

ción (7) esto quiere decir que los errores de observación y los de propagación son despreciables; mas como la ecuación (7) no ha de verificarse, se deduce que las discrepancias no sólo son debidas al hecho físico de las desviaciones, sino que también á los errores de observación y propagación, sirviendo por lo mismo la ecuación (7) para apreciar el grado de precisión de la operación geodésica-astronómica.

Las desviaciones locales de la vertical son debidas á la atracción de las montañas y elevadas mesetas, así como á la variación de la densidad de la corteza terrestre. La atracción de dos pequeñas masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas la distancia  $d$  es proporcional á

$$\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Para un punto de la superficie terrestre, considerada como una esfera, la atracción es la misma que si toda la masa estuviera reunida en el centro. Si una pequeña masa dista horizontalmente de este punto ( $d$ ), las atracciones relativas de la tierra y de la pequeña masa sobre el punto, serán:

$$\frac{M}{R^2} \text{ y } \frac{m}{d^2}$$

Llamando  $\theta$  el ángulo de desviación de la plomada se tendrá:

$$\text{tg. } \theta = \frac{\frac{m}{d^2}}{\frac{M}{R^2}} = \frac{m R^2}{M d^2}$$

El volumen de la tierra es  $\frac{4}{3} \pi R^3$ , y si llamamos  $\Delta$  su densidad  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta$ . Representando por  $v$  el volumen de la pequeña masa y  $\delta$  su densidad, tendremos:  $m = v \delta$ ; luego substituyendo

$$\text{tg. } \theta = \frac{v \delta R^2}{\frac{4}{3} \pi R^3 \Delta d^2} = \frac{3}{4} \frac{v \delta}{\pi R \Delta d^2}$$

Podemos aceptar en números redondos  $R = 6370000$  y  $\Delta = 5.63$ , con lo que, substituyendo y expresando á  $\theta$  en segundos

$$\theta'' = 0.001373 \frac{v \delta}{d^2}$$

Una buena topografía del terreno permitirá conocer  $\frac{v \delta}{d^2}$ , y si á pesar de esta corrección quedan desviaciones, éstas serán debidas á los cambios de densidad de la corteza terrestre. Las investigaciones á este respecto del "Coast & Geodetic Survey" han llevado á la conclusión de que los macizos elevados están en su mayor parte soportados por material de menor densidad, habiendo una compensación, por esta causa, como á 70 millas de profundidad.

Así, "Los Estados Unidos" no están sostenidos en su posición sobre el nivel del mar á causa de la rigidez de la corteza terrestre, sino, principalmente, porque flotan como inmensa boya sobre material de menor densidad. (J. F. Hayford. Proc. Wash.—Acad. Sciences. Vol. VIII).

### Figura de la tierra.

#### LA TIERRA CONSIDERADA COMO UN ESFEROIDE.

Hemos visto ya de qué manera pueden determinarse los elementos del esferoide ó elipsoide de revolución, que mejor representa la Tierra, así como la manera de valerse de sus elementos para cálculos geodésicos.

La elipticidad del esferoide puede investigarse de otras maneras que vamos á indicar brevemente.

Las observaciones del péndulo nos permiten hacer tal investigación, puesto que la longitud del péndulo que bate un segundo es proporcional á la fuerza de la gravedad, fuerza mayor en las regiones polares que en las ecuatoriales. Clairaut en 1743 encontró la siguiente relación muy notable:

$$s = S + (\frac{5}{2}k - f) S \text{ sen. } 2L.$$

en la que  $s$  es la longitud á la latitud  $L$ ,  $S$  la correspondiente en el ecuador,  $k$  la relación de la fuerza centrífuga en el ecuador á la gravedad, y  $f$  la elipticidad de la tierra.

La relación anterior supone solamente que la tierra es un esferoide girando al derredor de un eje, y que puede dividirse en capas concéntricas homogéneas. Si pues, por la ob

servación podemos conocer  $S$  y  $(\frac{5}{2}k - f) S$ , puesto que por los principios de la mecánica  $k$  puede conocerse con bastante aproximación, la elipticidad  $f$  puede ser calculada.

En efecto, tomemos algunas de las muchas observaciones del péndulo hechas en distintos lugares:

LUGAR	LATITUD	Longitud del péndulo en pulgadas inglesas.
Spitzbergen	79° 49' 58"	39,2147
Hammerfest	70 40 05	39,1952
London	51 31 08	39,1393
New York	40 42 43	39,1017
Jamaica	17 56 07	39,0351
Sierra Leon	8 29 28	39,0200
St. Thomas	0 24 41	39,0207

Si hacemos:

$$T = (\frac{5}{2} k - f) S,$$

la ecuación de Clairant puede escribirse:

$$s = S + T \text{ sen.}^2 L :$$

y como

$$\text{sen.}^2 (79^\circ 49' 58'') = 0.96884,$$

la ecuación condicional para el Spitzberger será

$$39.2147 = S + 0.96884 T$$

De la misma manera se encuentran todas las demás, que combinadas por el método de los mínimos cuadrados dan:

$$S = 39.0155 \text{ y } T = 0.2021;$$

y por consiguiente

$$\frac{T}{S} = 0,005181 = \frac{5}{2} k - f; \text{ y como } k = \frac{1}{2889}, \text{ resulta } f = \frac{1}{288}.$$

Numerosas discusiones del péndulo han llevado a la conclusión de que la elipticidad de la tierra, considerada como esferoide, está comprendida entre  $\frac{1}{288.5}$  y  $\frac{1}{289}$ . Este valor es ligeramente mayor que el encontrado por la discusión de los arcos de meridiano, y la causa es, sin duda, debida a que las capas concéntricas que Clairant consideró como homogéneas, no lo son en realidad, a lo menos estrictamente.

Newton, considerando teóricamente la forma de equilibrio de una masa homogénea, fluida, girando alrededor de un eje y sujeta a la acción de la gravedad y de la fuerza centrífuga, encuentra para la elipticidad el valor de  $\frac{1}{280}$ . Una discusión semejante hecha por Laplace lo lleva a aceptar para la elipticidad el valor de  $\frac{1}{281}$ . Estos valores teóricos, son bastante grandes, y la causa estriba en la aceptación de la homogeneidad de la masa fluida, hipótesis que no es exacta.

La figura de la Tierra puede ser deducida de observaciones y cálculos astronómicos. Las irregularidades del movimiento de la Luna son debidas a la forma especial de la Tierra, y como estas irregularidades fueron medidas con precisión, Mr. Airy pudo calcular la elipticidad, encontrando  $\frac{1}{287}$ , valor algo más pequeño que el deducido de las medidas de arcos de meridiano.

#### LA TIERRA CONSIDERADA COMO UN ELIPSOIDE.

Así como la esfera es un caso particular del esferoide, éste, a su vez, es un caso particular del elipsoide de tres ejes. Llamemos  $b$  el semidiámetro polar de un elipsoide y  $a_1$  y  $a_2$  los semidiámetros del ecuador,  $a_1$  siendo el mayor y  $a_2$  el menor.

Todas las elipses meridianas tendrán elipticidades distintas, siendo la mayor:

$$f_1 = \frac{a_1 - b}{a}$$

y la menor

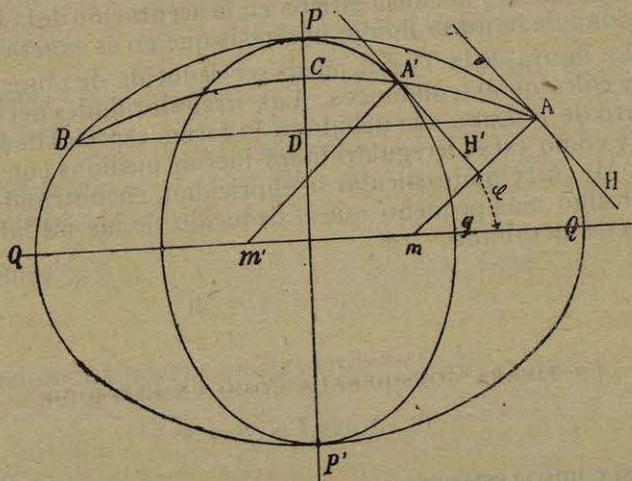
$$f_2 = \frac{a_2 - b}{a_2};$$

en las demás la elepticidad será intermediaria. En el ecuador la elepticidad será

$$F = \frac{a_1 - a_2}{a_1}$$

El elipsoide quedará perfectamente determinado por el conocimiento de sus tres ejes,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $b$ .

En una tierra elipsoidal, las curvas de latitud, con excepción del ecuador, no son curvas planas y, por consiguiente, no pueden ser llamadas, propiamente, paralelos. Esto resulta de la definición misma de latitud; en efecto, sea en la figura



adjunta  $PQ'P'Q'$  la sección meridiana más grande y  $A$  un punto de ella cuya latitud será el ángulo que hace la normal  $A_m$  con el ecuador  $Q'Q'$ ; si consideramos ahora la elipse proyectada según el diámetro  $P'P'$ , y la hacemos girar hasta abatirla en el plano de la sección meridiana  $PQ'P'Q'$ , tendremos la elipse  $PGP'F$ ; y para encontrar en ésta un punto que tenga la misma latitud que  $A$ , bastará trazar la tangente  $A'H'$  paralela a  $AH$ ; mas al volver esta elipse a su posición primitiva, el punto  $A'$  se proyectará en  $C$  fuera del plano  $BA$  paralelo al ecuador: la curva de latitud es, pues, una curva alaveada.

Los elementos del elipsoide se determinan por la medida de arcos, sin variar en nada las ideas fundamentales antes desarrolladas, resultando los cálculos bastante más laboriosos.

Las primeras investigaciones sobre el elipsoide fueron hechas en Rusia, en 1859, por Schubert, y en 1866 y 1878 por el Sr. Clarke.

Los resultados son los siguientes:

	1866.	1878.
Semidiámetro ecuatorial máximo..... $a_1$	6.378294	6.378380
„ „ más pequeño..... $a_2$	6.376350	6.377916
Semieje polar..... $b$	6.356068	6.356397
Cuadrante meridiano máximo..... $q_1$	10,001553	10.0001867
„ „ mínimo..... $q_2$	10.000024	10.001507
„ del ecuador..... $Q$	10.017477	10.118770
Elipticidad meridiana máxima..... $f_1$	$\frac{1}{287.0}$	$\frac{1}{289.5}$
„ „ mínima..... $f_2$	$\frac{1}{314.4}$	$\frac{1}{295.8}$
„ ecuatorial..... $F$	$\frac{1}{3281}$	$\frac{1}{13706}$
Longitud de $q_1$ .....	15° 34' E.	8° 56' W.

La opinión que predomina actualmente es que no podrán encontrarse satisfactoriamente los elementos del elipsoide que mejor represente la Tierra, hasta que los trabajos geodésicos hayan proporcionado mayor número de arcos y de más precisión que los actuales, debiendo aumentarse sobre todo los arcos de paralelo. Al presente, el elipsoide se adapta, un poco mejor que el esferoide, a la figura de la Tierra; pero es tan poco, que si se tiene en cuenta la complicación de los cálculos geodésicos, se verá la razón de por qué en cálculos geodésicos se acepta el elipsoide de revolución para figura de la Tierra.

LA TIERRA CONSIDERADA COMO UN OVALOIDE.

En los supuestos que hemos hecho anteriormente, de una Tierra esférica, esferoidal o elipsoidal hemos admitido que los hemisferios norte y sur son simétricos é iguales; de tal manera que una sección hecha en el sur por un plano paralelo al ecuador, dará una figura exactamente igual y simétrica á la que resultaría de hacer una sección en el norte por un plano paralelo al ecuador a la misma latitud. Lo anterior se apoya en las siguientes razones: 1ª la convicción de que la masa fluida y homogénea del globo, lo mismo que la superficie libre de las aguas asumirá una forma simétrica e igual bajo la acción de las fuerzas centrífuga y contrípeta; 2ª la ignorancia y duda de las causas que tendieran á hacer desiguales los hemisferios; 3ª la inclinación natural para aceptar la figura más sencilla que simplique las investigaciones y cálculos. Todas las anteriores razones son muy buenas; mas existen, sin embargo, varias causas, que enumeraremos brevemente, y que hacen suponer que el hemisferio sur es más grande que el hemisferio norte.

Por muchos siglos la órbita de la Tierra ha estado situada en el plano de la eclíptica, de tal manera, que el perihelio o punto más cercano al sol, ha coincidido aproximadamente con el solsticio de invierno en el hemisferio norte y con el solsticio de estío en el hemisferio sur; y como consecuencia de esto el invierno es cerca de siete días más grande en el sur que en el norte; además, en el sur, y por la misma causa, durante un año hay 170 horas más de noche que de día, y en el hemisferio norte, por el contrario, el día se prolonga 170 horas más; y, por último, el invierno tiene lugar en el hemisferio norte cuando el sol está más cercano á la Tierra y en el sur cuando está más lejos. Todo lo anterior demuestra que del calor total recibido por la Tierra durante un año, la mayor parte corresponde al hemisferio norte. La geografía física nos demuestra que las tierras dominan en el hemisferio norte y los hielos en el sur; con toda probabilidad, pues, la causa de esto está en el fenómeno astronómico antes explicado. La temperatura media anual del hemisferio sur ha sido durante muchos siglos bastante más baja que la del norte, produciendo en el sur una acumulación de hielo y nieve cuya atracción ha impelido las aguas hacia el sur, dejando descubiertas tierras en el norte. Por todo lo anterior aparece la Tierra como un ovaloide,

algo semejante a un huevo; correspondiendo la parte más grande al hemisferio sur.

No se han hecho investigaciones en este sentido, por la carencia de datos del hemisferio sur, pudiendo servir de mucho, para aclarar lo concerniente á las elipticidades de los dos hemisferios, las observaciones del péndulo, pues, sin ser, ni con mucho, tan costosas y dilatadas como las operaciones geodésicas, pueden hacerse aún en las pequeñas islas.

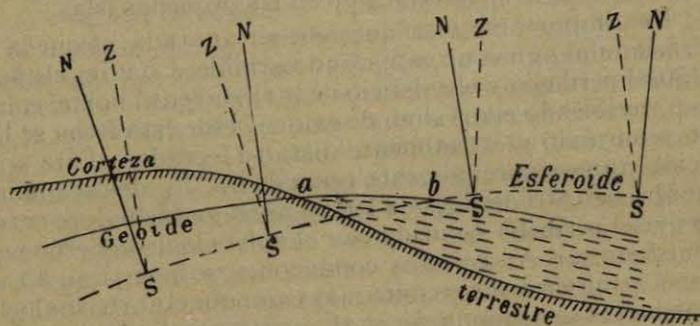
Una importante idea que debe ser anotada, es que la superficie de las aguas no es fija sino variable. Como en el año de 1250, el perihelio y el solsticio de invierno en el norte, coincidían, recibiendo el máximo de calor. Desde esta fecha se han ido separando y actualmente distan 11 grados. Esta separación aumenta anualmente cerca de  $61''75$ , de tal manera que será de  $180^\circ$  después de 10450 años, verificándose entonces que el perihelio coincida con el solsticio de invierno en el hemisferio sur. Ya en estas condiciones, se invertirán las cosas: el hemisferio sur recibirá más calor que el norte, los hielos y las nieves se acumularán en el norte y por consiguiente las aguas; disminuyendo, por lo mismo, las tierras en el norte, por las inundaciones, y descubriéndose en el sur, cuya superficie continental aumentará. Estos cambios serán tan lentos que por muchos siglos no se harán aparentes.

LA TIERRA CONSIDERADA COMO UN GEOIDE.

El geoide es una figura irregular, peculiar a nuestro planeta, y que está definida por ser su superficie en todos sus puntos normal y a la dirección de la gravedad, dirección definida por la plomada en cada lugar; y según las leyes de la hidrostática, es claro que la superficie libre de las aguas en equilibrio será paralela al geoide. Puede también definirse la superficie del geoide como siendo la superficie de los grandes océanos, haciendo abstracción del flujo y reflujo de las aguas, corrientes, climas, vientos y olas. Bajo los continentes e islas puede ser concebida esta superficie prolongada por canales o túneles ficticios, la superficie libre del agua en ellos siendo normal a la dirección de la plomada, y afectando por lo mismo la forma del geoide.

La siguiente figura da clara idea de las propiedades del geoide y de sus relaciones con el esferoide. Representa una pequeña parte de una sección meridiana; en los puntos S la

línea SN es normal al esferoide y la SZ normal al geoide, dirección de la plomada en los lugares correspondientes. El ángulo que las normales SZ hacen con el ecuador es la latitud astronómica de cada lugar, mientras que el que hacen las normales SN, diferencia de las dos latitudes, es la que se llama desviación de la vertical.



La figura representa a grandes rasgos la posición relativa probable del esferoide y del geoide. Bajo los continentes el geoide tiende a elevarse y en los océanos a deprimirse con relación a la superficie del esferoide de igual volumen. La atracción de los continentes y elevadas montañas tiende a elevar al geoide, mientras que las cuencas oceánicas como que lo impelen hacia abajo. A esta marcha, en general, habrá excepciones, debido sin duda a la variación de densidad de la corteza terrestre.

Según lo que acaba de decirse, las desviaciones de la vertical son en cierto modo artificiales, dependiendo del elipsoide de referencia que se acepta. El geoide es lo real, corresponde a la superficie de equilibrio o equipotencial; el elipsoide, por el contrario, es una superficie ficticia que facilita las especulaciones y los cálculos, y las desviaciones de la vertical dependen tanto de la esferoide elegido como de la correcta orientación de ambos.

Debe advertirse que las desviaciones en longitud, latitud y azimut no concuerdan. En la estación de Parkersburg, del U. S. Lake Survey, la deflexión en latitud fué de  $1^{\circ}47'$  hacia el Sur, en longitud  $0^{\circ}70'$  hacia el Oeste y la discrepancia en este trabajo fueron  $10^{\circ}77'$  en latitud,  $12^{\circ}15'$  en longitud y  $11^{\circ}56'$  en azimut.

## CONCLUSIÓN.

Hemos visto que el primer supuesto acerca de la figura de la Tierra fué la de una inmensa llanura; la segunda hipótesis fué la de una esfera. No satisfaciendo esta hipótesis a los hechos observados, ni a las consideraciones teóricas más elementales, se supuso que la figura sería la de un esferoide o elipsoide de revolución; mas subsistiendo aún discrepancias, se buscó el elipsoide de tres ejes que mejor correspondiera con los hechos observados; llegándose, por último, a aceptar para figura de la Tierra la llamada "geoide."

Comparando con un esferoide de igual volumen, el geoide tiene una superficie muy irregular: ya se eleva sobre la superficie del esferoide, ya se abate sobre ella, cambiando siempre la ley de su curvatura, en todo de acuerdo con la intensidad y dirección la pesantez. Donde quiera que la densidad de la corteza terrestre es grande, el geoide se eleva sobre la superficie del esferoide, abatiéndose en los lugares de débil densidad. Desde un punto de vista puramente científico, sería preciso conocer las leyes que originan su forma y su tamaño; desde un punto de vista práctico, puede decirse que ni el esferoide, ni el elipsoide, ni ninguna figura geométrica, pueden representar la figura de la Tierra, siendo sólo aproximaciones. El ovaloide que mejor representaría la Tierra sería el que tuviera el mismo volumen que el geoide y cuya superficie se acercara lo más posible a la superficie geoidal.

Tal figura no podrá encontrarse hasta no tener mayor número de datos y más precisos que los actuales concernientes al geoide. Aceptando como marcha general del geoide que se eleva sobre el esferoide en los continentes y se abate en los océanos, es evidente que, puesto que el área de los océanos es triple de la de las tierras, la intersección de las dos superficies tendrá lugar en el mar a cierta distancia de las costas, en b, por ejemplo, como se ve en la figura; y como todos los trabajos geodésicos están reducidos al nivel a (véase figura) los elementos del esferoide deducido son un poco mayores que los que satisfarían la igualdad de volúmenes del esferoide y del geoide. El estudio de las propiedades matemáticas del

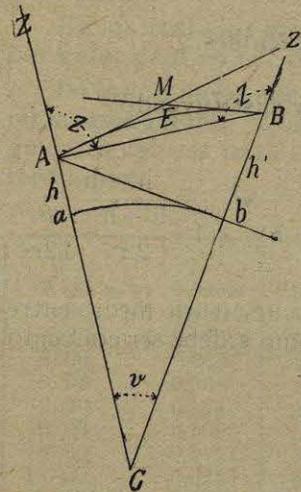
geoide, resultando de la definición dada anteriormente, ha llevado al Dr. Bruns a la demostración de que la figura matemática de la Tierra puede ser determinada independientemente de toda hipótesis, con tal que se tengan los datos siguientes:

- 1° Determinaciones astronómicas de latitud, longitud y azimutes en el mayor número de vértices.
- 2° Triangulación que una los vértices; los datos, siendo bases medidas y ángulos observados.
- 3° Nivelación trigonométrica. (Distancias zenitales medidas con precisión.)
- 4° Nivelación topográfica de precisión.
- 5° Determinación de la intensidad de la pesantez.

Si alguno de los datos anteriores falta, es indispensable hacer alguna hipótesis para la determinación de la figura de la Tierra.

Las conclusiones anteriores desprecian la circunstancia de que el geoide no es una figura fija é invariable. Los agentes de la dinámica externa ejerciendo su acción destructora sobre los continentes y acarreado el material á las cuencas oceánicas, tienden á uniformar la curvatura del geoide. Las fuerzas internas que producen lentas elevaciones y hundimientos en la corteza, alteran la superficie del geoide. Todas estas causas de alteración, sin embargo, son muy pequeñas, comparadas con la producida por el movimiento de rotación del eje terrestre al derredor de su posición media en el período de 425 días. Debido á esta causa, las latitudes astronómicas, longitudes y azimutes están sujetos á cambios periódicos, y la posición del geoide con relación al esferoide está constantemente variando, deduciéndose de aquí que el geoide, á causa de su inestabilidad, no es una figura de referencia conveniente en estudios y cálculos geodésicos, siendo necesario la elevación de una figura invariable para que sirva de apoyo, de punto de partida en las investigaciones y cálculos, pudiendo elegirse, ya el esferoide de revolución, ya el elipsoide de tres ejes desiguales, su forma y dimensiones siendo determinadas con la condición de hacer un mínimo la suma de los cuadrados de las desviaciones que se presenten durante un ciclo completo de la rotación del eje terrestre.

Nivelación trigonométrica.



La dirección según la cual se ve un punto B desde otro A, es la de la tangente en A á la línea que describe el rayo luminoso al pasar de uno á otro punto y que á causa de la refracción terrestre no es la recta trazada entre ambos. El desvío producido por dicha refracción en la visual de B ocurre en el plano vertical, que con suficiente exactitud puede decirse común a A y B, pues la refracción horizontal, que a veces acontece, altera muy poco los ángulos azimutales.

Varía mucho el valor de la refracción y no puede expresarse por una ley sencilla, pues dependiendo el curso del rayo luminoso del poder refractor de la atmósfera en cada punto por donde pasa, es línea muy irregular, sobre todo cuando las estaciones son bajas y el rayo roza el suelo.

Por término medio, la refracción, entendiéndose por ella la diferencia entre la verdadera dirección y la aparente, varía desde  $\frac{1}{12}$  hasta  $\frac{1}{16}$  del ángulo subtendido por las estaciones en el centro de la tierra. A orillas del mar ocurren comúnmente los valores más crecidos, y á gran distancia de él los más pequeños. Puede medirse la refracción del siguiente modo: sean h h' las alturas conocidas de dos estaciones A, B, determinadas, por ejemplo, por nivelación topográfica; Z y Z' las verdaderas distancias zenitales de B en A y de A en B y C el centro de la tierra que supondremos una esfera de radio r; si hacemos el ángulo ACB = v, el triángulo ACB nos dará:

$$\frac{1}{2} (Z + Z') = 90 + \frac{1}{2} v$$

$$\frac{\text{sen. } Z'}{\text{sen. } Z} = \frac{r + h}{r + h'}; \text{ de donde}$$

$$\frac{\text{sen. } Z - \text{sen. } Z'}{\text{sen. } Z} = \frac{h' - h}{r + h'}; \text{ y } \frac{\text{sen. } Z + \text{sen. } Z'}{\text{sen. } Z} = \frac{h + 2r + h'}{r + h'}$$

$$\text{y de esto } \frac{\text{tg. } \frac{1}{2} (Z - Z')}{\text{tg. } \frac{1}{2} (Z + Z')} = \frac{h' - h}{h' + 2r + h} \text{ ó}$$

$$\text{tg. } \frac{v}{2} \text{ tg. } \frac{1}{2} (Z' - Z) = \frac{h' - h}{h' + 2r + h}$$

Pero tenemos

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{v}{2} + \frac{v^3}{24}; \text{ y como } v = \frac{s}{r},$$

s siendo la distancia entre las dos estaciones

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{s}{2r} + \frac{s^3}{24r^3}, \text{ y sustituyendo}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (z'-z) = \frac{h'-h}{\frac{s}{2r} (1 + \frac{s^2}{12r^2}) (h'+2r+h)} = \frac{h'-h}{s(1 + \frac{h'+h}{2r} + \frac{s^2}{12r^2})}$$

Por r puede tomarse el radio de curvatura medio entre A y B y que hemos llamado  $R_0$ , y como s debe ser conocido por una triangulación, se deducirá

$$v = \frac{s}{R_0}$$

Conocido v, la primera ecuación y la última escrita nos permitirán conocer Z y Z' ó sea las distancias zenitales absolutas.

Coefficiente de refracción es la razón que la diferencia entre la distancia zenital verdadera y la observada en una u otra de las dos estaciones tiene con el ángulo v; de manera que llamando K dicho coeficiente  $\zeta$  y  $\zeta'$  las distancias zenitales observadas, se tendrá:

$$K = \frac{Z - \zeta}{v} \text{ ó } K = \frac{Z' - \zeta'}{v},$$

debiendo advertirse que estos valores no siempre concuerdan.

Puede también obtenerse el coeficiente de refracción observando distancias zenitales recíprocas de A y B, prescindiendo de que se conozcan las alturas de estos vértices; pues admitiendo que en el caso de simultaneidad la refracción sea la misma, se tendrá:

$$Z' = \zeta' + Kv; \quad Z = \zeta + Kv$$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación tendremos:

$$\zeta + \zeta' + 2Kv = 180 + v; \text{ de donde}$$

$$1 - 2K = \frac{\zeta + \zeta' - 180}{v}$$

Promediados los 144 valores de K, deducidos de las observaciones hechas en Inglaterra, resulta por coeficiente medio de refracción 0,0771, los valores extremos siendo 0.0320 y 0.1058.

En los trabajos geodésicos de Massachusetts se adoptó por valor de K en la costa 0.0784 y en el interior 0.0697.

De los trabajos que ejecuté en el valle de México, (véase mi memoria sobre "Coeficiente de refracción"), deduje los siguientes valores para el coeficiente de refracción de media en media hora.

h	h	h
7.00 a. m. 0.0948	12.30 p. m. 0.0608	6.00 p. m. 0.0564
7.30 " 0.0886	1.00 " 0.0612	6.30 " 0.0590
8.00 " 0.0846	1.30 " 0.0566	7.00 " 0.0693
8.30 " 0.0637	2.00 " 0.0570	7.30 " 0.0778
9.00 " 0.0681	2.30 " 0.0563	8.00 " 0.0795
9.30 " 0.0740	3.00 " 0.0499	8.30 " 0.0880
10.00 " 0.0695	3.30 " 0.0472	9.00 " 0.0853
10.30 " 0.0731	4.00 " 0.0474	9.30 " 0.0858
11.00 " 0.0721	4.30 " 0.0459	10.00 " 0.1039
11.30 " 0.0697	5.00 " 0.0495	
12.00 " 0.0689	5.30 " 0.0587	
Promedio.....0.0686		

Los resultados anteriores, son los promedios de las observaciones hechas en los meses de Septiembre y Octubre de 1902.

El coeficiente de refracción decrece desde la salida del Sol hasta las horas del medio día, en las que aunque oscilante, difiere poco del promedio encontrado, por volver á crecer durante las horas de la tarde y de la noche.

En el "Coast & Geodetic Survey" aceptan para el coeficiente de refracción los valores siguientes:

En la costa o muy próximo al mar.....0.078  
Alejado de la costa, pero en su cercanía.....0.071  
En el interior.....0.065

Como se ve, concuerda bastante bien el valor aceptado para el interior de los Estados Unidos, con el deducido de mis observaciones para el Valle de México.

Conociendo las distancias zenitales observadas de los vértices, de varias maneras podemos calcular sus alturas relativas: