1º Haciendo uso de las distancias zenitales recíprocas, aunque no sean simultáneas.

La última fórmula desarrollada, nos da:

$$h' - h = s\,tg.\,\tfrac{1}{2}\,(Z' - Z)\left[1 + \frac{h' + h}{2R_0} + \frac{s^2}{12R_0^2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

aceptando el radio de curvatura medio (R_0) entre los dos vértices considerados.

Si llamamos K y K' los coeficientes de refacción en cada una de las estaciones, tendremos:

$$Z' = \zeta' + K'v\,;\quad Z = \zeta + K\,v\,;\ \text{luego}$$

$$\tfrac{1}{2}\,(Z' - Z) = \tfrac{1}{2}\,(\zeta' - \zeta) + \tfrac{1}{2}\,v\,(K' - K);\ \text{ó}$$

$$tg.\,\tfrac{1}{2}\,(Z' - Z) = tg.\left[\tfrac{1}{2}\,(\zeta' - \zeta) + \tfrac{1}{2}\,v\,(K' - K)\right] =$$

$$tg.\left[\tfrac{1}{2}\,(\zeta' - \zeta) + \frac{s}{2R_0}\,(K' - K)\right] =$$

$$tg.\,\tfrac{1}{2}\,(\zeta' - \zeta) + \frac{s}{2R_0}\,(K' - K),\ \text{puesto que}$$

$\frac{s}{2R_0}\,(K' - K)$ es un arco muy pequeño. Substituyendo, tendremos:

$$h' - h = \left[s\,tg.\,\tfrac{1}{2}\,(\zeta' - \zeta) + \frac{s^2}{2R_0}\,(K' - K)\right]$$

$$\left[1 + \frac{h' + h}{2R_0} + \frac{s^2}{12R_0^2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

2º Si las observaciones son simultáneas $(K' = K)$, y esta hipótesis se hace también en el caso de distancias zenitales recíprocas aun cuando no sean simultáneas, quedando entonces:

$$h' - h = s\,tg.\tfrac{1}{2}\,(\zeta' - \zeta)\left[1 + \frac{h' + h}{2R_0} + \frac{s^2}{12R_0^2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

3º Cuando solo se observan distancias zenitales en una estación la figura nos da:

$$A = 180 - Z = 180 - \zeta - K\,v$$

$$B = 180 - A - v = \zeta + K\,v - v$$

$$\tfrac{1}{2}\,(A - B) = 90^\circ - \left[\zeta + v\,(K - \tfrac{1}{2})\right]$$

Sustituyendo en la (5), tendremos:

$$h' - h = s\,cot.\left[\zeta + (K - \tfrac{1}{2})\,v\right]\left[1 + \frac{h' + h}{2R_0} + \frac{s^2}{12R_0^2}\right]$$

El factor $\left[1 + \frac{h' + h}{2R_0} + \frac{s^2}{12R_0^2}\right]$ es sensiblemente igual á la unidad; y como

$$cot.\left[\zeta + (K - \tfrac{1}{2})\,v\right] = \frac{1}{tg.\left[\zeta + (K - \tfrac{1}{2})\,v\right]} =$$

$$= \frac{1 - (K - \tfrac{1}{2})\,v\,tg.\,\zeta}{tg.\,\zeta + (K - \tfrac{1}{2})\,v} = \left[1 - (K - \tfrac{1}{2})\,v\,tg.\,\zeta\right]$$

$$\left[tg.\,\zeta + (K - \tfrac{1}{2})\,v\right]^{-1} = \left[1 - (K - \tfrac{1}{2})\,v\,tg.\,\zeta\right]$$

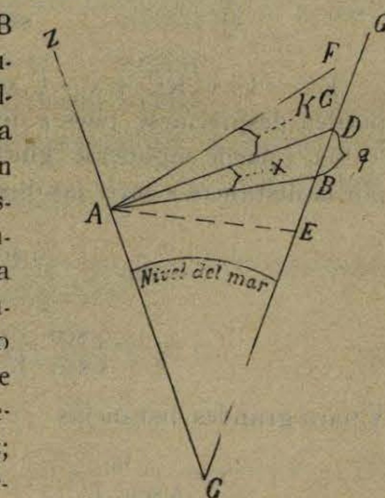
$$\left[(tg.\,\zeta)^{-1} - (K - \tfrac{1}{2})\,v\,(tg.\,\zeta)^{-2} + \right] =$$

$= cot.\,\zeta + (\tfrac{1}{2} - K)\,v + (\tfrac{1}{2} - K)\,v\,cot.^2\,\zeta$; sustituyendo, tendremos:

$$h' - h = s\,cot.\,\zeta + (\tfrac{1}{2} - K)\,\frac{s^2}{R_0} +$$

$$(\tfrac{1}{2} - K)\,\frac{s^2}{R_0}\,cot.^2\,\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Antes de aplicar estas fórmulas, debe hacerse a las distancias zenitales observadas, la corrección que vamos a explicar.



Supongamos que en A y B están instalados dos instrumentos, estando su eje de alturas a la misma distancia vertical del centro de estación y que de A debe medirse la distancia zenital de B, observando la señal D que está a una altura q metros de B. A causa de la refracción, el punto D se verá según la tangente A F, y la distancia zenital medida será el ángulo ZAF = z; FAD = KC es el ángulo de refracción, proporcional al ángulo C, y DAB = x es la corrección que debe buscarse.

El triángulo A B D nos da:

$$\text{sen. x} = \frac{\text{q. sen. ABD}}{\text{AD}}$$

Tomemos el punto E distando del nivel del mar lo mismo que A; el triángulo ADE nos da:

$$\text{AD} = \frac{\text{AE sen. AED.}}{\text{sen. ADE}}\text{; y sustituyendo}$$

$$\text{sen. x} = \frac{\text{q sen. ADE sen. ABD.}}{\text{AE sen. AED}}$$

Pero,

$$\text{sen. ADE} = \text{sen. (DAC.} + \text{C)} = \text{sen. (}180^\circ - z - \text{KC} + \text{C)} = \text{sen. (z} + \text{KC} - \text{C)}$$

$$\text{sen. ABD} = \text{sen. ABE} = \text{sen. (BAC} + \text{C)} = \text{sen. (}180^\circ - z - \text{KC} - x + \text{C)} = \text{sen. (z} + \text{KC} + x - \text{C)}$$

$$\text{sen. AED} = \text{sen. (}90^\circ + \tfrac{1}{2}\text{C)};$$

luego

$$\text{sen. x} = \frac{\text{q}}{\text{AE}}\,\frac{\text{sen. (z} + \text{KC} - \text{C) sen. (z} + \text{KC} + x - \text{C)}}{\text{sen. (}90^\circ + \tfrac{1}{2}\text{C)}}$$

KC − C y KC + x − C son ángulos muy pequeños que pueden despreciarse, pues z difiere poco de 90°; sen. (90° + ½ C) puede suponerse igual a uno, y AE puede tomarse por la distancia s entre las dos estaciones, teniéndose así:

$$\text{sen. x} = \frac{\text{q sen.}^2\ \text{z}}{\text{s}}\ \text{ó bien}$$

$$x = \frac{\text{q sen.}^2\ \text{z}}{\text{s sen. 1}''}; \dots\dots\dots\ (9)$$

y para grandes distancias:

$$x = \frac{\text{q}}{\text{s sen. 1}''} \dots\dots\dots\dots\ (10)$$

Ejemplo:

Distancia zenital medida en A visando D = z = 88° 54′ 16″ 7. Altura del eje de alturas en A = 1^m495; altura de la señal visada D = 7^m534. Latitud de A 42° 41′ 10″0; distancia entre las dos estaciones, 6845^m22; azimut de la línea, 222° 15′

lg. R_o	= 6.80450		
q	= 7.533 − 1.495 = + 6^m038		
lg. q	= 0.78089	z	= 88° 54′16″7
lg. sen.^{2}z	= 9.99984	Corrección	+ 3 01. 8
comp. lg. s	= 6.16461	z (corregida)	= 88 57 18. 5
comp. lg. sen. 1″	= 5.31442		
lg. x	= 2.25976		
x	= 181″8		

Si aceptamos para K = 0.07,

la fórmula (8) nos da

$$\frac{1}{2} - K = 0.43$$

lg. s	=3.83539	lg. s²	=7.67078	lg. cot.² z	=6.5219
lg. cot. z	=8.26098	comp. lg. R_o	=3.19550		
lg. 1° término	2.09637	lg. 0.43	=9.63340		
		lg. 2° término	0.49968		0.4997
1° término	=124.840	2° término	=3.160	lg. 3° térm°	=7.0216
				3° térm°	0.001

h’ − h = 124.840 + 3.160 + 0.001 = 128.001

Con el objeto de calcular los errores medios, escribamos las fórmulas (6), (7) y (8) como sigue:

$$\triangle h = s\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (\zeta' - \zeta) + \tfrac{K' - K}{2\,R_o}\ s^2 \dots\dots\dots\ (6')$$

$$\triangle h = s\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (\zeta' - \zeta) \dots\dots\dots\ (7')$$

$$\triangle h = s\ \text{cot.}\ \zeta + \tfrac{1 - 2K}{2\,R_o}\ s^2 \dots\dots\dots\ (8')$$

Diferenciando, tendremos:

$$d(\triangle h) = \frac{\frac{1}{2} s\, d(\zeta' - \zeta)}{\cos.^2 \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta)} + \frac{S^2}{2 R_o} d(K' - K) \text{ para la (6')}$$

$$d(\triangle h) = \frac{\frac{1}{2} s\, d(\zeta' - \zeta)}{\cos.^2 \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ para la (7')}$$

$$d(\triangle h) = -\frac{s\, d\zeta}{\text{sen.}^2 \zeta} - \frac{d K}{R_o} . s^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ para la (8')}$$

o bien, expresando el arco en segundos y atendiendo á que $z' - z$ es un ángulo pequeño y z poco diferente de 90°

$$d(\triangle h) = \frac{s\sqrt{2}}{2} d\zeta \,\text{sen. } 1'' + \frac{s^2\sqrt{2}}{2 R_o} d K$$

$$d(\triangle h) = \frac{s\sqrt{2}}{2} d\zeta \,\text{sen. } 1''$$

$$d(\triangle h) = -s \,\text{sen. } 1''\, d\zeta - \frac{d K}{R_o} s^2;$$

y los errores medios cuadráticos serán:

$$\varepsilon_1{}^2 = \frac{1}{2} (\text{sen. } 1'' . s\, d\zeta)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{S^2}{R_o} d K\right)^2;$$

$$\varepsilon_2{}^2 = \frac{1}{2} (\text{sen. } 1'' . s\, d\zeta)^2,$$

$$\varepsilon_3{}^2 = (\text{sen. } 1'' . s\, d\zeta)^2 + \left(\frac{S^2}{R_o} d K\right)^2$$

Como se ve, la ventaja es indiscutible para el 2º método, siendo preferible el 1º al 3º, notándose la gran influencia que tiene el error del coeficiente de refracción (d K), por tener un factor numérico muy grande, dado que, por término medio, pueden aceptarse 40 o 60 kilómetros para la longitud media de los lados de los triángulos.

Supongrmos, para tener un caso concreto:

$$s = 40000, \quad d K = 0.02; \quad d\zeta = 1'', \quad R = 6400000,$$

resultará

$$\varepsilon^1 = \pm 1^m 15; \quad \varepsilon^2 = \pm 0^m 22; \quad \varepsilon^3 = \pm 2^m 28$$

Distancia zenital del horizonte del mar. Si desde el punto A, (Fig. X), se ve el horizonte del mar, la visual A b será tangente, y el ángulo A b C recto, teniéndose

$$R_o + h = \frac{R_o}{\cos. v}$$

ó

$$h = R_o \frac{1 - \cos. v}{\cos. v} = \frac{2 R_o \,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} v}{\cos. v} = \frac{2 R_o \,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} v}{\text{sen. } v}$$

$$\frac{\text{sen. } v}{\cos. v} = R_o \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} v}{\cos. \frac{1}{2} v} . \frac{\text{sen. } v}{\cos. v};$$

ó

$$h = R_o \,\text{tg. } \tfrac{1}{2} v \,\text{tg. } v = \tfrac{1}{2} R_o \,\text{tg.}^2 v,$$

próximamente, poniendo

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} \text{tg. } v$$

por ser v muy pequeño.

El triángulo A b C nos da

$$z + K v = 90° + v;$$

de donde

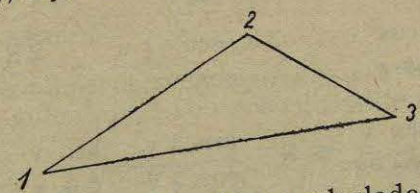
$$v = \frac{z - 90}{1 - K};$$

y sustituyendo

$$h = \frac{R}{2(1 - K)^2} \text{tg. } (z - 90), \text{ sensiblemente} \ldots \text{ (11)}$$

Compensación de las alturas de los vértices por el método de mínimos cuadrados.

Para ver cómo deben formarse las ecuaciones de condición y su número, supongamos primeramente sólo tres puntos, (1, 2 y 3), cuyas alturas sean:



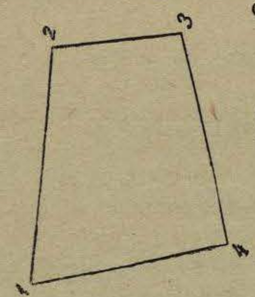
h 1 h2 h3, y su diferencia de alturas calculada por la fórmula (8) más comunmente empleada.

$\triangle h_2^1,\ \triangle h_3^2,\ \triangle h_1^3$, cuya suma debe ser cero:

$$0 = \triangle h_2^1 + \triangle h_3^2 + \triangle h_1^3$$

El contorno triangular anterior tiene tres diferencias de nivel y tres puntos unidos, no dando sino una sola ecuación.

Supongamos el polígono siguiente:



con las diferencias de nivel

$$\triangle h_2^1,\ \triangle h_3^2,\ \triangle h_4^3,\ \triangle h_1^4;$$

es decir, 4 diferencias de nivel y 4 puntos unidos, es claro que debe ponerse

$$0 = \triangle h_2^1, + \triangle h_3^2\ \triangle h_4^3 + \triangle h_1^4.$$

Si en la figura anterior hubiera además la diferencia

$$\triangle h_3^1$$

correspondiendo a la diagonal 1.3, debería satisfacerse no solo la ecuación anterior, sino también la siguiente:

$$0 = \triangle h_2^1 + \triangle h_3^2 + \triangle h_1^3.$$

Si restamos estas dos ecuaciones, tendremos:

$$0 = \triangle h_4^3 + \triangle h_1^4 - \triangle h_1^3 \ \text{ó}$$

$$0 = \triangle h_4^3 + \triangle h_1^4 + \triangle h_3^1,$$

teniendo cuidado de cambiar los signos al invertir el sentido de la diferencia.

La última ecuación corresponde al contorno 3, 4, 1, que no da ninguna condición nueva, sino que es superabundante, puesto que se deduce de las dos primeras. La figura tiene 5 diferencias y cuatro puntos.

Si tuviéramos la diagonal 2 4 y por lo mismo la diferencia

$$\triangle h_2^4,$$

tendríamos la ecuación del contorno 2 4 3, o sea

$$0 = \triangle h_3^2 + \triangle h_4^3 + \triangle h_2^4;$$

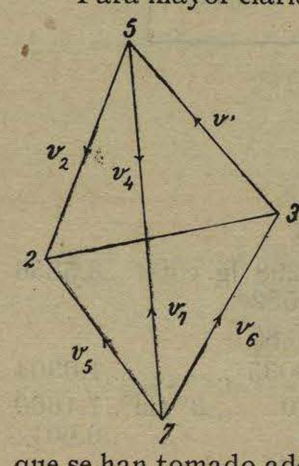
en total tres ecuaciones de condición, la figura teniendo 6 diferencias y 4 puntos.

En resumen, si el número de diferencias lo representamos por D y p el número de puntos unidos, el número de ecuaciones de condición será:

$$D - p + 1;$$

ecuación igual a la que da el número de ecuaciones de ángulo, habiendo gran semejanza en la manera de formar unas y otras, como se ha visto, debiendo tener, al formar dichas ecuaciones, la misma precaución que al formar la de ángulos para evitar las superabundantes, pudiendo seguirse la misma secuela, descomponiendo la figura en triángulos.

Para mayor claridad, resolvamos el siguiente caso:



Llamemos a las alturas absolutas de los vértices en la figura adjunta,

$$h_2,\ h_5,\ h_3 \text{ y } h_7;$$

supongamos que la diferencia

$$h_3 - h_2 = 7^{m}\!\cdot 684$$

es dada por una nivelación topográfica, que

$$h_7 = 513^{m}\!\cdot 948$$

es la altura absoluta de ese vértice referida al nivel medio del mar, y que se han tomado además los datos siguientes:

Estación	Punto visado	DISTANCIAS ZENITALES (ζ)			Nº de los días observados (n)	Corrección que corresponde a ζ designada por V
3	5	89°	39′	51″.7	1	V_1
5	2	90	33	37 . 2	1	V_2
	7	90	09	37 . 0	1	V_4
7	2	90	41	56 . 8	2	V_5
	3	90	43	20 . 8	2	V_6
	5	90	08	58 . 9	2	V_7

Hay siete diferencias de nivel y cuatro puntos, luego el número de ecuaciones será

$$D - p + 1 = 7 - 4 + 1 = 4$$

Coeficiente de refracción K = 0.0716.

LADOS.	LOG. s	LOG. R_o
2.........5	4.38683	6.80370
3.........5	4.40149	6.80448
2.........7	4.24947	6.80473
3.........7	4.21274	6.80364
5.........7	4.60988	6.80414

Apliquemos la fórmula (8).

Estación en 3.

$\frac{1}{2} - K = 0.4284$

lg. s...... 4.40149 lg. s^2.........8.80298 lg. $\cot^2\zeta$ ...3.5356
,, cotζ.. 7.76776 comp,, R_o.........3.19552
1er térm 2.16925 ,, 0.4284...9.63185
,, ,, 147.^{m}70 ,, 2º tmº ...1.63035 ....1.6304
,, ...42.70 ,, 3º tm°..7.1660
,, ..0.001

$$h_5 - h_3 = +190.40$$

La diferenciación de la (8) da

$$d(\triangle h) = -s \text{ sen } 1'' d\zeta - \frac{s^2}{R_o} d K$$

lg. s... ....4.40149 lg. s^2..............8.80298
,, sen. 1″... 4.68557 comp. ,, R_o............3.19552
,, s sen. 1″...9.08706 ,, $\frac{s}{R_o}$............1.99850
,, ,, ,, =0.1222 ,, ...= 99.65

que numéricamente será

$$d(\triangle h) = -0.1222\, v_1 - 99.65\, dK \text{; luego}$$

$$h_5 - h_3 = +190.40 - 0.1222\, v_1 - 99.65\, dK$$

Estación 5.

lg. s...... 4.38683 lg. s^2 ....8.77366 lg. $\cot^2\zeta$...5.9806
,, cot. ζ 7.99032 n comp ,, R_o. 3.19630
2.37715 n 9.63185
1ºtm°= −238^{m}30 1.60181 1.6018
2° térm° = +40.00 7.5824
3º término= + 0.01

$$h - h = -198.29$$

lg. s..............4.38683 lg. s^2..............8.77366
4.68557 3.19630
9.07240 1.96996
s sen.1″=0.1181 $\frac{s^2}{R_o} = 93.32$

$$h_5 - h_3 = +198.29 - 0.1181\, v_2 - 93.32\, dK.$$

De igual manera se calculan los demás.

Reuniéndolas, tendremos:

$$
\begin{aligned}
h_5 - h_3 &= +\overset{m}{190.40} - 0.1222\ v_1 - \ \ 99.65\ dk \\
h_5 - h_2 &= +198.29 - 0.1181\ v_2 - \ \ 93.32\ dk \\
h_5 - h_7 &= +\ \ \ 5.29 - 0.1975\ v_3 - 260.38\ dk \\
h_7 - h_5 &= -\ \ \ 2.23 + 0.1975\ v_4 + 260.38\ dk \\
h_7 - h_2 &= +195.50 - 0.0861\ v_5 - \ \ 49.45\ dk \\
h_7 - h_3 &= +187.83 - 0.0791\ v_6 - \ \ 41.86\ dk
\end{aligned}
$$

ECUACIONES CONDICIONALES

Circuito 2, 3, 7.

$$
\begin{aligned}
h_2 - h_3 &= - \ \ \ \overset{m}{7.684} \\
h_3 - h_7 &= -187.830 + 0.0791\ v_6 + 41.86\ dk \\
h_7 - h_2 &= +195.500 - 0.0861\ v_5 - 49.45\ dk \\
0 &= -0.014 - 7.59\ dk \qquad - 0.0861\ v_5 + 0.0791\ v_6
\end{aligned}
$$

Haciendo para facilitar el cálculo V=100 dk, y cambiando los signos

$$0. = +0.014 + 0.0759\ V \qquad + 0.0861\ v_5 - 0.0791\ v_6$$

Circuito 2, 5, 3.

$$
\begin{aligned}
h_2 - h_5 &= -198.29 + 0.1181\ v_2 + 93.32\ dk \\
h_5 - h_3 &= +190.40 - 0.1222\ v_1 - 99.65\ dk \\
h_3 - h_2 &= +\ \ 7.684 \\
0 &= +0.206 + 0.0633\ V + 0.1222\ v_1 - 0.1181\ v_2
\end{aligned}
$$

Circuito 2, 5, 7.

$$
\begin{aligned}
h_2 - h_5 &= -198.29 + 0.1181\ v_2 + \ \ 93.32\ dk \\
h_5 - h_7 &= + \ \ \ 5.25 - 0.1975\ v_3 - 260.38\ dk \\
h_7 - h_2 &= +195.50 - 0.0861\ v_5 - \ \ 49.45\ dk \\
0 &= -2.500 + 2.1651\ V - 0.1181\ v_2 + 0.1975\ v_3 + 0.0861\ v_5
\end{aligned}
$$

Como, además de 5 se visó 7 y de la estación 7 se visó la 5, debe tenerse

$$(h_5 - h_7) + (h_7 - h_5) = 0$$

$$0 = 3.060 - 0.1975\ v_3 + 0.1975\ v_4$$

Resultando las ecuaciones condicionales conforme con la fórmula

$$D - p + 1$$

Indudablemente las ecuaciones anteriores no tieuen igual peso, no siendo muy fácil la determinación del peso que realmente tienen; y para ver su influencia vamos á hacer varios hipótesis.

Supongamos primero que son de igual peso.

ECUACIONES CORRELATIVAS.

	V	V1	V2	V3	V4	V5	V6	N
C1	+0.0759					+0.0861	−0.0791	−0.014
C2	+0.0633	+0.1222	−0.1181					−0.206
C3	+2.1651		−0.1181	+0.1975		+0.0861		+2.500
C4				−0.1975	+0.1975			−3.060
	+0.505	−1.04	+0.93	+7.81	−7.68	−0.31	+0.33	Valor de correcciones.

ECUACIONES NORMALES.

	a	b	c	d	
a	0.019431	+0.004804	+0.171744	0.000000	−0.014
b	+0.004804	+0.032888	+0.150999	0.000000	−0.206
c	+0.171744	+0.150999	+4.748025	−0.039006	+2.500
d	0.000000	0.000000	−0.039006	+0.078012	−3.060

Resolviendo las las ecuaciones normales como se vé en el esqueleto, resulta:

$$C_4 = - \quad 38.91$$
$$C_3 = + \ 0.6295$$
$$C_2 = - \quad 8.540$$
$$C_1 = - \quad 4.173$$

Substituyendo estos valores en las ecuaciones correlativas, se obtienen los de las incógnitas V, v_1, v_2..... colocados al fin del cuadro de las correlativas.

Como hemos hecho V = 100 dK, resulta dK = 0.005

$$y\ K = 0.0716 + 0.005 = 0.0766$$

$(an)=-0.0140$	$(aa)=0.01943$	$(ab)=+0.00480$	$[ac]=+0.17174$	$[ad]=0.00000$	$[as]=$
$\frac{(an)}{(aa)}=-0.7205$ $-\beta\frac{(ab)}{(aa)}=+2.1107$ $-\gamma\frac{(ac)}{(aa)}=-5.5641$ $-\delta\frac{(ad)}{(aa)}=\ 0.0000$		$\frac{(ab)}{(aa)}=+0.24704$	$\frac{[ac]}{[aa]}=+8.83891$	$\frac{[ad]}{[aa]}=0.00000$	
	$(bn)=-0.2060$	$(bb)=+0.03289$	$[bc]=+0.15100$	$bd=0.00000$	$[bs]=$
$C_1\alpha=-4.1739$	$-\frac{(ab)}{(aa)}(an)=+0.0035$ $(bn1)=-0.2025$ $\frac{(bn1)}{(bb1)}=-6.3880$ $-\gamma\frac{(bc1)}{(bb1)}=-2.1560$ $-\delta\frac{(bd1)}{(bb1)}=\ 0.0000$	$-\frac{(ab)}{(aa)}(ab)=-0.00119$ $(bb)1=+0.03170$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=-0.04243$ $[bc1]=+0.10857.$ $\frac{[bc1]}{[bb1]}=+3.42492$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]=0.00000$ $[bd1]=0.00000$ $\frac{[bd1]}{[bb1]}=0.00000$	
		$(cn)=+2.50000$	$[cc]=+4.74803$	$[cd]=-0.03901$	$[cs]=$
	$C_2=\beta=-8.5440$	$-\frac{(ac)}{(aa)}(an)=+0.1237$ $(cn1)=+2.6237$ $-\frac{(bc1)}{(bb1)}(bn1)=+0.6935$ $(cn2)=+3.3172$ $\frac{(cn2)}{(cc2)}=+1.1606$ $-\delta\frac{(cd2)}{(cc2)}=-0.5311$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=-1.51799$ $[cc1]=+3.23004$ $-\frac{[bc1]}{[bb1]}[bc1]=-0.37184$ $[cc2]=+2.85820$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]=0.00000$ $[cd1]=-0.03901$ $-\frac{[bc1]}{[bb1]}[bd1]=-0.00000$ $[cd2]=-0.03901$ $\frac{[cd2]}{[cc2]}=-0.01365$	
			$[dn]=-3.0600$	$[dd]=+0.07801$	$[ds]=$
		$C_3=\gamma=+0.6295$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[an]=-0.0000$ $[dn1]=-3.0600$ $-\frac{[bd1]}{[bb1]}[bn1]=\ 0.0000$ $[dn2]=-3.0600$ $-\frac{[cd2]}{[cc2]}[cn2]=+0.0453$ $[dn3]=-3.0147$ $\frac{[dn3]}{[dd3]}=-38.91$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]=0.00000$ $[dd1]=+0.07801$ $-\frac{[bd1]}{[bb1]}[bd1]=0.00000$ $[dd2]=+0.07801$ $-\frac{[cd2]}{[cc2]}[cd2]=-0.00053$ $[dd3]=+0.07748$	
			$\frac{[dn3]}{[dd3]}=\delta=C_4=-38.91$		

$$\frac{1}{(aa)}=+51.4668$$

$$\frac{1}{bb.1}=+31.5457$$

$$\frac{1}{cc.2}=+0.34987$$

Comprobación

$-0.0810-\ 0.0410.+0.1081.+0.0000.=-0.0139.$
$-0.0200-\ 0.2811.+0.0951.+0.0000.=-0.2060.$
$-0.7167-\ 1.2901.+2.9889.+1.5175.=+2.4996.$
$0.0000+0,0.0000.-0.0246.-3.0350.=-3.0596.$

Sustituyendo los valores de las correcciones, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} h_5 - h_3 &= +190^{m}031 \\ h_5 - h_2 &= +197.715 \\ h_5 - h_7 &= +\quad 2.438 \\ h_7 - h_5 &= -\quad 2.437 \\ h_7 - h_2 &= +195.279 \\ h_7 - h_3 &= +187.595 \end{aligned}\right\} \text{ de donde}$$

$$h_7 = 513.948$$

$$h_5 = 516.385$$

$$h_3 = 326.353$$

$$h_2 = 318.669$$

La determinación del error probable por el método exigido por los mínimos cuadrados, es muy laborioso e inútil para el objeto, siendo bastante con proceder de la manera siguiente:

Se elevará al cuadrado cada una de las v y se hará su suma, calculando el error medio cuadrático por la fórmula

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{(v\,v)}{n_c}}$$

n_c siendo el número de condiciones que han sido satisfechas.

En nuestro caso $(v\,v) = 122.1300$ y $n_c = 4$, luego

$$\varepsilon \pm 5''53$$

por consiguiente, el error probable de una distancia zenital medida será:

$$\eta = \pm 3.4$$