

V. La construcción sobre el papel de la cadena trigonométrica, con arreglo á la escala que se adopte.

Vamos á ocuparnos en particular de cada una de estas operaciones.

8. No basta por lo común el establecimiento de una sola cadena trigonométrica, puesto que sus vértices distan demasiado unos de otros para servir inmediatamente de base á las operaciones de los detalles, y que repetidos en los puntos de la triangulación, para ser en estacion otra de segunda orden, otros lados sean menores, y aun muchas veces otros de tercer y cuarto orden, hasta que los lados no excedan de 1000 á 2000 metros. El fin es comprender que no puede darse una única pautaria, pues la magnitud que deben tener los lados de una cadena pautaria, pues to que en general depende de las localidades, de la mayor ó menor perfección de los instrumentos que se usan, del estado de los cielos, etc., y así, distase por ahora de lo que debe procurarse que los triángulos sean en el mayor número posible. Por otra parte, las determinaciones de vértices, secundarios, etc., son evidentemente necesarias, tanto entre sí como á la extensión del terreno que debe ser triangulado.

9. Las operaciones que componen la triangulación pueden referirse á las siguientes, de las que las dos últimas deben considerarse como tácticas de ejecución.

1. La medida de uno ó varios lados que se toman por bases de las operaciones.

2. La elección de los vértices trigonométricos, para que los triángulos que resulten satisfagan á las mejores condiciones posibles.

3. La operación de los ángulos y la construcción de la cadena trigonométrica.

4. El cálculo de los triángulos y de las coordenadas de sus vértices.

nes por ahora decir que opuesta esencialmente de un círculo cualquiera y de un anteojo cuyo eje óptico tiene movimiento en un plano perpendicular al del círculo. Establecido este instrumento de manera que el plano de su eje óptico sea horizontal y su centro correspondiente al punto al extremo de la base, si se dirige el anteojo á la señal situada en el otro extremo hasta lograr la coincidencia perfecta entre su eje óptico representado por la intersección de dos hilos muy delgados que se encuentran en el interior del tubo y el asta de la base, entonces el anteojo representa el plano vertical que pasa por la base y por el punto de la línea de la intersección de los hilos, con la intersección de los hilos de la línea que no faltará otra vez en los puntos de trazo en los que para poder ejecutar la medida.

CAPITULO II.

DE LAS BASES.

11. Para llegar al conocimiento de los lados de una triangulación, es necesario que la medida de uno de ellos, por lo menos, se reúna á la de los ángulos, sin lo cual el problema sería indeterminado. La medida de este lado ó de la base, es una de las operaciones trigonométricas que demandan más exactitud, porque sirviendo de fundamento á todas las demás, un error, aunque sea pequeño, que se cometa en ella, puede tener mucha influencia en los resultados, como veremos después.

12. Las llanuras extensas que no presenten desigualdades ni interrupciones bruscas y que sean sensiblemente horizontales, son los terrenos más á propósito para medir una base, la que debe proporcionarse á la magnitud de los lados de la triangulación, á fin de evitar el incremento demasiado rápido de los primeros triángulos que se apoyan en ella.

Hecha la elección de los puntos que la terminan, véamos cómo se traza la base en el terreno para proceder á medirla.

13. En uno de sus extremos se pone una señal que consiste generalmente en una bandera, cuya asta, que se sitúa verticalmente, tiene dos ó tres metros de largo y un grueso proporcionado á la distancia desde la cual se debe observar, siendo por lo común suficiente de ocho á diez centímetros. En el otro extremo de la base se coloca un

instrumento llamado *teodolito*, que describiremos después, bastándonos por ahora decir que consta esencialmente de un círculo graduado y de un anteojo cuyo eje óptico tiene movimiento en un plano perpendicular al del círculo. Establecido este instrumento de manera que el plano de su círculo sea horizontal y su centro corresponda verticalmente al extremo de la base, si se dirige el anteojo á la señal situada en el otro extremo hasta lograr la coincidencia perfecta entre su eje óptico, representado por la intersección de dos hilos muy delgados que se encuentran en el interior del tubo y el asta de la bandera, entonces el anteojo describe en su movimiento el plano vertical que pasa por la base, y pertenecerán á ella todos los puntos del terreno que vayan coincidiendo con la intersección de los hilos, de tal manera, que no faltará otra cosa más que demarcarlos de trecho en trecho para poder ejecutar la medida.



Así, mientras un observador en *B* (Fig. 2ª), después de establecida la coincidencia entre el asta de la señal *A* y el eje del anteojo, fija el instrumento de modo que no pueda desviarse lateralmente, otro se coloca en *c* á 50^m poco más ó menos de *B*, y fija en tierra verticalmente una estaca de madera, llamada *jalón*, de un metro de largo y tres ó cuatro centímetros de grueso próximamente, guiado siempre por las señales que le haga el observador en *B*, hasta conseguir que la estaca quede cortada, al menos en su pie, por la intersección de los hilos. Después pasa á *c'*, *c''*, etc., donde practica lo mismo, y si se ha procedido con cuidado, todas las estacas, vistas desde el anteojo, no parecerán formar más que una sola con la señal *A*.

La extensión de la base no siempre permite trazarla, como hemos dicho, desde una sola estación, pues los jalones situados á mayor distancia de *B* se ven con poca claridad, y entonces es mejor proceder por

partes de este modo: después de determinar los puntos *c*, *c'*, *c''*, etc., se transporta el teodolito al último punto *c''*, de manera que su centro coincida con este punto, y después de establecida la horizontalidad de su círculo y la coincidencia de su anteojo con *B*, se moverá éste 180° contados en el círculo, ó mejor sólo se dirigirá el anteojo á la señal *A* en virtud de su movimiento vertical, debiendo encontrar el asta de la bandera en la intersección de los hilos, y se procede á situar los demás jalones de 50^m en 50^m próximamente hasta el término de la base. Debe procurarse que las estacas queden verticales y que penetren en la tierra lo suficiente para ofrecer estabilidad y resistir la tensión que se ejerce en su parte inferior con el cordel que se fija entre cada dos de ellas sucesivamente al practicar la medida para no desviarse de su dirección.

14. La medida se ejecuta con una cadena de metal, generalmente dividida según el sistema decimal, y de un *decámetro* ó diez metros de longitud. Las cadenas comunes de hierro ó de latón constan de 50 eslabones de 0^m2 cada uno, unidos por pequeñas argollas del mismo metal, y al fin de cada cinco eslabones, de otro metal diferente para indicar los metros enteros. Los extremos del decámetro están formados por dos asas para facilitar su manejo. Este instrumento se usa en unión de unos alambres de hierro de dos ó tres milímetros de grueso y de 0^m2 de largo, llamados *fichas*, que sirven para señalar los puntos en donde comienza ó termina la longitud del decámetro al practicar la medida.

En estos últimos años se ha introducido el uso de otros decámetros formados de un resorte de acero análogo al que sirve de motor en los relojes, y la exactitud de los resultados que suministra, unida á su poco peso, han hecho que se adopte generalmente para medidas que exigen alguna precisión. La anchura del resorte es de 0^m01 próximamente, y está terminado también por dos asas de latón con una ranura en su espesor, de un diámetro igual al grueso de las fichas, para no tener que llevarlo en cuenta en la medida. En este instrumento, los metros están señalados por pequeñas láminas circulares de latón, y los decímetros por agujeros también muy pequeños practicados en el resorte.

15. Dos personas, por lo menos, deben ejecutar la medida, de la manera siguiente: mientras una de ellas mantiene una de las asas del decámetro en el punto que representa el término de la base, la otra siguiendo la dirección del cordel asegurado entre este extremo y la primera estaca, clava una de las fichas de que está provista, en contacto con la otra asa del decámetro. En seguida, continuando en la misma línea señalada por el cordel, la primera pasa á colocar su asa en contacto con la ficha, y la segunda clava otra en el extremo del decámetro que tiene, visto lo cual por la primera, recoge la ficha que estaba clavada y se trasporta al punto donde acaba de colocarse la nueva ficha, desde el cual prosigue de la misma manera, teniendo cuidado de tomar siempre la ficha luego que la persona que va adelante ha clavado otra, pues es evidente que, en cualquiera punto de la medida, el número de fichas que haya recogido la persona que va atrás, más la que esté clavada, representan el número de decámetros medidos. Como las fichas que tiene la persona que va adelante son generalmente 10 al comenzar la medida, luego que la que va atrás las ha recogido todas, se han medido 100^m; pero debe tenerse cuidado de no tomar la última hasta no haber devuelto las nueve que se han recogido á la persona que va adelante, á fin de que pueda señalar el primer decámetro de la segunda centena de metros. Además de la frecuente rectificación que proporciona el número de fichas, debe irse formando un apunte del número de decámetros, al paso que se van midiendo, para evitar equivocaciones.

Llegados al término de la medida, para apreciar la fracción de decámetro que ordinariamente resulta, se tiende la cadena entre la última ficha y la señal que fija el extremo de la base, y se cuentan los metros y decímetros; en cuanto á los centímetros y milímetros, se aprecian con un doble-decámetro común de madera ó de marfil dividido.

16. En toda esta operación, debe tenerse el mayor cuidado de no dar demasiada tensión á la cadena, por temor de que abriéndose los eslabones aumente notablemente su longitud; ni tampoco debe llevarse demasiado floja, porque la curvatura que resulta de su peso la disminuye, y cuando el terreno no presenta tropiezos, es mejor de-

jarla arrastrar libremente. En todos casos es indispensable comparar la cadena antes y después de usarla, con un metro-modelo, y si los dos resultados no son iguales, el término medio representará su verdadera longitud, al menos si al hacer las comparaciones se le ha dado la misma tensión que durante la medida. Sea l la longitud de la cadena, n el número de veces que cupo en la medida, b el número de metros de la base, y g el grueso de las fichas. Se tendrá: $b = nl + ng$. Mas si, por la comparación, se ha encontrado que $l = 10^m \pm \epsilon$, resultará sustituyendo:

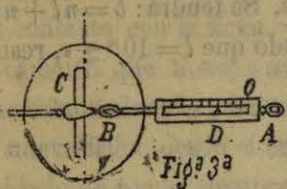
$$b = 10n \pm n\epsilon + ng$$

siendo ϵ el error de la cadena, esto es, su diferencia á 10^m. Si el decámetro tiene asas con ranuras para alojar la ficha, el último término es nulo.

17. Por lo general las bases no se miden una sola vez, sino que se repite la medida en sentido inverso, y si los dos resultados difieren poco, como por ejemplo, una cantidad que no exceda de cosa de $\frac{1}{5000}$ á $\frac{1}{10000}$ de su longitud, según la importancia de los trabajos, se toma el término medio de ambos por su valor definitivo. En el caso contrario, habrá necesidad de repetir las operaciones hasta conseguir mayor concordancia.

18. El modo de medir que he explicado es defectuoso, especialmente si se opera con decámetros de eslabones, pues es claro que variando á cada paso la tensión que se les da, se altera también su tamaño, y los eslabones y argollas están muy expuestos á abrirse y enredarse. Por otra parte, cuando no se tiene el mayor cuidado al ir situando verticalmente las fichas, hay que temer el error que resulta de su inclinación, y como presentan muy poca resistencia por su poco espesor, es sumamente fácil inclinarlas al ponerlas en contacto con el extremo de la cadena. Todos estos inconvenientes y otros que sería inútil enumerar, hacen que este método sólo se emplee cuando no se desea obtener la posible exactitud. Voy á indicar el que se ha seguido al medir las bases en que se apoya la triangulación topográfica del Distrito, practicada por los ingenieros de la Comisión del Valle de México.

19. En esta medida se han usado decámetros de resorte, mantenidos siempre á la tensión de 12 libras, y cuya longitud se ha determinado cuidadosamente, antes y después de la medida, comparándolos con un metro-modelo de latón. Para dar á los resortes la misma tensión durante toda la medida, se han empleado para cada uno dos dinamómetros *AB* (Fig. 3ª),



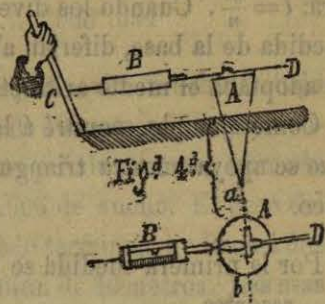
compuestos de un tubo metálico en cuyo interior hay un fuerte resorte formado de una espiral de acero y provistos de un índice *D*, que recorre una escala grabada en el mismo tubo, á la orilla de una ranura en donde se mueve el índice. Mientras en la argolla *B* no se ejerce ninguna fuerza, el índice *D* señala la primera división *O* que es el *cero* de la escala; mas luego que se suspende en ella un cuerpo pesado, ó que se ejerce alguna tracción, la espiral interior del tubo se desarrolla, hasta que la resistencia que opone, equilibre el peso suspendido en *B*, y entonces el índice *D* señala el guarismo de la escala que marca el peso.

Para aplicar este instrumento al objeto que nos ocupa, se han unido las asas *C* del decámetro á la argolla *B*, y en la otra *A* se ha ejercido la tracción hasta que el índice de cada uno de los dinamómetros señale la cifra que se desea, siendo evidente que la tensión que sufre el decámetro es la misma que demarcan los índices.

20. Las fichas se han sustituido por estacas cónicas de encino de 0^m35 de altura y 0^m08 de diámetro en su base. En ellas se señalaban tanto los extremos de la línea por medir, como los de los decámetros, por medio de rectas finas, trazadas en la cara superior después de fijadas fuertemente en tierra con ayuda de un mazo. El modo de proceder en la medida es el que voy á explicar.

Dos criados cadeneros llevaban el decámetro *D* (Fig. 4ª) unido por sus extremos á los dinamómetros *B*, los cuales estaban á su vez ligados á otra estaca *C*, que apoyada en el suelo, permitía dar la tensión. Para comenzar, se ponía una de las asas del resorte en coincidencia con la línea *ab* marcada en la cabeza de la estaca *A*, y que designaba el limite de la base. Entretanto, otro criado fijaba otra de las estacas próximamente á 10^m de la primera, dejándola fuera de tierra

una parte tal, que su cara superior se encontrara á la misma altura que *A*, á fin de que el decámetro permaneciera horizontal; y en seguida, bajo la vigilancia inmediata de los ingenieros, luego que por ambas partes se daba la tensión convenida y el criado de atrás mantenía su asa en coincidencia con *ab*, se señalaba en la cabeza de la otra estaca una línea delgada para indicar el término de la segunda asa del resorte. Esta última línea servía á su vez para continuar la medida hacia adelante, sin desviarse



del cordel, que fuertemente tendido señalaba la dirección de la base, y llevando cada ingeniero separadamente un apunte del número de resortes al paso que se iba practicando la operación. Por lo común bastan diez ó doce estacas de encino, debiendo, sin embargo, borrar con frecuencia las líneas trazadas en su cara superior para evitar equivocaciones. Este método, ejecutado con esmero, proporciona resultados muy exactos y permite trabajar con bastante rapidez, pues en nuestras bases, se medían generalmente cosa de 400^m por hora.

21. Hasta ahora he supuesto que el resorte tiene exactamente 10 metros, y no queda otra cosa más que explicar el método que he seguido para determinar su verdadero tamaño. Para esto se medía con el resorte una longitud cualquiera *L*, con la misma tensión que se había usado en la base y con todas las precauciones que hemos indicado, trazando con rectas finas los extremos en las cabezas de las estacas. En seguida, en la misma dirección de *L*, marcada por un cordel, se situaban de metro en metro próximamente, otras estacas á la misma altura que las dos últimas, y se repetía la medida de *L* con un metro-modelo de latón, señalando sus extremos en cada estaca con el mayor cuidado, y apreciando las pequeñas fracciones con una regla de marfil finamente dividida en 0^m0005. Esta operación se repetía varias veces antes y después de la medida de la base, procurando practicarla á la misma temperatura, para disminuir el error producido por la diferencia de dilataciones del metal. Sea ahora *l* la

verdadera longitud del resorte á la tensión á que se ha sujetado, m el número de metros y fracciones que dió el metro-modelo en la longitud L y n el número de veces que cupo el resorte. Entonces se tendrá: $l = \frac{m}{n}$. Cuando los diversos valores obtenidos para l antes de la medida de la base, diferían algo de los que se encontraban después, se adoptaba el medio aritmético entre todos los resultados.

Como ejemplo, pondré á la vista los datos de una de las bases en que se apoya nuestra triangulación topográfica del Distrito de México.

Por la primera medida se encontró el número de resortes..... $n = 299.560$
 Por la segunda..... $n = 299.568$

 Término medio..... $n = 299.564$

Luego tomando por unidad la longitud l del resorte, la de la base será:

$$b = 299.564 \times l$$

Para determinar l se hicieron, antes y después de la medida de la base, varias comparaciones, de las que resultó:

Antes de la medida..... $l = 9^m 9910$
 Después „ „ $l = 9.9920$

 Término medio..... $l = 9^m 9915$

Substituyendo este valor de l en el de b se obtiene:

$$b = 299.564 \times 9^m 9915 = 2993^m 094$$

que es la magnitud adoptada. Si con el valor medio de l se avalúa separadamente el resultado de cada medida, se tendrán los números $2993^m 054$ y $2993^m 133$ cuya diferencia $0^m 08$ no es más que cosa de $\frac{1}{37400}$ de la longitud de la base.

Haciendo uso de la fórmula del núm. 16, se tomará $\epsilon = -0^m 0085$ y entonces.

10 n	2995 ^m .640
ϵn	— 2.546
	2993 ^m .094

22. Se obtienen muy buenos resultados y se evita mucho trabajo operando con medidas de longitud de más de 10 metros. Ultimamente hice construir una medida de 25 metros próximamente, formada de resorte de acero muy delgado y de $0^m.006$ de ancho. El peso del instrumento, incluyendo el de las asas que lo terminan, no llega á dos libras, y es muy inferior al del resorte común de 10 metros. Las asas están terminadas por caras planas, de modo que es preciso llevar en cuenta el grueso de las fichas, lo que siempre me parece preferible, pues es muy difícil que el diámetro de las ranuras sea exactamente igual al de las fichas.

Por varias comparaciones con un metro-modelo, hallé que la longitud del resorte, ó la distancia entre las caras extremas de sus asas, es $l = 24^m.9825$. Para medir el grueso de las fichas, encontré que puestas todas ellas en contacto, abrazaban una extensión de $0^m.032$, por lo cual se tiene para cada una $g = 0^m.0032$, ó bien..... $l + g = 24^m.9857$. Pondré á la vista los datos y resultados relativos á la última base que medí con esta cinta de acero, advirtiéndole que establecidas en sus extremos dos banderas, cuyas astas tenían $0^m 102$ de diámetro, debe añadirse esta cantidad al resultado de la medida para obtener la distancia exacta entre los centros de las señales.

	1ª medida.	2ª medida.
$l + g$	24 ^m .9857.....	24 ^m .9857
Número de resortes enteros.....	88.....	88
Producto.....	2198.742.....	2198.742
Fracciones del resorte.....	+21.826.....	+21.712
Radios de las señales.....	+ 0.102.....	+ 0.102
Base.....	2220 ^m .67.....	2220 ^m .56

Aunque en estas medidas no usé dinamómetros, sino que se llevaba el resorte con la ligera tensión puramente necesaria para que