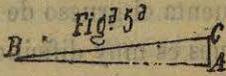


quedara recto sobre el suelo, se ve que los resultados difieren muy poco, y su promedio 2220^m.61 representa la base adoptada. Las fracciones del resorte se midieron con otro de los comunes de 10 metros.

23. No siempre se encuentra un terreno horizontal de suficiente extensión para medir una base, y en este caso se elige de un declive suave y uniforme. Entonces, ó se mantiene el decámetro horizontal colocando convenientemente las estacas, ó se determina, de la manera que diremos al tratar de la nivelación, el ángulo que la dirección elegida forma con su proyección, y después de medida la base, según el desarrollo del terreno, se reduce al horizonte. Sea $BC = B$ la línea medida según el declive (Fig. 5^a), $AB = b$ su proyección horizontal, y $ABC = a$ el ángulo de inclinación.

En el triángulo ABC , rectángulo en A , se  tiene:

$$b = B \cos. a \dots \dots \dots (1)$$

Mas si el ángulo a es muy pequeño, como sucede ordinariamente, el cálculo de esta fórmula no da b con toda la exactitud que se desea, por lo menos usando los logaritmos comunes de siete decimales, (*) y es mucho más conveniente calcular la diferencia x entre el desarrollo B y la proyección b , esto es:

$$x = B - b \dots \dots \dots (2)$$

Sustituyendo en esta última ecuación el valor de b , se obtendrá:

$$x = B - B \cos. a = B(1 - \cos. a)$$

Pero en virtud de la relación: $\cos. a = 1 - 2 \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a$, se cambiará esta ecuación en: $x = 2B \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a$, y sustituyendo en la (1) resultará finalmente:

$$b = B - 2B \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a \dots \dots \dots (3)$$

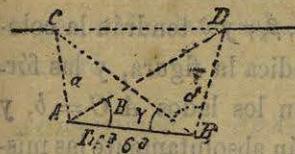
(*) Recordaremos que los *cosenos* de los ángulos muy pequeños varían con mucha lentitud, y es preferible entonces valerse de los *senos* ó *tangentes*.

Para el cálculo de esta fórmula bastan logaritmos de cinco cifras. Supongamos que la base del núm. 21° se hubiese medido en un terreno inclinado, formando con el horizonte un ángulo $a = 1^\circ 31' 40''$, y tendremos:

$B = 2993^m.094 \dots \dots \dots$	$\log. \dots \dots = 3.47612$	$B = 2993^m.094$
	$\log. 2 \dots \dots = 0.30103$	$x = \underline{1.064}$
$\frac{1}{2} a = 0^\circ 45' 50'' \dots \dots \dots$	$\log. \text{sen.} \dots \dots = 8.12489$	$b = 2992^m.030$
	" " " " " " " " " "	
	$\log. x \dots \dots = 0.02693$	

Al fin de este tomo hay una tabla que da los valores de x' para $B=100^m$ y para diversas inclinaciones desde 3° en adelante. Tratándose de cualquiera otra distancia B , su corrección será $x = \frac{B x'}{100}$.

24. Hay también casos en que se encuentra algún obstáculo en la dirección de la base que impide medir una parte de ella, tal como CD (Fig. 6^a), y entonces se mide otra pequeña línea auxiliar $AB = m$,



y los ángulos a, β, γ, δ , que forman con AB las visuales dirigidas á C y D . Hagamos para abreviar $AC = b$, $AD = c$, y $CD = x$. Los triángulos CAB y ADB dan respectivamente:

$$b = m \frac{\text{sen. } \gamma}{\text{sen. } (\alpha + \gamma)} \quad c = m \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } (\beta + \delta)}$$

y el triángulo CAD , en el que se conocen dos lados b y c y el ángulo comprendido $= \alpha - \beta$, dará aplicándole las fórmulas usuales de la trigonometría:

$$\tan. \phi = \frac{b + c}{b - c} \tan. \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \quad x = (b - c) \frac{\cos. \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos. \phi}$$

Se pueden determinar igualmente los lados BC y BD para aplicar las últimas fórmulas al triángulo CBD , lo que proporciona comprobación.

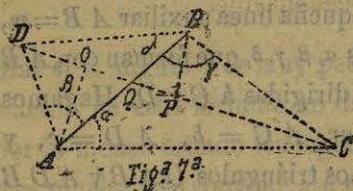
Esta resolución, como se ve, es la misma que se emplea cuando se quiere calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles.

25. Otras veces sucede que las localidades no permiten la medida directa de una base que tenga la longitud necesaria, bien por la naturaleza del terreno, ó bien porque se tenga interés en que sus extremos se encuentren en puntos determinados de antemano, ó en eminencias, con el objeto de descubrir desde ellas otros puntos importantes. Entonces puede resolverse el problema lo mismo que el anterior, suponiendo que AB es la base que se mide, y CD la que se desea conocer. Sin embargo, debo advertir que como en estos casos la línea medida es generalmente menor que la distancia incógnita, es difícil evitar que los ángulos observados sean muy agudos, circunstancia que, como veremos después, conduce á resultados poco exactos.

Este mismo problema puede también resolverse así. Sea CD (Fig. 7^a) la base que se quiere adoptar y AB la que se mide, y que designaremos igualmente por m . Conservando las anotaciones anteriores, los ángulos α, β, γ y δ tendrán la colocación que indica la figura, y las fórmulas que dan los lados $AC = b$, y $AD = c$, serán absolutamente las mismas que en el caso anterior; pero atendiendo á la situación relativa de los ángulos α y β , las dos últimas ecuaciones del núm. 24 se cambiarán en:

$$\tan. \psi = \frac{b+c}{b-c} \tan. \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \quad x = (b-c) \frac{\cos. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\cos. \psi}$$

Presentemos un ejemplo de la aplicación de estas fórmulas. En un terreno muy montañoso que tenía yo que triangular, no pudiendo hallar una extensión plana para medir directamente una base de la longitud que la necesitaba, medí la línea cuyos elementos constan en el párrafo 22, y determiné la distancia entre las señales colocadas en dos cerros C y D , con los datos:



- $AB = m = 2220^m 61$
- $AC = b = 4902.83$
- $AD = c = 6763.72$
- $BC = e = 4088.34$
- $BD = d = 7552.02$
- $\alpha = 35^\circ 45' 6''$
- $\beta = 102 12 42$
- $\gamma = 97 34 13$
- $\delta = 64 5 12$

Apliquemos las fórmulas al triángulo $DA C$.

$b+c = 11666.55$	4.0669426	$\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$	9.2813132
$b-c = 1860.89$	-2.2697208		3.2697208
$\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 78^\circ 53' 54.1/0$	0.7106064	$\cos. \psi$	8.4919631
$\psi = 91^\circ 46' 44.1/1$	1.5078282	x	4.0590709
$x = CD = x = 11457^m.0$			

La resolución del triángulo DBC , para el que se tienen los datos necesarios, da el mismo resultado.

Si se miden los ángulos que tienen su vértice en C y D , podrá aplicarse el método del núm. 23, proyectando los lados AD y AC , así como BC y BD , sobre la distancia incógnita CD , por medio de las perpendiculares bajadas de los puntos A y B . En nuestro caso se encontró:

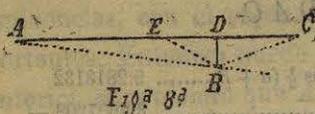
$ACD = 12^\circ 17' 22''$	$CDA = 9^\circ 14' 38''$	$BCD = 13^\circ 53' 40''$	$BDC = 7^\circ 27' 5''$
$b = 3.6904465$	$c = 3.8901853$	$e = 3.6115470$	$d = 3.8780634$
$\cos. ACD = 9.9890893$	$\cos. CDA = 9.9943231$	$\cos. BCD = 9.98710.8$	$\cos. BDC = 9.9993169$
$CO = 3.6795358$	$DO = 3.8245089$	$CP = 3.5986498$	$DP = 3.8743803$
$CO = 4781.m2$		$CP = 3968.m7$	
$DO = 6675.9$		$DP = 7488.2$	
$CD = 11457.m1$		$CD = 11456.m9$	

El término medio entre ambos resultados es precisamente $11457^m.0$ como antes. Sería también fácil calcular CQ y QD , ó bien tratar separadamente cada uno de los triángulos DBC y $DA C$ en los que se conocen dos lados y los tres ángulos. De todas estas resoluciones se elige la que sea más breve, ó más favorable al problema en cuestión.

26. Ciertas relaciones existentes entre las diversas partes de un triángulo, pueden también aplicarse á la determinación de una base

estensa, partiendo de la medida directa de otra más pequeña. Daremos á conocer algunas de las resoluciones á que nos han conducido las investigaciones de este género, comenzando por demostrar dos teoremas que creemos nuevos, y muy propios para este objeto.

Desde el vértice *B* de un triángulo *ABC* (Fig. 8ª), trácese la bisectriz *BD* del ángulo *B*, y la *BE* del lado opuesto, las cuales deter-



minarán en él un segmento *DE* que designaré por *v*, llamando *V* el ángulo *DBE*. Si representamos, además, por *m* y *n* respectivamente los segmentos

AD y *CD*, se tendrá:

$$m = \frac{1}{2}b + v \qquad n = \frac{1}{2}b - v$$

de donde: $b = m + n, \quad 2v = m - n;$

y como los triángulos *ABD* y *BCD* dan:

$$m = BD \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}B}{\text{sen. } A} \qquad n = BD \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}B}{\text{sen. } C}$$

resulta:

$$b = BD \text{sen. } \frac{1}{2}B \frac{\text{sen. } C + \text{sen. } A}{\text{sen. } C \text{sen. } A} \qquad 2v = BD \text{sen. } \frac{1}{2}B \frac{\text{sen. } C - \text{sen. } A}{\text{sen. } C \text{sen. } A}$$

y por consiguiente:

$$\frac{b}{2v} = \frac{\text{sen. } C + \text{sen. } A}{\text{sen. } C - \text{sen. } A} = \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(C + A)}{\text{tan. } \frac{1}{2}(C - A)} = \text{cot. } \frac{1}{2}B \text{cot. } \frac{1}{2}(C - A) \dots (4)$$

luego en todo triángulo la mitad de un lado cualquiera es con el segmento que en él determinan las bisectrices del mismo lado y del ángulo opuesto, como la tangente de la semisuma de los otros dos ángulos es con la tangente de su semidiferencia.

Si igualamos ahora los valores de $\frac{1}{2}b$ suministrados por los triángulos *ABE* y *BCE*, resultará:

$$\text{sen. } \frac{1}{2}(B + V) \text{sen. } A = \text{sen. } (\frac{1}{2}B - V) \text{sen. } C$$

Desarrollando esta ecuación y dividiéndola por $\cos. V$, se halla:

$$\text{tan. } V = \text{tan. } \frac{1}{2}B \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(C - A)}{\text{tan. } \frac{1}{2}(C + A)} = \text{tan. } \frac{1}{2}B \text{tan. } \frac{1}{2}(C - A) \dots (5)$$

y multiplicando esta ecuación por la (4) se obtiene por último:

$$\frac{b}{2v} = \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}B}{\text{tan. } V} \dots (6)$$

luego la mitad del lado es al segmento determinado por las bisectrices, como la tangente de la mitad del ángulo opuesto al primero es á la tangente del opuesto al segundo.

El producto de las ecuaciones (4) y (6) da también:

$$\frac{b}{2v} = \sqrt{\text{cot. } V \text{cot. } \frac{1}{2}(C - A)} \dots (7)$$

Una vez conocidas las relaciones que preceden, veremos que las fórmulas relativas se prestan fácilmente al cálculo de una base *b*, cuando se haya trazado y medido cuidadosamente su segmento *v*. La demarcación de éste sobre el terreno no ofrece dificultad, pues una vez medidos los tres ángulos del triángulo *ABC*, la ecuación (5) determina el ángulo *V*, y se procederá así: Después de trazada la parte necesaria de *AC*, se traza desde *B* la línea *BD* que forme con *BA* y *BC* el ángulo $\frac{1}{2}B$; así como la *BE* que forme respectivamente con las mismas los ángulos $\frac{1}{2}B - V$ y $\frac{1}{2}B + V$. Como los jalones que se sitúen en estas direcciones no encontrarán generalmente ninguno de los que señalan la línea *AC*, lo que debe hacerse es prolongarlas un poco y tender un cordel delgado y tirante entre los jalones que deban cortarla; y haciendo igual operación entre los que demarcan la línea *AC* en las inmediaciones de *D* y *E*, las intersecciones de ambos cordeles determinarán cada uno de estos puntos. Si se ha operado con esmero, los ángulos observados desde ellos deben concordar con sus valores teóricos; esto es, desde *D* deberá hallarse $BDC = 180^\circ - (\frac{1}{2}B + C)$ y $BDA = 180^\circ - (\frac{1}{2}B + A)$; y desde *E* se tendrá. $BEC = 180^\circ - (\frac{1}{2}B + C + V)$ y $BEA = 180^\circ - (\frac{1}{2}B + A - V)$: Por otra parte, en el Capítulo X se indicará el modo de comprobar

las posiciones de los puntos así establecidos por observaciones angulares, y de corregirlas si es preciso. Suponiendo pues, perfectamente demarcados ambos puntos, y medida su distancia v , nuestras ecuaciones darán b , á saber:

$$b = 2v \cot. \frac{1}{2} B \cot. \frac{1}{2} (C - A)$$

$$b = 2v \tan. \frac{1}{2} B \cot. V$$

$$o = 2v \sqrt{\cot. V \cot. \frac{1}{2} (C - A)}$$

Si se analiza en esta resolución el efecto que deben producir en b los pequeños errores que pudieran existir en los datos, se hallará que debe procurarse que v no sea muy pequeño respecto de b , pues por regla general, la influencia del error lineal cometido en v es siempre proporcional á $\frac{b}{v}$. El estudio del efecto de los errores angulares manifiesta la conveniencia de que B no sea mucho menor que 90° , de que C y A difieran bastante y de que V se acerque en lo posible á 45° .

En general, para que $\frac{b}{v}$ no exceda de una cantidad dada η , se debe tener: $\tan. \frac{1}{2} (C - A) = \frac{2}{\eta} \cot. \frac{1}{2} B$, lo cual expresa que $C - A$ será tanto mayor cuanto menor sea B , y que η no puede ser menor que 2 ni aun igual á 2. A fin de dar una idea de las variaciones relativas de estos ángulos, he calculado las tablas siguientes para diversos valores de B y suponiendo en la una $\eta = 3$, y en la otra $\eta = 4$:

B	$\eta = 3$				$\eta = 4$			
	C	A	C - A	V	C	A	C - A	V
60°	109° 6'	10° 54'	98° 12'	21° 3'	100° 54'	19° 6'	81° 48'	16° 6'
70	98 36	11 24	87 12	25 1	90 32	19 28	71 4	19 18
80	88 28	11 32	76 56	29 13	80 47	19 13	61 34	22 46
90	78 42	11 18	67 24	33 41	71 34	18 26	53 8	26 34
100	69 14	10 46	58 28	38 28	62 46	17 14	45 32	30 47
110	60 2	9 58	50 4	43 36	54 18	15 42	38 36	35 32
120	51 3	8 57	42 6	49 6	46 6	13 54	32 12	40 54

Estas tablas pueden ser útiles para escoger convenientemente la posición del vértice B , que es el auxiliar principal de esta operación, siempre que se tenga la posibilidad de elegirla. Ellas manifiestan que á medida que crece B , disminuye C , así como $C - A$, puesto que A varía apenas para cada valor determinado de η . En cuanto á V , crece casi proporcionalmente con B ; pero para valores iguales de este último ángulo, las magnitudes de V son inversas de las η . En consecuencia, debe procurarse que A no sea demasiado grande, ni V demasiado pequeño, á fin de que η no exceda de 4 ó cuando más de 5; pues debe tenerse presente que un pequeño error lineal e que pudiera cometerse en la medida de v , produciría el error ηe en la base calculada b .

La resolución que hemos expuesto es, entre otras, aplicable al caso en que teniendo interés en que A y C formen los extremos de una gran base, existan obstáculos en las inmediaciones de esos puntos que los hagan de difícil acceso; mientras que hacia la parte media de la línea sea más practicable una buena medida. Si, por el contrario, el terreno ofrece mejores condiciones cerca de los extremos que en su medio, puede partirse de la medida de uno de los segmentos m ó n , puesto que las primeras relaciones de que nos hemos servido dan:

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A};$$

de donde se deduce, según que se haya medido m ó n :

$$b = m + m \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } C}$$

$$b = n + n \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A}$$

El examen de esta nueva resolución indica la conveniencia de que el segmento medido no sea muy pequeño respecto de b , y de que A y C sean considerables y tan poco diferentes como sea posible.

Podría también partirse de la medida de la bisectriz $BD = d$, y entonces nuestras relaciones producen:

$$b = d \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} B}{\text{sen. } A} + d \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} B}{\text{sen. } C}$$

recurra á esta clase de procedimientos con la mayor moderación, ó cuando sea absolutamente indispensable, procurando siempre servirse de ángulos que no sean muy agudos. En general debe tenerse presente que las condiciones que se han establecido en el número 12, son las que proporcionan los mejores resultados, especialmente si el terreno que se elige presenta un horizonte despejado que permita configurar á satisfacción los primeros triángulos.

29. Aunque en teoría basta el conocimiento de un solo lado para calcular todos los de la cadena, como en la práctica es indudable que siempre se cometen pequeños errores, por más exactos que sean los instrumentos y los métodos empleados, es preciso medir, al fin de las operaciones, otra base, distante de la primera lo más que sea posible, lo cual no sólo sirve de comprobación, sino que proporciona los medios de dividir los errores de la manera más ventajosa, según veremos en la parte relativa al cálculo de los triángulos.

30. Para concluir lo tocante á las bases, advertiremos que todo lo que se diga en la Geodesia con respecto á ésta, como á las demás partes de la triangulación, es también aplicable á la Topografía; pues aunque lo que se ha explicado, es suficiente para los casos comunes, hay muchas veces necesidad de recurrir á métodos geodésicos en los vastos terrenos de la República cuando se desea proceder con toda exactitud.

CAPITULO III.

DE LA ELECCIÓN DE LOS VÉRTICES.

31. Un reconocimiento previo del terreno, y el estudio detenido de las localidades dan mucha luz sobre la elección de los puntos que bien por su situación en alturas, ó por su importancia como monumentos, edificios públicos, límites, etc., merezcan la atención del ingeniero. No puedo menos de recomendar estos reconocimientos, ejecutados, si es posible, con algún instrumento de fácil transporte, y teniendo presentes todas las consideraciones de que trataré en este capítulo, persuadido de que el tiempo que se emplea en ellos queda ampliamente recompensado con la seguridad de poderse trazar un plan fijo de operaciones, evitándose con él las vacilaciones consiguientes de trabajar al acaso, y por tanto con mucha menos rapidez. Pero no basta estar convencido de la importancia de ciertos puntos bajo el aspecto que hemos considerado, sino que además es preciso ver si los triángulos establecidos en ellos satisfacen á las mejores condiciones para que los errores de observación tengan la menor influencia posible en los resultados. Investiguemos, pues, cuáles son estas condiciones.

32. Para conseguirlo, supongamos que siendo A , B y C los ángulos de un triángulo, y a , b , c los lados opuestos, sean α y β los pequeños errores cometidos al medir los ángulos A y B , y x el que resulta en el lado a en virtud de ellos. Supongamos también que b es la