondré compuesto de dos factores a y b, ó lo que es lo mismo: $N = ab$. Sea x la raíz incógnita, y puesto que en un producto cualquiera la suma de los factores es tanto menor cuanto más se acercan éstos á ser iguales, inferimos que x debe ser menor que $\frac{1}{2}(a+b)$. Llamemos u la diferencia, y tendremos la ecuación de condición:

$$x = \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}(a+b) - u$$

que elevada al cuadrado, desarrollada y reducida, produce:

$$4(a+b)u - 4u^2 = (a-b)^2$$

En lugar de resolver esta ecuación de segundo grado, notemos que si se escogen los factores a y b de modo que su diferencia sea pequeña respecto de su suma, el valor de u será muy poco considerable, y con más razón lo será su segunda potencia. La ecuación anterior da:

$$u = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \frac{u^2}{a+b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

35. La longitud de los lados de una cadena primaria ó fundamental, depende tanto de la extensión de terreno que abrazan las operaciones y del alcance de los anteojos de los instrumentos, como de los errores que necesariamente resultan en los mismos lados á consecuencia de los que puedan cometerse en la medida de los ángulos.

y en el supuesto de ser a y b muy poco diferentes, el segundo término puede omitirse por muy pequeño, y el primero dará la primera aproximación u', á saber:

$$u' = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}$$

Poniendo este valor aproximativo en el término que contiene u^2, se obtendrá la segunda aproximación:

$$u'' = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^3}$$

Este nuevo valor, más exacto que el primero, puede sustituirse por u^2 en la ecuación (A), con lo que se obtendrá la tercera aproximación:

$$u''' = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} + \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^3} + \frac{(a-b)^6}{32(a+b)^5} + \frac{(a-b)^8}{256(a+b)^7}$$

Prosiguiendo así, puede llevarse la aproximación hasta donde se quiera; pero como es evidente que el calculador es dueño de elegir los factores muy poco diferentes, la serie anterior será muy convergente, y entonces bastarán uno ó dos términos para obtener la raíz exacta hasta la tercera ó la cuarta decimal. Por la sustitución se obtendrá:

$$\sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}(a+b) - \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} - \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^3} - \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

Propongámonos, por ejemplo, extraer la raíz del número 8200, descomponiéndolo en los factores: $a = 100$ y $b = 82$. Tendremos $a+b = 182$; $a-b = 18$.

$$x = 91 - \tfrac{324}{728} - \tfrac{104976}{964157088} = 90.5539$$

Este resultado es sensiblemente exacto no obstante la diferencia considerable de los factores, que hizo necesario el cálculo del tercer término de la fórmula (B) pasa llevar la aproximación hasta la cuarta decimal. Tomemos por nuevo factor $a = 91$, de donde resulta $b = 90.11$, y tendrémos::

$$\begin{aligned} a &= 91.00 \\ b &= 90.11 \\ \hline a+b &= 181.11 \\ a-b &= 0.89 \end{aligned}$$

$$x = 90.555 - \frac{0.7921}{724.44} - \frac{0\,6174}{95048939.23}$$

Estableciendo una relación entre los elementos de los triángulos y los errores que los afecten en los casos más desfavorables, y poniendo por condición que estos errores no sean apreciables en la escala que se adopte para construir el plano, nos será fácil determinar, con bastante aproximación, el mayor valor que puede darse á los la-

La elección de los factores ha sido tal, que el último término no llega á *un cienmillonésimo*, y los dos primeros darán: $x = 90.5539$ como antes.

En resumen, eligiendo convenientemente los factores, puede decirse que *la raíz cuadrada de un número compuesto de dos factores muy poco diferentes, es igual al término medio aritmético de los factores, menos el cuadrado de su diferencia dividido por el cuádruplo de su suma.*

La fórmula (B) indica que cuando a y b difieren muy poco, la raíz de la cantidad $a\,b$ es casi igual al promedio de aquellos factores; de suerte que este puede representar la primera aproximación, ó si se quiere, un factor más conveniente que el primitivo a para llegar á un segundo término medio, ó sea á una segunda aproximación, la cual á su vez se empleará como nuevo factor para proseguir de la misma manera hasta alcanzar el grado de exactitud que se desee. Así, en el ejemplo precedente supusimos $a = 100$ y $b = 82$, los que dan $\frac{1}{2}(a+b) = 91$. Tomando en seguida $a = 91$, se halla $b = 90.11$, y la segunda aproximación será: $\frac{1}{2}(a+b) = 90.555$. Si para proseguir adoptamos $a = 90.555$, resultará $b = 90.55273$, y por tanto: $\frac{1}{2}(a+b) = 90.5539$, número sensiblemente igual á la última hipótesis, y que por consiguiente representa con suficiente aproximación la raíz de la cantidad dada.

Puede abreviarse mucho este procedimiento como sigue. Si a es un número no muy diferente de la raíz de la cantidad n, se tendrá por primera aproximación:

$$p' = \frac{a + \frac{n}{a}}{2} = \frac{a^2 + n}{2\,a}$$

Adoptando por a el número p', la segunda aproximación será:

$$s = \frac{p' + \frac{n}{p'}}{2} = \frac{a^2 + n}{4\,a} + \frac{a\,n}{a^2 + n}$$

Si hacemos $p = \frac{a^2 + n}{4\,a}$ y $q = \frac{a\,n}{a^2 + n}$, se tiene $s = p + q$. Sea x la corrección que esta segunda aproximación necesita, esto es:

$$\sqrt{n} = p + q - x$$

Elevando al cuadrado y teniendo presente que por ser x pequeña, podremos prescindir de su segunda potencia, resulta:

$$n = (p+q)^2 - 2(p+q)\,x$$

dos para diversos errores angulares y empleando distintas escalas, sin temer diferencias notables en las circunstancias ordinarias.

La ecuación (4) del número 32 es muy propia para el problema que nos ocupa; pero tratándose de fijar un límite á la magnitud de las distancias entre los vértices, preferiré establecer esta relación analizando el caso más desventajoso, para lo cual es necesario entrar en algunas consideraciones.

Como en cada triángulo se conoce un lado por lo menos, ya sea

Como, además, se tiene $4\,p\,q = n$, se hallará:

$$x = \frac{(p+q)^2 - n}{2\,(p+q)} = \frac{p^2 + q^2 - 2\,p\,q}{2\,(p+q)} = \frac{(p-q)^2}{2(p+q)}$$

y por último:

$$\sqrt{n} = p + q - \frac{(p-q)^2}{2(p+q)} \quad \text{.............................} \quad \text{(C)}$$

siendo como hemos visto:

$$p = \tfrac{1}{4}a + \frac{\frac{1}{4}n}{a} \qquad q = \frac{\frac{1}{4}n}{p}$$

Extraigamos, por ejemplo, la raíz de 6,377397 aproximada hasta la cuarta decimal. A primera vista se nota que el factor conveniente debe ser poco mayor que 2500 puesto que $(2500)^2 = 6,250000$. Tomemos, pues, $a = 2500$, y hallaremos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\,a &= 625.0000 \\ \tfrac{1}{4}\,\tfrac{n}{a} &= 637.7397 \\ \hline p &= 1262.7397 \\ q &= 1262.6112 \\ \hline p + q &= 2525.3509 \end{aligned}$$

La pequeña diferencia que resulta entre p y q produce $x = \frac{0.0165}{5050.70} = 0.000003$, que influyendo sólo en la sexta decimal, nos indica que la raíz del número propuesto es 2525.3509, exacta hasta la cuarta decimal por lo menos, como se deseaba.

Estos ejemplos manifiestan la inmensa utilidad del método de aproximaciones, que muchas veces conduce á resoluciones más breves que los paocedimientos directos, y tan exactos como se quiera. La extracción de una raíz, reducida á una simple cuestión de división, ha dado en el último ejemplo, y con la mayor facilidad, un resultado acaso más exacto que el que se hubiera obtenido aun por medio de los logaritmos comunes de siete cifras decimales.

medido directamente, ó ya por el cálculo de los que preceden, no sería necesario, en rigor, más que medir dos de sus ángulos, con lo que se tiene lo bastante para determinar sus otros elementos. Sin embargo de esto se toman siempre los tres ángulos, tanto por comprobación, cuanto para distribuir el error final entre todos por partes iguales, fundados, según hemos dicho, en que los errores angulares, debidos siempre á las mismas causas, son independientes de la amplitud de los ángulos. Según esto, la diferencia que exista entre 180° y la suma de los ángulos medidos, se considera como la suma algebraica de los errores de observación, y su tercera parte se aplica á cada uno con el signo que corresponda, para reducirlos á valer exactamente 180°. Esta manera de corregir los ángulos es ciertamente la más razonable; pero no carece de arbitrariedad, pues es claro que no conociendo más que el error total, no se tiene dato alguno sobre el signo del que afecta á cada ángulo individualmente, quiere decir, si aumenta ó disminuye su verdadero valor, y muy bien puede suceder que después de hecha la corrección, queden los ángulos más erróneos de lo que estaban antes.

Admitiendo siempre la hipótesis de que los errores de observación sean numéricamente iguales, y designándolos por e siendo A, B y C los verdaderos valores de los ángulos, consideremos los casos que pueden presentarse.

I. Si todos los errores tienen el mismo signo; los ángulos observados serán respectivamente: $(A \pm e)$, $(B \pm e)$ y $(C \pm e)$; de modo que designando por s la diferencia final, se tiene:

$$s = 180° - (A + B + C \pm 3e) = \mp 3e.$$

La tercera parte de esta cantidad añadida á cada ángulo, reproduce los verdaderos valores: de consiguiente, este caso es el más favorable.

II. Pero puede suceder que e sea de un signo en uno de los ángulos; y de signo contrario en los otros dos, y entonces los observados serán: $(A \pm e)$, $(B \mp e)$ y $(C \mp e)$, de donde resulta:

$$s = 180° - (A + B + C \mp e) = \pm e.$$

Distribuyendo por tercios el error total, los valores adoptados vendrán á ser: $(A \pm \frac{4}{3}e)$, $(B \mp \frac{2}{3}e)$ y $(C \mp \frac{2}{3}e)$, lo que indica que en este caso, que es el más desventajoso, el error de uno de los ángulos definitivos es numéricamente doble del de los otros, y de signo contrario.

36. Es ciertamente posible, aunque muy poco probable, que todos los ángulos de una cadena resulten incorrectos del modo que hemos visto en este último caso; pero aun cuando así sea, como el ángulo que lleva el mayor error, puede ser unas veces el opuesto, y otras alguno de los adyacentes al lado que se vaya á calcular, habrá fundamento para esperar, si no la entera compensación, por lo menos una diminución notable en los errores de los lados, de tal suerte que no se altere sensiblemente su valor. Pero admitamos todavía, lo cual es ya extremadamente improbable, que el ángulo más incorrecto de cada triángulo sea el opuesto al lado que debe servir de base para calcular el que sigue, de manera que el efecto de los errores sea constantemente el de aumentar ó disminuir las distancias, y en esta hipótesis, busquemos la relación que existe, después de un número cualquiera de triángulos, entre sus elementos y sus errores.

Llamemos a la base medida, $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$, los lados que van sirviendo de bases para calcular los triángulos de una cadena (Fig. 9ª), $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ los ángulos opuestos, y $B_1, B_2 \ldots\ldots B_n$ los adyacentes á los lados ó bases en el 1°, 2°, ... n° triángulos respectivamente, suponiendo que todos estos ángulos son los adoptados definitivamente después de hecha la corrección, y propongámonos investigar cuál es el error x_n que resulta en el último lado cuando se ha cometido uno de $\pm \frac{2}{3}e$ segundos en A_1, A_2 etc., y de $\mp \frac{4}{3}e$ en B_1, B_2, etc.

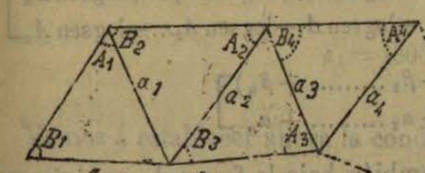

Fig. 9ª

La resolución de los triángulos da:

$$a_1 = a \frac{\text{sen. } B_1}{\text{sen. } A_1} \qquad a_2 = a_1 \frac{\text{sen. } B_2}{\text{sen. } A_2} \qquad a_3 = a_2 \frac{\text{sen. } B_3}{\text{sen. } A_3}$$