a y e^2 son cantidades conocidas aproximadamente, cuyas correcciones deben investigarse.

Si ponemos

$$a = a_0 + \delta\, a, \quad e^2 = e_0^2 - \delta\, e^2,$$

podemos hacer R_0 igual al valor que resulte para R, aceptando los valores aproximados a_0 y e^2.

Según el teorema de Taylor, tenemos:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\,a}\,\delta\, a + \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\,e^2}\,\delta\, e^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Diferenciando la ecuación (b), tomando a como variable independiente, resulta:

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\,a} = -\frac{(1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)\ a^2} = -\frac{1}{a^2}$$

despreciando, sin inconveniente alguno, los términos en e^2.

Diferenciando la misma ecuación con relación á e, tendremos:

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\,e^2} = \frac{-(1-e^2)^{\frac{2}{2}}\,(1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi)^{\frac{1}{2}}\ \text{sen}^2\ \varphi + (1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a\,(1-e^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{3}{2}\ \text{sen}^2\,\varphi\right)$$

despreciando todos los términos en e^2.

Sustituyendo estos valores en (c), se tendrá:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{a_0^2}\,\delta\, a + \frac{1}{a_0}\left(1 - \frac{3}{2}\ \text{sen}^2\ \varphi\right)\delta\, e^2;$$

por consiguiente la ecuación en (a) queda

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{s}{\text{sen}\ 1''}\left[\frac{1}{R_0} - \frac{\delta\, a}{a_0^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\,\text{sen}^2\ \varphi\right)\frac{\delta\, e^2}{a_0}\right] - \frac{\delta\, s}{R_0\,\text{sen}\,1''} \ldots (d)$$

La medida de los arcos es bastante más precisa que las latitudes observadas; de manera que si llamamos v_2 y v_1

las correcciones que éstas deben sufrir, la (d) se escribirá despreciando el último término

$$\varphi_2 + v_2 = \varphi_1 + v_1 + \frac{s}{\text{sen}\,1''}\left[\frac{1}{R_0} - \frac{\delta\, a}{a_0^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\,\text{sen}^2\,\varphi\right)\frac{\delta\, e^2}{a_0}\right] \ldots\ldots\ldots (e)$$

La anterior puede escribirse como sigue:

$$v_2 - v_1 = -\frac{s}{\text{sen}\,1''}\,\frac{\delta\, a}{a_0^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\,\text{sen}^2\,\varphi\right)\frac{s}{\text{sen}\,1''}\,\frac{\delta\, e^2}{a_0} + \frac{s}{R_0\,\text{sen}\,1''} - (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Por ser $\delta\, a$ pequeño, lo mismo que $\delta\, e^2$, podemos escribir:

$$\frac{s}{a_0\,\text{sen}\ 1''} = (\varphi_2 - \varphi_1),$$

con lo que tendremos:

$$v_2 - v_1 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}\,\delta\, a + \left(1 - \tfrac{3}{2}\,\text{sen}\varphi^2\right)(\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta\, e^2 + \frac{s}{R_0\ \text{sen}\ 1''} - (\varphi_2 - \varphi_1) \ldots. (f)$$

Es muy conveniente hacer la siguiente trasformación:

$$x = \frac{\delta\, a}{1000};\ y = 1000\ \delta\, e^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

resultando:

$$v_2 - v_1 = -1000\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}\,x + \left(1 - \tfrac{3}{2}\,\text{sen}^2\,\varphi\right)\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000}\cdot y + \frac{s}{R_0\ \text{sen}\ 1''} - (\varphi - \varphi_1).$$

Si hacemos

$$a_1 = -1000\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}, \quad b_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000}\left(1 - \tfrac{3}{2}\ \text{sen}^2\ \varphi\right)$$

$$l_1 = \frac{s_1}{R_0\ \text{sen}\ 1''} - (\varphi_2 - \varphi_1),$$

tendremos:

$$a_1\,x + b_1\,y + l_1 = v_2 - v_1 \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots (h)$$

forma simple para el cálculo de las correcciones.

Es costumbre tomar por elipsoide de referencia el de Bessel, en el que

$$a_0 = 6377397^{m}155, \qquad e_0^2 = 0.006674372, \text{ y}$$

$$\text{lg. } a_0 = 6.80464346 \qquad \text{lg. } e_0^2 = 7.82441042$$

$$R_0 = \frac{a_0\,(1-e_0^2)}{(1-e_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

φ debe ser el promedio entre las dos latitudes consideradas.

Hagamos algunas aplicaciones.

Nacionalidad	Estaciones	LATITUDES	$\Delta \varphi$	$\Delta \varphi''$	Arcos en metros
Francia...	Formentera.	$\varphi_1 = 38°39'56''1$			
	Barcelona..	$\varphi_2 = 41\ 22\ 47.9$	2°42'51"8	9771"8	301354
	Carcassonne	$\varphi_3 = 43\ 12\ 54.3$	4 32 58.2	16378.2	505137
	Pantheon...	$\varphi_4 = 48\ 50\ 49.4$	10 10 53.3	36653.3	1131050
	Dunkirk....	$\varphi_5 = 51\ 02\ 08.8$	12 22 12.7	47532.7	1374572
Inglaterra	Dunnose....	$\varphi_6 = 50\ 37\ 07.6$			
	Greenwich..	$\varphi_7 = 51\ 28\ 39.0$	0 51 31.4	3091.4	95620
	Arburyhill..	$\varphi_8 = 52\ 13\ 28.0$	1 36 20.4	5780.4	178720
	Clifton.....	$\varphi_9 = 53\ 27\ 31.1$	2 50 23.5	10223.5	315892
Hanover..	Gottingen ..	$\varphi_{10} = 51\ 13\ 47.8$			
	Altona.....	$\varphi_{11} = 53\ 14\ 45.3$	2 00 57.5	7257.5	224458
Prusia....	Tranz......	$\varphi_{12} = 54\ 13\ 11.5$			
	Konigsberg.	$\varphi_{13} = 54\ 42\ 50.5$	0 29 39.0	1779.0	54958
	Memel......	$\varphi_{14} = 55\ 43\ 40.4$	1 30 28.9	5428.9	167962
Rusia.	Berlín.....	$\varphi_{15} = 52°\ 02'\ 40.''9$			
	Jakobstadt.	$\varphi_{16} = 56\ 30\ 04.6$	4° 27' 23.'' 3	16043.'' 7	496114
	Dorpat.....	$\varphi_{17} = 58\ 22\ 47.\ 3$	6 20 06. 4	22806. 4	705209
	Hochland...	$\varphi_{18} = 60\ 05\ 09.\ 8$	8 02 28. 9	28948. 9	895315
Suecia.	Malorn.....	$\varphi_{19} = 65\ 31\ 30.\ 3$			
	Pahtawara.	$\varphi_{20} = 67\ 08\ 49.\ 8$	1 37 19. 5	5839. 5	180828

Calculemos las ecuaciones (h) para el arco francés.

Latitud media entre Formentera y Barcelona

$$\varphi_m = 40°\ 01'\ 22.''\ 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{lg. } a_0 &= 6.8046435 \\
\text{lg. } (1-e^2) &= 9.9970917 \\
\text{comp. lg. } (1-e_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} &= \underline{0.0018006} \\
\text{lg. } R_0 &= 6.8035358
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{lg. } e^2 &= 7.8244104 \\
\text{lg. } \operatorname{sen}^2 \varphi_m &= \underline{9.6165464} \\
&\ 7.4409568 \\
e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_m &= 0.0027603 \\
1-e_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_m &= 0.9972397 \\
\text{lg.} &= 9.9987996 \\
\tfrac{3}{2}\, \text{lg.} &= 9.9981994
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{lg. } 1000 &= 3.00000 \\
\text{lg. } (\varphi_2-\varphi_1) &= 3.98997 \\
\text{comp. lg. } a_0 &= \underline{3.19536} \\
\text{lg. } a_1 &= 0.18533^{n} \\
a_1 &= -\ 1.53 \\
\\
\text{lg. } s_1 &= 5.47908 \\
\text{lg. } \frac{1}{R_0} &= 3.19646 \\
\text{comp. lg. sen } 1'' &= \underline{5.31443} \\
&\ 3.98997 \\
\frac{s_1}{R_0 \text{ sen } 1''} &= \ 9771.6 \\
-\ (\varphi_2-\varphi_1) &= \ \underline{9771.8} \\
l_1 &= \ -0.2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{lg. } \tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi &= 9.79264 \\
\tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi &= 0.62035 \\
1 - \tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi &= 0.37965 \\
\text{lg. } (1-\tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi) &= 9.57938 \\
\text{lg. } (\varphi_2-\varphi_1) &= 3.98997 \\
\text{comp. lg. } 1000 &= \underline{7.00000} \\
\text{lg. } b_1 &= 0.56935 \\
b_1 &= +\ 3.71
\end{aligned}$$

La primera ecuación relativa al arco francés será pues:

$$-\ 1.53\ x + 3.71\ y - 0.2 = v_2 - v_1$$

Haremos otro ejemplo, calculando la ecuación para el arco sueco:

$$\varphi_{20} - \varphi_{19} = 5839.''5; \quad \tfrac{1}{2}\ (\varphi_{20} + \varphi_{19}) = 66°\ 20'\ 10.''\ 1$$

$$\text{lg. } a_o = 6.8046435 \qquad \text{lg. } e^2 = 7.8244104$$
$$\text{lg. } (1-e_0^2) = 9.9970917 \qquad \text{lg. sen}^2\ \varphi = 9.9237128$$
$$\text{comp. lg. } (1-e_o \text{ sen}^2\ \varphi) = 0.0036579 \qquad 7.7481232$$
$$\text{lg. } R_o = 6.8053931 \qquad e_0^2 \text{ sen}^2\ \varphi = 0.0055992$$
$$1 - e_o \text{ sen}^2\ \varphi = 0.9944008$$
$$\text{log.} = 9.9975615$$
$$\tfrac{3}{2} \text{ log.} = 9.9963421$$

$$\text{lg. } 1000 = 3.00000 \qquad \text{lg. } \frac{3}{2} \text{ sen.}^2\ \varphi = 0.09980$$
$$\text{,, } (\varphi_{20}-\varphi_{19}) = 3.76638 \qquad \frac{3}{2} \text{ sen.}^2\ \varphi = 1.2584$$
$$\text{comp. ,, } a_0 = 3.19536$$
$$\text{,, ,, } a_1 = 9.96174\ n \qquad 1 - \frac{3}{2} \text{ sen.}^2\ \varphi = 0.2584$$
$$a_1 = -0.92$$

$$\text{lg } s_{20} = 5.25726 \qquad \text{lg.}\left(1 - \frac{3}{2} \text{ sen.}^2\ \varphi\right) = 9.41229\ n$$
$$\text{,, } \frac{1}{R_o} \ldots\ldots = 3.19461 \qquad \text{lg.}(\varphi_{20}-\varphi_{19}) = 3.76638$$
$$\text{,, } \frac{1}{\text{sen} 1''} \ldots\ldots = 5.31443 \qquad \text{comp. lg. } 1000 = 7.00000$$
$$3.76630 \qquad \text{lg. } b = 0.17867$$
$$\frac{s_{20}}{R_o \text{ sen.} 1''} = 5838.4 \qquad b = -1.51$$
$$-(\varphi_{20}-\varphi_{19}) = -5839.5$$
$$1_{20} = -1.1$$

la ecuación para el arco sueco será pues:

$$-092x-1.51y-1.1 = v^{20} - v^{19}$$

Las ecuaciones así encontradas no corresponden realmente á las ecuaciones condicionales, dado que hay dos residuos en el 2º miembro; pero si agregamos una ecuación en cada grupo que corresponda á la latitud inicial y las escribimos dejando una sola corrección en el 2º miembro, las ecuaciones así obtenidas podemos considerarlas como las ecuaciones condicionales ó ecuaciones susceptibles de dejar residuos ó errores, la suma de cuyos cuadrados debe ser un mínimum, á fin de que las correcciones calculadas sean las más probables.

Sentado lo anterior, tendremos las siguientes ecuaciones condicionales:

$$\begin{aligned}
v_1 & = v_1 \\
v_1 - 1.53x + 3.71y - 0''2 & = v_2 \\
v_1 - 2.57x + 5.83y - 1.4 & = v_3 \\
v_1 - 5.75x + 10.36y - 2.1 & = v_4 \\
v_1 - 6.98x + 11.41y + 1.2 & + v_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_6 & \quad v_6 \\
v_6 - 0.48x + 0.29y + 3.2 & = v_7 \\
v_6 - 0.91x + 0.48y + 3.2 & = v_8 \\
v_6 - 1{,}60x + 0.69y - 1.9 & = v_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{10} & = v_{10} \\
v_{10} - 1.14x + 0.40y + 5.0 & = v_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{12} & = v_{12} \\
v_{12} - 0.28x + 0.01y - 0.5 & = v_{13} \\
v_{12} - 0.85x - 0.03y + 3.3 & = v_{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{15} & = v_{15} \\
v_{15} - 2.52x + 0.18y + 3.6 & = v_{16} \\
v_{15} - 3.58x - 0.27y + 0.7 & = v_{17} \\
v_{15} - 4.54x - 0.94y + 2.3 & = v_{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{19} & = v_{19} \\
v_{19} - 0.92x - 1.51y - 1.1 & = v_{20}
\end{aligned}$$

Ecuaciones normales.

$$\begin{aligned}
& + 5v_1 - 16.83x + 31.21y - 2.50 = 0 \\
& + 4v_6 - 2.99x + 1.46y + 4.50 = 0 \\
& + 2v_{10} - 1.14x + 0.40y + 5.00 = 0 \\
& + 3v_{12} - 1.13x - 0.02y + 2.80 = 0 \\
& + 4v_{15} - 10.64x - 1.03y + 6.60 = 0 \\
& + 2v_{19} - 0.92x - 1.51y - 1.10 = 0 \\
& -16.83v_1 - 2.99v_6 - 1.14v_{10} - 1.13v_{12} - 10.64v_{15} - 0.92v_{19} + 137.07x - 155.11y - 23.18 = 0 \\
& +31.21v_1 + 1.46v_6 + 0.40v_{10} - 0.92v_{12} - 1.03v_{15} - 1.51v_{19} - 155.11x + 287.21y - 14.08 = 0
\end{aligned}$$

Eliminadas las v quedan solamente dos ecuaciones en x é y, que resueltas dan:

$$x = +\ 0.4023, \qquad y = +\ 0.2347;$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \delta a &= 1000\,x = 402.^{m}3; \qquad \delta e^2 = 0.001\,y = +\ 0.0002347 \\ a &= a_0 + \delta a = 6377397.2 + 402.3 = 6377799.5 \\ e^2 &= e_0^2 + \delta e^2 = 0.0066744 + 0.0002347 = 0.0069091. \end{aligned}$$

Substituyendo los valores de x é y en las seis primeras ecuaciones normales, se obtienen los valores de v_1, v_6, v_{10}, v_{12}, v_{15}, v_{19}. Estos valores juntos con los de x é y, substituídos en las ecuaciones condicionales, dan los valores de las otras v.

La suma de sus cuadrados es:

[vv] = 52; por consiguiente, el error medio cuadrático de una latitud referida al elipsoide, es

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m-n}} = \sqrt{\frac{52}{20-8}} = 2.''1$$

Error muy superior al que corresponde á la observación de una latitud, indicando la influencia de las desviaciones de la vertical.

Es muy conveniente para apreciar la importancia respectiva de los principales arcos en la determinación de a y c, encontrar para s una forma adecuada, que vamos á desarrollar.

Hemos encontrado:

$$ds = a\,(1-e^2)\,(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}\,d\varphi$$

Si hacemos

$$\frac{c}{a} = \frac{1-n}{1+n} \text{ resultará } n = \frac{a-c}{a+c}; \text{ y como } e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$1-e^2 = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^2}; \quad e^2 = \frac{4\,n}{(1+n)^2};$$ por consiguiente, sustituyendo se tendrá:

$$ds = a\,\frac{(1-n)^2}{(1+n)^2}\left(1 - \frac{4\,n}{(1+n)^2}\operatorname{sen.}^2 \varphi\right)^{-\frac{3}{2}} d\varphi;$$

de donde:

$$ds = a\,\frac{(1-n)^2}{(1+n)^2}\left(\frac{1+2n\cos.^2\varphi - 2n\operatorname{sen.}^2\varphi + n^2}{(1+n)^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\varphi; \text{ ó}$$

$$ds = a\,(1-n)^2\,(1+n)\,(1+2n\cos.\,2\varphi + n^2)^{-\frac{3}{2}}\,d\varphi; \text{ ó bien}$$

$$ds = c\,(1+n)\,(1-n^2)\,(1+2n\cos.\,2\varphi + n^2)^{-\frac{3}{2}}\,d\varphi$$

Despreciando los términos en n^2, tendremos:

$$s = c\,(1+n)\int_{\varphi}^{\varphi^1}(1+2n\cos.\,2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\,d\varphi = c\,(1+n)\int_{\varphi}^{\varphi'}(1-$$

$$-3n\cos.\,2\,\varphi)\,d\varphi; \text{ é integrando}$$

$$s = c\,(1+n)\left[(\varphi^1-\varphi) - 3n\operatorname{sen.}(\varphi^1-\varphi)\cos.(\varphi^1+\varphi)\right]$$

Si hacemos $\varphi^1 - \varphi = \alpha$ y $\frac{\varphi^1+\varphi}{2} = \varphi_m$, tendremos

$$\frac{s}{\alpha} = c\,(1+n) - 3n\,(1+n)\,c\cos.\,2\varphi_m = c\,(1+n) - 3c\,n\cos.\,2\,\varphi_m.$$

Poniendo por n su valor:

$$\frac{s}{\alpha} = c\left(1+\frac{a-c}{a+c}\right) - 3c\,\frac{a-c}{a+c}\cos.\,2\,\varphi_m;$$ ó bien, con bastante aproximación para el caso:

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{1}{2}\,(a+c) - \frac{3}{2}\,(a-c)\cos.\,2\,\varphi_m;$$ y reemplazando $\frac{s}{\alpha}$ por r, radio de curvatura, tendremos:

$$a\,\frac{1-3\cos.\,2\,\varphi_m}{2} + c\,\frac{1+3\cos.\,2\,\varphi_m}{2} = r$$

Para otro arco, tendríamos:

$$a\,\frac{1-3\cos.\,2\,\varphi'_m}{2} + c\,\frac{1+3\cos.\,2\,\varphi'_m}{2} = r',$$

y de estas ecuaciones se deducirán a y c.

Para ello es menester que los coeficientes respectivos de a y c en ambas discrepen algún tanto, y por lo mismo que los arcos estén situados en latitudes apartadas entre sí. Hay dos puntos del meridiano que dan resultados especiales, á saber: aquél en que

$$\cos.\ 2\,\varphi_m = -\frac{1}{3} \text{ ó } \varphi_m = 54^\circ\ 45'$$

donde el radio de curvatura vale a, y aquél en que

$$\cos.\ 2\,\varphi_m = \frac{1}{3} \text{ ó } \varphi_m = 35^\circ\ 15'$$

donde el radio de curvatura vale c.

Calculemos la fórmula anterior para φ_m igual á 65° que corresponde al arco ruso; para $\varphi_m = 55°$ que corresponde al arco inglés; para $\varphi_m = 45°$ que corresponde al arco francés y para $\varphi_m = 15°.5$ que corresponde al arco indio.

Las ecuaciones condicionales son:

$$\frac{3}{2}\,a - \frac{1}{2}\,c = r_1$$

$$a - o \quad = r_2$$

$$\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,c = r_3$$

$$-\frac{11}{14}\,a + \frac{25}{14}\,c = r_4$$

Las ecuaciones normales son:

$$+807a - 373c = 294r_1 + 98r_3 - 154r_4 + 196r_2$$

$$-373a + 723c = -98r_1 + 98r_3 + 350r_4$$

que resueltas dan:

$$a = +\,0.396lr_1 + 0.3189r_2 + 02417r_3 + 0.043lr_4$$

$$c = +\,0.0687r_1 + 0.1644r_2 + 0{:}2602r_3 + 0.5064r_4$$

Lo anterior demuestra que la parte meridional del arco de la India influye mucho en el cálculo de c y poco ó nada en el de a.

Arco oblicuo.

Los datos recogidos son latitud, azimutes de una dirección, diferencia de longitud y distancia lineal.

Cada observación dará una ecuación de la forma

$$f\,(X\,Y\,Z \ldots\ldots\ldots\ldots) - M = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

en la que X Y Z son los valores más probables deducidos de las cantidades observadas φ_1, φ_2, α_1, α_2, $\triangle\lambda$, s; y de las dimensiones del elipsoide a y e^2.

Para el punto de partida de latitud observada tendremos la siguiente ecuación condicional:

$$f_1\ (\varphi + \delta\varphi_1) - \varphi_1 = v_1 \text{ ó } \delta\,\varphi_1 + o = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

δ como coeficiente de una cantidad denota la corrección correspondiente, según convención ya acostumbrada.

Para la latitud φ_2 se necesitan los elementos de un elipsoide; y por lo mismo la ecuación condicional será:

$$f_2\ (\varphi_1 + \delta\varphi_1,\ a_0 + \delta a,\ e_0^2 + \delta e^2) - \varphi_2 = v_2$$

Desarrollando por la fórmula de Taylor, tendremos:

$$f_2\,(\varphi_1 + \delta\varphi_1,\ a_0 + \delta a,\ e_0^2 + \delta e^2) = f_2(\varphi_1\ a_0\ e_0^2)$$

$$+\frac{df_2}{d\varphi_1}\,\delta_1\varphi + \frac{df_2}{da}\,\delta a + \frac{df_2}{de^2}\,\delta e^2$$

y sustituyendo tendremos para la ecuación condicional en φ_2

$$f_2\,(\varphi_1,\ a_0,\ e_0^2) - \varphi_2 + \frac{df_2}{d\varphi_1}\,\delta\varphi_1 + \frac{df_2}{da}\,\delta\,a + \frac{df_2}{de^2}\,\delta e = v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Los dos términos $f_2\,(\varphi_1,\ a_0,\ e_0^2) - \varphi_2$ equivalen á comparar la latitud φ_2 calculada por las fórmulas de las coordenadas geodésicas, con la latitud φ_2 observada, y á esta diferencia la llamaremos l, interpretando el signo, poniendo siempre *valor calculado, menos observado.*

Para la forma de la función

$$f_2\,(\varphi_1+\delta\varphi_1,\,a_0+\delta a,\,e_0^2+\delta e^2)$$

podemos aceptar el primer término de la fórmula que nos dá la diferencia de latitudes desarrolladas en las coordenadas geodésicas, ó sea

$$f_2\,(\varphi_1+\delta\varphi_1,\,a_0+\delta a,\,e_0^2+\delta e^2)=\varphi_1-\frac{1}{R}\,s\cos.\,\alpha=\varphi_1-$$

$$-\frac{r^3}{a\,(1-e^2)}\,s\cos.\,\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

en la que $r=(1-e^2\,\mathrm{sen.}^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}$

Diferenciando, tendremos:

$$\frac{df_2}{d\varphi_1}=1\,;\ \text{ó}\ \frac{df_2}{d\varphi_1}\,\delta\varphi_1=\delta\varphi_1$$

$$\frac{df_2}{da}=\frac{r_0^3}{a_0^2(1-e_0^2)}\,s\cos.\,\alpha;\ \text{ó}\ \frac{df^2}{da}\,\delta a=\frac{r_0^3}{a_0^2(1-e_0^2)}\,s\cos.\,\alpha\,\delta a$$

$$\frac{df_2}{de^2}=\frac{\frac{3}{2}(1-e_0^2)\,r_0\,\mathrm{sen.}^2\varphi-r_0^3}{(1-e_0^2)^2}\cdot\frac{s\cos.\,\alpha}{a}\,;\ \text{ó}\ \frac{df_2}{de^2}\,\delta e^2=$$

$$=\frac{\frac{3}{2}(1-e_0^2)\,r_0\,\mathrm{sen.}^2\varphi-r_0^3}{(1-e_0^2)^2}\cdot\frac{s\cos.\,\alpha}{a}\,\delta e^2$$

Sustituyendo, tendremos:

$$\delta\varphi_1+\frac{r_0^3}{a_0^2\,(1-e_0^2)}\cdot s\cos.\,\alpha\,\delta a+$$

$$+\frac{\frac{3}{2}(1-e_0^2)\,r_0\,\mathrm{sen.}^2\varphi-r_0^3}{(1-e_0^2)^2}\cdot\frac{s\cos.\,\alpha}{a}\cdot\delta e^2+l_2=v_2 \ldots\ldots \text{(e)}$$

Las ecuaciones (b) y (e) son las de latitud.

Para la diferencia de longitudes tendremos:

$$f_3\,(a_0+\delta a,\,e_0^2+\delta e^2)=\frac{s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1}{N'\cos.\,\varphi_2}=\frac{r'\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1}{a\cos.\,\varphi_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(f)}$$

puesto que $\frac{1}{N'}=\frac{r'}{a}$ y $r'=(1-e^2\,\mathrm{sen.}^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}$

Diferenciando tendremos:

$$\frac{df_3}{da}\,\delta a=-\frac{r'_0\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1}{a_0^2\cos.\,\varphi_2}\,\delta a$$

$$\frac{df_3}{de^2}\,\delta e^2=-\frac{\mathrm{sen.}^2\varphi_2\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1}{2a\,r'_0\cos.\,\varphi_2}\,\delta e^2;\ \text{y sustituyendo:}$$

$$-\frac{r'_0\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1}{a_0^2\cos.\,\varphi_2}\,\delta a-\frac{\mathrm{sen.}^2\,\varphi_2\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1}{2a_0\,r'_0\cos.\,\varphi_2}\,\delta e^2+l_3=v_3 \ldots\ldots\ldots \text{(g)}$$

l_3 = longitud calculada menos observada.

Para las ecuaciones de azimut, tendremos:

Para el azimut directo

$$f_4\,(\alpha_1+\delta\alpha_1)-\alpha_1=v_4\ \ \text{ó}\ \delta\alpha_1+o=v_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}$$

y para el inverso:

$$f_5\,(\alpha_1+\delta\alpha_1,\,a_0+\delta a,\,e_0^2+\delta e^2)-\alpha_2=v_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

Por las fórmulas desarrolladas en coordenadas geodésicas podemos poner:

$$\alpha_2=f_5=180+\alpha_1-d\,L\,\mathrm{sen.}\,\varphi_m=180+\alpha_1-\frac{r'\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1\,\mathrm{sen.}\,\varphi_m}{a_0\cos.\,\varphi_2};$$

y diferenciando:

$$\frac{df_5}{d\alpha_1}\,\delta\alpha_1=\delta\alpha_1\,;\ \frac{df_5}{da}\,\delta a=+\frac{r'_0\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1\,\mathrm{sen.}\,\varphi_m}{a_3^2\cos.\,\varphi_2}\,\delta a$$

$$\frac{df_5}{de^2}\,\delta e^2=\frac{\mathrm{sen.}^2\,\varphi_2\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1\,\mathrm{sen.}\,\varphi_m}{2r_0'a\cos.\,\varphi_2}\,\delta e^2;\ \text{y sustituyendo:}$$

$$\delta\alpha_1+\frac{r_0'\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1\,\mathrm{sen.}\,\varphi_m}{a\cos.\,\varphi_2}\,\delta a+\frac{\mathrm{sen.}^2\,\varphi_2\,s\,\mathrm{sen.}\,\alpha_1\,\mathrm{sen.}\,\varphi_m}{2r'_0\,a_0\cos.\,\varphi_2}\,\delta e^2+l_5=v_5$$

l_5 = azimut calculado menos observado.

La anterior puede escribirse sin inconveniente alguno como sigue:

$$\delta\alpha_{,}+\frac{r_o{}'s}{a_o{}^2}\,\text{sen.}\alpha_{,}\,\text{tg.}\varphi\,\delta a+\frac{s}{2r_o{}'a_o}\,\text{sen.}\alpha_{,}\,\text{sen.}^2\varphi\,\text{tg.}\varphi\,\delta e^2+l_5=v_5 \quad (j)$$

Si s es muy grande, ó su medida deficiente, de tal manera que su error probable sea apreciable en comparación de los correspondientes á φ, dL y α, se necesita otra ecuación de la forma

$$f_6\,(a_o+\delta a,\ e_o{}^2+\delta e^2)-s=v_6$$

De la ecuación que nos da dL, se deduce

$$s=\frac{N'\,dL\cos.\varphi_{,}}{\text{sen.}\,\alpha_{,}}=\frac{a\,dL\cos.\varphi_{,}}{r'\,\text{sen.}\,\alpha}=f_6$$

Diferenciando, tendremos:

$$\frac{df_6}{da}\,\delta a=\frac{dL\cos.\varphi_{,}}{r_o{}'\,\text{sen.}\,\alpha_1}\,\delta a;\ \frac{df_6}{de^2}\,\delta e^2=\frac{a_o\,dL\cos.\varphi_{,}\,\text{sen.}^2\varphi_{,}}{2\,r_o^3\ \text{sen.}\,\alpha_1}\,\delta e^2;$$

y sustituyendo;

$$\frac{dL\cos.\varphi_{,}}{r_o{}'\,\text{sen.}\,\alpha_1}\,\delta a\pm\frac{a\,dL\cos.\varphi_{,}\,\text{sen.}^2\varphi_{,}}{2\,r_o^3\ \text{sen.}\,\alpha_1}\,\delta e^2+l_6=v_6$$

l_6 = longitud calculada menos longitud medida....... (k)

Con excepción de la ecuación (b), todas las demás ecuaciones corresponden á cada una de las líneas que partan del mismo punto, estableciéndolas de igual modo.

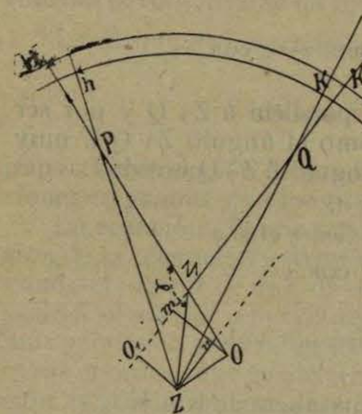
Su solución permitirá calcular las correcciones de los elementos del elipsoide de referencia adoptado.

Desviaciones de la vertical.—Teorema de Laplace.

De los estudios teóricos combinados con observaciones y medidas directas, se deduce que la figura de nuestro globo se aproxima mucho á la de un elipsoide de revolución, sin

que sea ésta su forma exacta, habiendo entre el elipsoide y la figura real diferencias, cuya magnitud crece y mengua alternativamente, sin sujeción á fórmula alguna. Sin embargo, merced á las vastas operaciones geodésicas llevadas á cabo, puede hallarse un esferoide al cual se ajuste tanto la superficie matemática de la Tierra que la discrepancia probable en cualquier punto sea muy pequeña.

Cuando sólo se contaba para cálculos geodésicas con cortos arcos, la irregularidad de la figura de la Tierra se revelaba principalmente por los muy distintos valores de elipticidad ó achatamiento que por diversas combinaciones de esos arcos se obtenían. La causa de tales diferencias es un hecho bien notorio al presente, á saber: que aun en puntos donde por las condiciones de la región que los rodea parece no debiera existir ninguna atracción local, la latitud observada discrepa de la calculada uno ó dos segundos. En Edimburgo se ha encontrado un desvío de 5″ en la dirección de la gravedad y en los condados de Banff y Elgin el máximo llegó á 10″. En el Himalaya asciende el desvío hasta cerca de 30″, disminuyendo con alguna rapidez al alejarse de la cordillera. El Sr. Merino pudo comprobar un desvío como de 13″ en Santander, cerca del mar Cantábrico, y en Tetica, situado en medio de un laberinto de montañas, lejos del mar, y con causas locales de atracción y desvío repetidas en torno suyo con alguna simetría, casi no se notó atracción alguna.



Sean en la figura, Z el zenit astronómico y Z_1 el geodésico de un punto cualquiera A; P el polo y Q el punto de la bóveda celeste donde se proyecta una señal terrestre, siguiendo la visual á ella dirigida. Puesto que los arcos máximos Z_1 P H y Z_1 Q K, como Z P h y Z Q k, valen cada uno 90°, el azimut de Q medido con el teodolito será $hk=\alpha_1$. Bajemos el arco Z O perpendicular á Z_1 P y hagamos $Z_1\,O=\xi$ y $Z\,O=\eta$. $Z_1 Z=\varepsilon$ es la desviación total y el ángulo P Z_1 $Z=\gamma$ es el azimut del plano de vesviación.

El triángulo Z Z_1 O nos da:

$Z\,O=\eta=\varepsilon$ sen. γ; $Z_1\ O=\xi=\varepsilon$ cos. γ, en valor absoluto.

Si la latitud y longitud astronómicas las llamamos φ y ω y las correspondientes geodésicas φ_1 y ω_1, tendrémos:

$$\varphi_1-\varphi=\xi;\ \omega_1-\omega=\Delta\omega \ldots\ldots (1);$$

deduciéndose estas ecuaciones de la comparación entre las coordenadas observadas y las calculadas.

El triángulo Z P O nos da:

$$(2)\ldots\ldots ZO=\eta=\cos.\ \varphi.\Delta\omega;\ \text{de donde}\ \Delta\omega=\varepsilon\ \text{sen.}\gamma\sec.\varphi\ldots\ldots(3)$$

Como ξ y $\Delta\omega$ son cantidades conocidas, se deduce en función de ellas

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^2&=\xi^2+\overline{\Delta\omega}^2\cos.^2\varphi\\ \text{lg.}\ \gamma&=\frac{\Delta\omega\cos.\ \varphi}{\xi}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ecuaciones que nos dan la desviación total y el azimut del plano de desviación.

Si la altura del punto Q es e, tendremos: $QZ=\varkappa_1=90^\circ-e$, y si bajamos Z O_1 perpendicular á Z_1 Q, la perpendicular Z O_1 tendrá por valor, según se deduce de la figura

$$Z\,O_1=Om-On=\xi\ \text{sen.}\ \alpha-\eta\cos.\ \alpha_1$$

tirando O m perpendicular y Z n paralela á Z_1 Q y por ser α y α_1 muy poco diferentes así como el ángulo Z_1 Q Z muy pequeño; por consiguiente el triángulo Z Z_1 Q nos da

$$<ZQZ_1=\frac{\xi\ \text{sen.}\ \alpha-\eta\cos.\ \alpha}{\cos.\ e}$$

La distancia de h á P H tendrá por valor

$$\text{sen.}\ \varphi.\Delta\omega=\eta\ \text{tg.}\ \varphi;\ \text{y la distancia de K á K Q}$$

$$(\xi\ \text{sen.}\ \alpha-\eta\cos.\ \alpha)\ \text{tg.}\ e;$$

luego

$$\alpha_1=\alpha+\eta\ \text{tg.}\ \varphi+(\xi\ \text{sen.}\ \alpha-\eta\cos.\ \alpha)\ \text{tg.}\ e\ldots\ldots(5)$$

Si despreciamos tg. e por ser e muy pequeña, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1-\varphi&=\xi\\ \omega_1-\omega&=\eta\sec.\ \varphi\\ \alpha_1-\alpha&=\eta\ \text{tg.}\ \varphi\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Sabido es que las bases medidas se reducen al nivel medio del mar y que los ángulos observados con los teodolitos son los mismos que si á dicho nivel se determinaran; luego las operaciones trigonométricas pueden suponerse en realidad verificadas sobre la superficie matemática ó equipotencial. Pero los ángulos medidos entre los puntos reales y los correspondientes proyectados en el elipsoide, según la ecuación (5), pueden discrepar en

$$\xi(\text{sen.}\ \alpha^1\ \text{tg.}\ e^1-\text{sen.}\alpha\ \text{tg.})-\eta(\cos.\ \alpha^1\ \text{lg.}\ e^1-\cos.\ \alpha\ \text{tg.}\ e);$$

mas como ξ y η suelen limitarse á muy pocos segundos, y además e es por lo común muy pequeña por hallarse distante los vértices observados en operaciones geodésicas, los ángulos observados no diferirán en cantidad apreciable de los ángulos correlativos entre los puntos del elipsoide, pudiendo aceptar la triangulación como si estuviera proyectada en éste, y calcularla conforme se ha indicado.

La última de las ecuaciones (6) puede escribirse así:

$$\alpha_1-\alpha=(\omega_1-\omega)\ \text{sen.}\ \varphi\ldots\ldots(7)$$

importante relación debida á Laplace, y que liga las desviaciones en azimut y en longitud.

La ecuación (7) nos permitirá apreciar el grado de precisión de la operación astronómico-geodésica; en efecto, observando el azimut de una dirección en un punto de la tierra ligado á otros por una triangulación, podemos calcular el azimut geodésico de otra dirección cualquiera, lo mismo que las otras coordenadas geodésicas; por consiguiente la observación astronómica completa en un nuevo punto, nos permitirá encontrar los siguientes valores:

$$\varphi_1-\varphi,\quad \omega_1-\omega,\quad \alpha_1-\alpha$$

ó sea las desviaciones en latitud, longitud y azimut; así pues, si los valores encontrados $\alpha_1-\alpha$ y $\omega_1-\omega$ verifican la ecua-