de α y α' serán iguales y de signos contrarios, con lo que se tendrá:

$$s_0 = \frac{s+s'}{2} = K + \frac{K^3}{2\times 24}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}\right) + \frac{3\,K^5}{2\times 640}\left(\frac{1}{R^4}+\frac{1}{R'^4}\right)$$

Además,

$$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2 = \frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2}{RR'}$$

$$\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R'^2}\right)^2 = \frac{1}{R^4}+\frac{1}{R'^4}-\frac{2}{R^2R'^2};$$

y como R difiere poco de R', se tendrá con suficiente aproximación:

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2} = \frac{2}{R\,R'} = \frac{2}{R_0^2}$$

$$\frac{1}{R^4}+\frac{1}{R'^4} = \frac{1}{R^2R'^2} = \frac{2}{R_0^4},$$

con lo que se tendrá:

$$s_0 = K + \frac{K^3}{24\,R_0^2} + \frac{3\,K^5}{640\,R_0^4} \quad \text{..............(16)}$$

Para calcular á R_0 notemos que:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1-e^2+e^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha}{1-e^2}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi - e^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\alpha}{1-e^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\triangle^2 - e\triangle^2\cos^2 u\operatorname{sen}^2\alpha}{1-e^2}\right) = \frac{\triangle}{a}\;\frac{\triangle^2\,(1-e^2\cos^2 u\operatorname{sen}^2\alpha)}{1-e^2}$$

y como $\triangle\,\nabla = \sqrt{1-e^2}$, tendremos finalmente:

$\dfrac{1}{R'} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{a\,\nabla^3}\,(1-e^2\cos^2 u\operatorname{sen}^2\alpha)$; y de igual manera:

$\dfrac{1}{R'} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{a\,\nabla'^3}\,(1-e^2\cos^2 u'\operatorname{sen}^2\alpha')$; y por lo mismo:

$$\frac{1}{R_0^2} = \frac{1-e^2}{a^2\,\nabla^3\,\nabla'^3}\,(1-e^2\cos u\operatorname{sen}^2\alpha)\,(1-e^2\cos^2 u'\operatorname{sen}^2\alpha');$$

mas como

$e^2\cos^2 u\operatorname{sen}^2\alpha$ apenas difiere de $e^2\cos u'\operatorname{sen}^2\alpha'$;

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1-e^2}{a(\nabla\,\nabla')^{3/2}}\,(1-e^2\cos^2 u\operatorname{sen}^2\alpha)$$

Apliquemos las fórmulas anteriormente desarrolladas á un ejemplo. Las posiciones dadas de A, B y C, son:

	Longitud N.	Longitud W.
	—	—
A	51° 57′	4° 46′
B	53 04	4 04
C	50 37	1 12

Los elementos del esferoide de Clark para 1866, son:

$$\lg a = 6.80469857$$
$$\lg c = 6.80322378$$
$$\lg e^2 = 7.83050257$$
$$\lg\sqrt{1-e^2} = \lg = \tfrac{c}{a} = 9.99852521$$

Con los anteriores datos, calculemos primero las latitudes reducidas, escribiendo las fórmulas para mayor claridad.

$$\operatorname{tg} u = \tfrac{c}{a}\operatorname{tg}\varphi$$

$\lg\operatorname{tg}\varphi_a = 0.106409125$ $\quad$ $\lg\operatorname{tg}\varphi_b = 0.123937325$
$\lg\frac{c}{a} = 9.998525210$ $\quad$ $\lg\frac{c}{a} = 9.998525210$

$\lg\operatorname{tg} u_a = 0.104934335$ $\quad$ $\lg\operatorname{tg} u_b = 0.122462535$
$u_a = 51°51'19.898$ $\quad$ $u_b = 52°58'23.416$

$\lg\operatorname{tg}\varphi_c = 0.085697975$
$\lg\frac{c}{a} = 9.998525210$

$\lg\operatorname{tg} u_c = 0.084223185$
$u_c = 50°31'16''378$

La última fórmula del grupo 5 nos permitirá calcular las $\triangle$,

$$\triangle = \frac{\cos \varphi}{\cos u}$$

$\lg \cos \varphi_a = 9.789826625$	$\lg \cos \varphi_b = 9.778791625$
$\lg \cos u_a = 9.790799998$	$\lg \cos u_b = 9.779732744$
$\lg \triangle_a = 9.999086627$	$\lg \triangle_b = 9.999058881$

$$\lg \cos \varphi_c = 9.802435525$$
$$\lg \cos u_c = 9.803315397$$
$$\lg \triangle_c = 9.999120128$$

En el triángulo esférico auxiliar, el lado $v_{a\,b}$ está dado por las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos 42}{\operatorname{tg} u_a}$$

$$\cos v_{a.b.} = \frac{\operatorname{sen} u_a \operatorname{sen} (u_b + \delta)}{\cos \delta}$$

$\log \cos 42' = 9.999967575$	$\log \operatorname{sen}, U_a = 9.895674357$
$\log \operatorname{tg} U_a = 0.104934335$	$\log \operatorname{sen} (U_b + \delta) = 9.999917683$
$\log \operatorname{tg} \delta = 9.895033240$	$\text{com} \log \cos \delta = 0.104313306$
$\delta = 38\ 08'\ 42{,}625$	$\log \cos V_{a.b.} = 9.999905346$
$U_b = 52\ 58'\ 23{,}416$	$U_{a.b.} = 1^\circ 11' 46'', 200$
$U_b + \delta = 91\ 06\ \ 56{,}041$	$\frac{1}{2} V_{a.b.} = 0^\circ 35' 54'', 100$

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} V_{a.b.} = 8.018631203$$

$\frac{1}{2} (U_b - U_a) = 0^\circ 33' 31'', 759$; $\frac{1}{2} U_b + U_a) = 52^\circ 24' 51'', 657$

$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} (U_a - U_b) = 7.989143947$	
$\log \cos \frac{1}{2} (U_a + U_b) = 9.785291901$	$\log \cos \psi\, a\, b = 9.999522515$
$\log e = 8.915251285$	$\psi\, a, b = 2^\circ 41' 10'', 6$
$\text{com} \log \operatorname{sen} \frac{1}{2} V.ab = 1.981368797$	
$\log \operatorname{sen} \psi\ a.\ b. = 8.671055930$	

El lado $V_{a.c.}$ estará dado por las siguientes

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos 3^\circ 34'}{\operatorname{tg} U_a}\ ;\ \cos V_{a.c.} = \frac{\operatorname{sen} U_a \operatorname{sen} (U_c + \delta)}{\cos \delta}$$

$\log \cos 3^\circ 34' = 9.999157975$	$\log \operatorname{sen} U_a = 9.895674357$
$\log \operatorname{tg} U_a = 0.104934335$	$\log \operatorname{sen} (_c + \delta) = 9.999872488$
$\log \operatorname{tg} \delta = 9.894223640$	$\text{com} \log \cos \delta = 9.104004845$
$\delta = 38^\circ 05' 25'', 891$	$\log \cos V_{a.c.} = 9.999551690$
$U_c = 50^\circ 31' 16'', 398$	$V_{a.c.} = 2^\circ 36' 10'',\ 25$
$U_c + \delta = 88^\circ 36' 42'', 269$	$\frac{1}{2} V_{a.c.} = 1^\circ 18' 05'', 175$

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} V_{a,c.} = 8.356263292$$

$\frac{1}{2} (U_a - U_c) = 0^\circ 40' 01'', 760$; $\frac{1}{2} (U_a + U_c) = 51^\circ 11' 18'', 133$

$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} (U_a - U_c) = 8.068949347$	
$\log \cos \frac{1}{2} (U_a + U_c) = 9.785291901$	$\psi\, a, c = 1^\circ 29' 01'', 9$
$\log e = 8.915251285$	$\log \cos \psi_{a.c.} = 9.999854330$
$\text{com} \log \operatorname{sen} \frac{1}{2} V_{a.c.} = 1.643736708$	
$\log \operatorname{sen} \psi_{a.c.} = 8.413229241$	

Por último, el lado $V_{c.b.}$ está dado por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos (2^\circ 52')}{\operatorname{tg} U_b}\ ;\ \frac{\operatorname{sen} U_b \operatorname{sen} (U_c + \delta)}{\cos \delta}$$

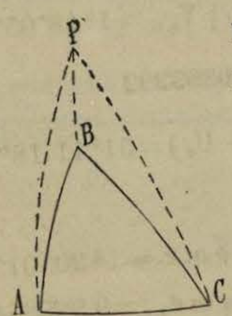
$\log \cos 2^\circ 52' = 9.999456175$	$\log \operatorname{sen} U_b = 9.902195307$
$\log \operatorname{tg} U_b = 0.122462535$	$\log \operatorname{sen} (U_c + \delta) = 9.999590918$
$\log \operatorname{tg} \delta = 9.876993640$	$\text{comp} \log \cos \delta = 0.097607647$
$\delta = 36^\circ 59' 32'', 435$	$\log \cos V_{c\,b.} = 9.999393872$
$U_c = 50^\circ 31' 16'', 378$	$V_{c\,b.} = 3^\circ 01' 35'', 027$
$U_c + \delta = 87^\circ 30' 48'', 813$	$\frac{1}{2} V_{c\,b.} = 1^\circ 30' 47'', 513$

$$\log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} V_{c\,b.} = 8.421722642$$

$\frac{1}{2}(U_b - U_c = 1°13'33'',519;\ \frac{1}{2}(U_b + U_c) = 51°44'49'',897$

log sen $\frac{1}{2}(U_b - U_c)$	$= 8.330326733$	$\psi_{c\,b.} =$	$2°\ 21'\ 55'',\ 1$
log cos $\frac{1}{2}(U_b + U_c)$	$= 9.791783550$	log cos $\psi_{c\,b.} =$	9.999629816
log e	$= 8.915251285$		
comp log sen $\frac{1}{2} V_{c\,b.}$	$= 1.578277358$		
log sen $\psi_{c\,b.}$	$= 8.615638926$		

Calculemos los azimutes, contándolos del N. al E. Fórmulas (10).



log 2	$= 0.301029975$
log a	$= 6.804698570$
log sen $\frac{1}{2} V_{a\,b.}$	$= 8.018631203$
los cos $\psi_{a\,b.}$	$= 9.999522515$
log $K_{a\,b.}$	$= 5.123882263$
$K_{a\,b.}$	$= 133000,2$

log Δ_a	$= 9.999086627$	log Δ_b	$= 9.999058881$
log sen $\frac{1}{2} V_{ab.}$	$= 8.018631203$	log sen $\frac{1}{2} V_{cb.}$	$= 8.018631203$
log sec ψ a.b.	$= 0.000477485$	log sec ψ a. b.	$= 0.000477485$
log sen μ	$= 8.018195315$	log sen μ'	$= 8.018167569$
μ	$= 0°\ 35'\ 50''\ 9$	μ'	$= 0°\ 35'\ 50''\ 8$
log cos μ	$= 0.999976402$	log cos μ'	$= 9.999976405$
log a	$= 6.804698570$	log a	$= 6.804698570$
log cos U_b	$= 9.779732744$	log cos U_a	$= 9.790739998$
log sen ω	$= 8.086964585$	log sen ω	$= 8.086964585$
comp log K	$= 4.876117737$	comp log K	$= 4.876117737$
comp log cos μ	$= 0.000023598$	comp log cos μ'	$= 0.000023595$
log sen α	$= 9.547537234$	log sen α'	$= 9.558544485$
α = (az AB)	$= 20°39'32''77$	α'	$= 21°12'52''81$
		az BA	$= 201°12'52''81$

log 2	$= 0.301029975$	log Δ_a	$= 9.999086627$
log a	$= 6.804698570$	log $\frac{1}{2} V_{a\,c.}$	$= 8.356263292$
log sen $\frac{1}{2} V_{a\,c.}$	$= 8.356263292$	log sec $\psi_{a\,c.}$	$= 0.000145670$
log cos $\psi_{a\,c.}$	$= 9.999854330$	log sen μ	$= 8.355495589$
log sen $K_{a\,c.}$	$= 5.461846167$	μ	$= 1°\ 17'\ 56'',\ 9$
$K_{a\,c.}$	$= 289631^{m}8$	log cos μ	$= 9.999888365$

log Δ_c	$= 9.999120128$
log sen $\frac{1}{2} V_{a\,c.}$	$= 8.356263292$
log sec $\psi_{a\,c.}$	$= 0.000145670$
log sen μ'	$= 8.355529090$
μ'	$= 1°\ 17'\ 57'',\ 3$
log cos μ'	$= 9.999888347$

log a	$= 6.804698570$	log a	$= 6.804698570$
log cos U_c	$= 9.803315397$	los cos U_a	$= 9.790739998$
log sen ω	$= 7.793859375$	log sen ω	$= 8.793859375$
comp log K	$= 4.538153833$	comp log K	$= 4.538153833$
comp log cos μ	$= 0.000111635$	comp log μ'	$= 0.000111653$
log sen α	$= 9.940138810$	log sen α'	$= 9,927563429$
α	$= 60°36'11'',83$	α'	$= 57°49'10'',87$
a z A C	$= 119\ 23\ 48\ .\ 17$	a z C A	$= 302\ 10\ 49\ \ 13$
log 2	$= 0.301029975$	log Δ_b	$= 9.999058881$
log a	$= 6.804698570$	log sen $\frac{1}{2} V_{b\,c}$	$= 8.421722642$
log sen $\frac{1}{2} V_{c\,b.}$	$= 8.421722642$	log sec $\psi_{b\,c.}$	$= 0.000370184$
log cos $\psi_{c\,b.}$	$= 9.999629816$	log sen μ	$= 8.421151707$
log $K_{c\,b.}$	$= 5.527021003$	μ	$= 1°\ 30'\ 40'',\ 4$
$K_{c\,b.}$	$= 336574^{m}3$	log cos μ	$= 9.999848920$

log Δ_c	$= 9.999120128$
log sen $\frac{1}{2} V_{b\,c.}$	$= 8.421722642$
log sec $\psi_{b\,c.}$	$= 0.000370184$
log sen μ'	$= 8.421212954$
μ'	$= 1°\ 30'\ 41'',\ 1$
log cos μ'	$= 9.999848870$

log a	= 6,804698570	log a	= 6,804698570
log cos U_c	= 9,803315397	log cos U_b	= 9,779732744
log sen ω	= 8,699073358	log sen ω	= 8,699073358
comp log K	= 4,472918997	comp log K	= 4,472918997
comp log cos μ	= 0,000151080	comp log cos μ'	= 0,000151130
log sen α	= 9,780157402	log sen α'	= 9,756574799
α	= 37° 04' 8".83	α'	= 34° 48' 51".71
Az B C	= 142 55 51. 17	Az C B	= 325 11 08. 29

Los ángulos se deducen de los azimutes

A = 98° 44' 15"40
B = 58 17 01 64
C = 23 00 19 16
A+B+C = 180 01 36 20

Calculemos por último los desarrollos de los arcos, aplicando la fórmula (16); empezando por calcular los radios de curvatura medios por la fórmula

$$\frac{1}{R_b} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a(\nabla\nabla')^{\frac{3}{2}}}(1 - e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

Pero tenemos

$$\nabla = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\triangle}, \quad \nabla' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\triangle'},$$

luego

$$(\nabla\nabla')^{\frac{3}{2}} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(\triangle\ \triangle')^{\frac{3}{2}}}$$

y sustituyendo

$$\frac{1}{R_0} = \frac{(\triangle\ \triangle')^{\frac{3}{2}}}{a\,(1-e^2)}\ (1 - e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

Lado A. B—

log e^2	= 7,830502570	1—0,00032141	= 0,99967859
log $\cos^2 \mu$	= 9,581479996	log 0,99967859	= 9,999860369
log $\operatorname{sen}^2 \alpha$	= 9,095074468	$\frac{3}{2}$ log $\triangle_a$	= 9,998629942
	6,507057034	$\frac{3}{2}$ log $\triangle_{b2}$	= 9,998588320
	0,00032141	log $(\triangle_a \triangle_b)^{\frac{3}{2}}$	= 9,997218262

log $(\triangle\ \triangle')^{\frac{3}{2}}$	= 9,997218262	log K^3	= 5,3716468
log (1—$e^2 \cos^2 u \operatorname{sen}^2$)	= 9,999860369	log $\left(\frac{1}{R_0}\right)^2$	= 6,3906593
comp log a	= 3,195301430	comp log 24	= 8,6197888
comp log (1—e^2)	= 0,002949603		0,3820949
log $\left(\frac{1}{R_0}\right)$	= 3,195329664		

$$\frac{K^3}{24\,R_0} = 2^m41$$

log K^5	= 5,61941
log 3	= 0,47712
log $\left(\frac{1}{R_0}\right)^4$	= 2,78132
log $\frac{1}{640}$	= 7,19382
	6,07167

$$\frac{3\,K}{640\ R_0^4} = 0{,}0001$$

Diferencia entre el lado A B desarrollado y su cuerda, ó sea

$$s - K = 2^m41$$

De igual manera se continúa el cálculo sin dificultad.

Dimensiones del elipsoide y determinación de sus elementos.— Determinación de las medidas del elipsoide.

LONGITUD DE UN ARCO DE MERIDIANO.

El radio de curvatura R cambia lentamente con φ, de tal modo que para arcos poco diferentes de un grado puede escribirse:

$$d\,s = R \,\triangle\, \varphi \text{ sen } 1'' \qquad \text{......................} \quad (1)$$

$\triangle\,\varphi$ estando expresados en segundos y R debiendo corresponder á la latitud media.

Para grandes arcos, debemos escribir

$$\int d\,s = \int R\, d\,\varphi; \text{ y poniendo por R su valor}$$

$$\int d\,s = a\,(1-e^2) \int (1 - e^2 \text{ sen}^2\,\varphi)^{-\frac{3}{2}}\, d\,\varphi$$

Desarrollando en serie, tendremos

$$s = a\,(1-e^2) \int (1 + \tfrac{3}{2} e^2 \text{sen}^2\,\varphi + \tfrac{15}{8} e^4 \text{sen}^4 + \varphi \tfrac{35}{16} e^6 \text{sen}^6\,\varphi + \ldots)\, d\,\varphi$$

La trigonometría nos da las siguientes fórmulas:

$$\text{sen}^2\,\varphi = \tfrac{1}{2}\,(\,1 - \cos 2\,\varphi$$

$$\text{sen}^4\,\varphi = \tfrac{1}{8}\,(\,3 - 4 \cos 2\,\varphi + \cos 4\,\varphi\,)$$

$$\text{sen}^6\,\varphi = \tfrac{1}{32}\,(10 - 15 \cos 2\,\varphi + 6 \cos 4\,\varphi - \cos 6\,\varphi),$$

que por substitución tendremos:

$$s = a\,(1 - e^2) \int (1 + \tfrac{3}{4} e^2 - \tfrac{3}{4} e^2 \cos 2\,\varphi + \tfrac{45}{64} e^4 -$$

$$-\tfrac{15}{16} e^4 \cos 2\,\varphi + \tfrac{15}{64} e^4 \cos 4\,\varphi + \tfrac{350}{512} e^6 - \tfrac{525}{512} e^6 \cos 2\,\varphi +$$

$$+ \tfrac{210}{512} e^6 \cos 4\,\varphi - \tfrac{35}{512} e^6 \cos 6\,\varphi)\, d\,\varphi$$

Si hacemos

$$A = 1 + \tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4 + \tfrac{175}{256} e^6 + \ldots = 1{,}0051093;\ \text{lg.} = 0{,}0022133$$

$$B = \quad \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{15}{16} e^4 + \tfrac{525}{512} e^6 + \ldots = 0{,}0051202;\ \text{lg.} = 7{,}709287$$

$$C = \quad \tfrac{15}{64} e^4 + \tfrac{105}{256} e^6 + \ldots = 0{,}0000108;\ \text{lg.} = 5{,}03342$$

$$D = \quad \tfrac{35}{512} e^6 + \ldots \qquad \text{lg.} = 2{,}326$$

tendremos

$$s = a\,(1-e^2) \int_{\varphi'}^{\varphi''} (A - B \cos 2\,\varphi + C \cos 4\,\varphi - D \cos 6\,\varphi \ldots)\, d\,\varphi$$

Integrando entre los límites indicados

$$s = a\,(1-e^2) \Big[A\,(\varphi'' - \varphi') - \tfrac{1}{2}\, B\,(\text{sen } 2\,\varphi'' - \text{sen } 2\,\varphi') +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\, C\,(\text{sen } 4\,\varphi'' - \text{sen } 4\,\varphi') - \tfrac{1}{6}\, D\,(\text{sen } 6\,\varphi'' - \text{sen } 6\,\varphi') \ldots\ldots \Big];$$

ó bien

$$s = a\,(1-e^2) \Big[A\,(\varphi'' - \varphi') - B \text{ sen } (\varphi'' - \varphi') \cos (\varphi'' + \varphi') +$$

$$+ \tfrac{1}{2} C \text{ sen } 2\,(\varphi'' - \varphi') \cos 2\,(\varphi'' + \varphi') - \tfrac{1}{3} \text{ sen } 3\,(\varphi'' - \varphi') \cos 3\,(\varphi'' + \varphi') \ldots \Big].$$

Hagamos $\varphi'' - \varphi' = \triangle\,\varphi$, $\varphi'' + \varphi' = \varphi$, con lo que $s = a\,(1-e^2)$

$$\Big[A\,\triangle\,\varphi - B \text{ sen } \triangle\,\varphi \cos \varphi + \tfrac{1}{2} C \text{ sen } 2\,\triangle\,\varphi \cos 2\,\varphi - \tfrac{1}{3} D \text{ sen } 3\,\triangle\,\varphi \cos 3\,\varphi \ldots \Big] \ldots (2)$$

Si se sustituyen las constantes para el elipsoide de Clarke, $s = (1.4895369)\,\triangle\,\varphi'' - (4.511036) \text{ sen } \triangle\,\varphi \cos \varphi + (1.53414) \text{ sen } 2\,\triangle \cos 2\,\varphi - (8.651) \text{ sen } 3\,\triangle\,\varphi \cos 3\,\varphi$ .... (3) en la que *s* expresa metros, $\triangle\,\varphi$ segundos y los números entre paréntesis son los logaritmos de los factores constantes; la ecuación siendo correcta para siete cifras decimales.

EJEMPLO.

Encontrar la distancia meridiana entre los paralelos

$$32^\circ\ 15'\ 40''21 \text{ y } 36^\circ\ 44'\ 12''62$$

$$\Delta\varphi=\varphi''-\varphi'=\ 4^\circ\ 28'\ 32''.41=16112''41$$

$$\varphi=\varphi''+\varphi'=68\ \ 59\ \ 52.\ 83$$

$$2\Delta\varphi=\ 8\ \ 57\ \ 04 \qquad 2\,\varphi=137^\circ\ 59'\ 45''$$

$$3\Delta\varphi=13\ \ 25 \qquad 3\,\varphi=206\ \ 59$$

	(1.4895369)		− (4.511036)
$\log\Delta\varphi''=$	4.2071606	$\log \operatorname{sen}\Delta\varphi=$	8.892293
log 1º término =	5.6966975	$\log\cos\varphi=$	9.554369
1º término =	497390ᵐ57	log 2º término =	2.957698 n
		2º término =	−907ᵐ19

	+ (1.53414)		− (8.651)
$\log \operatorname{sen} 2\Delta\varphi=$	9.19200	$\log \operatorname{sen} 3\Delta\varphi=$	9.366
$\log\cos 2\varphi=$	9.87104 n	$\log\cos 3\varphi=$	9.949 n
log 3º término =	0.59718 n	log 4º término =	7.966
3º término =	−3.96	4º término =	+0.009

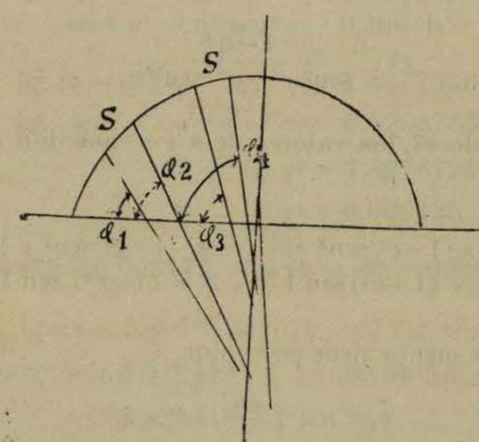
Haciendo la suma

$$s=496479^{m}43$$

Determinación de los elementos del elipsoide.

Los arcos pueden estar medidos en el mismo meridiano ó en diferentes, si se supone la Tierra un elipsoide de revolución. Los datos obtenidos son el arco s medido y las latitudes de sus extremos determinadas.

Supongamos medidos los arcos s y s' de la figura y sus latitudes extremas; y hagamos:



$$\varphi_2-{}_1\varphi=\Delta\varphi;\ \tfrac{1}{2}(\varphi_2+{}_1)\varphi=\varphi$$

$$\varphi_4-\varphi_3=\Delta\varphi';\ \tfrac{1}{2}({}_4+\varphi=\varphi_3)\varphi'$$

En caso de arcos pequeños, que no pasen de 2 á 3 grados, podemos poner simplemente:

$$s=\Delta\varphi\ R \operatorname{sen} 1'';\ \ s'=\Delta\varphi'\ R' \operatorname{sen} 1'';$$

de donde

$$\frac{s\,\Delta\varphi'}{s'\Delta\varphi}=\frac{R}{R'}$$

Hemos encontrado que el radio de curvatura en el meridiano es

$$R=\frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

luego sustituyendo

$$\left(\frac{s\;\triangle\;\varphi'}{s'\;\triangle\;\varphi}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1-e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi'}{1-e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi}=q^2,$$

representando por esta cantidad el primer miembro que es conocido, y despejando

$$e^2=\frac{1-q^2}{\mathrm{sen}^2\;\varphi'-q^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi}.$$

Conociendo e^2, los valores de s y s' nos dan el semieje mayor

$$a=\frac{s\,(1-e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\triangle\varphi\;(1-e^2)\,\mathrm{sen}\;1''}=\frac{s'\;(1-e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi')^{\frac{3}{2}}}{\triangle\;\varphi'\;(1-e^2)\;\mathrm{sen}\;1''}\;............$$

El semieje menor tiene por valor

$$c=a\,\sqrt{1-e^2}............$$

EJEMPLO.

$$\text{Arco francés}\begin{cases}\text{Formentera.}\varphi_1=38°39'56.''1\\ \text{Barcelona....}\varphi_2=41\;\;22\;\;47.\;\;9\end{cases}s=301354\text{ mts.}$$

$$\text{Arco sueco...}\begin{cases}\text{Malörn........}\varphi_3=65°31'30.''3\\ \text{Pahtawara.}\varphi_4=67\;\;08\;\;49.\;\;8\end{cases}s'=180828$$

$$\triangle\varphi=2°\;42'\;51''\;8;\;\tfrac{1}{2}\,(\varphi_1+\varphi_2)=\varphi=40°\;01'\;22''.0$$

$$\triangle\varphi'=1\;\;37\;\;19\;\;5;\;\tfrac{1}{2}\,(\varphi_3+\varphi_4)=\varphi'=66\;\;20\;\;10\,.\,1$$

$$\begin{array}{rlrl}
\mathrm{lg.}\;s & =5.4790770 & \mathrm{lg.\;sen}\;\varphi' & =9.9618556\\
\mathrm{log.}\;\triangle\;\varphi' & =3.7663757 & \mathrm{lg.\;sen}^2\;\varphi' & =9.9237112\\
\mathrm{comp\;lg.}\;s' & =4.7427343 & \mathrm{sen}^2\;\varphi & =0.83890\\
\mathrm{comp\;lg.}\;\triangle\;\varphi & =\underline{6.0100254} & & \\
\tfrac{2}{3}\times & 9.9982124 & \mathrm{lg.\;sen}\;\varphi & =9.8082732\\
\mathrm{lg.}\;q^2 & =9.9988083 & \mathrm{lg.\;sen}^2\;\varphi & =9.6165464\\
q^2 & =0.99726 & \mathrm{lg.}\;q^2 & =\underline{9.9988083}\\
1-q^2 & =0.00274 & \mathrm{lg.}\;q^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi & =9.6153547\\
 & & q^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi & =0.41244
\end{array}$$

$$\mathrm{sen}^2\;\varphi'-q^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi=0.42646.$$

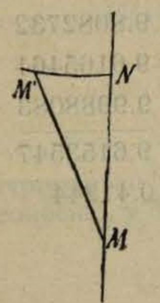
$$\begin{array}{rl}
\mathrm{lg.}\;(1-q^2) & =7.4377506\\
\mathrm{lg.}\;(\mathrm{sen}^2\;\varphi'-q^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi) & =\underline{9.6298783}\\
\mathrm{lg.}\;e^2 & =7.8078723\\
e^2 & =0.006425
\end{array}$$

$$(1-e^2)=0.993575;\;\;\mathrm{lg.}\;(1-e^2)=9.9972007$$

$$\begin{array}{rlrl}
\mathrm{lg.}\;e^2 & =7.8078723 & \mathrm{lg.}\;e^2 & =7.8078723\\
\mathrm{lg\;sen}^2\;\varphi & =\underline{9.6165464} & \mathrm{lg.\;sen}^2\;\varphi' & =\underline{9.9237112}\\
 & 7.4244187 & & 7.7315835\\
e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi & =0.0026572 & e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi' & =0.0053899\\
1-e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi & =0.9973428 & 1-e^2\;\mathrm{sen}^2\;\varphi' & =0.9946101\\
\mathrm{lg.} & =9.9988444 & \mathrm{lg.} & =9.9976528\\
\tfrac{3}{2}\;\mathrm{lg.} & =9.9982666 & \tfrac{3}{2}\;\mathrm{lg.} & =9.9964792\\
\mathrm{lg.}\;s & =5.4790770 & \mathrm{lg.}\;s' & =5.2572657\\
\mathrm{comp\;lg.}\;\triangle\;\varphi & =6.0100254 & \mathrm{comp\;lg.}\;\triangle\;\varphi' & =6.2336243\\
\mathrm{comp\;lg.}\,(1-e^2) & =0.0027993 & \mathrm{comp\;lg.}\,(1-e^2) & =0.0027993\\
\mathrm{comp\,lg.\;sen}\;1'' & =\underline{5.3144251} & \mathrm{comp\,lg.\;sen}\;1'' & =\underline{5.3144251}\\
\mathrm{lg.}\;a & =6.8045934 & \mathrm{lg.}\;a & =6.8045936
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{lg.}\;\frac{c}{a}=\mathrm{lg.}\;\sqrt{1-e^2} & =\;9.9986004\\
\mathrm{lg.}\;a & =\;\underline{6.8045935}\\
\mathrm{lg}\;\;c & =\;6.8031939
\end{array}$$

Reducción de los arcos medidos al meridiano.



Se supone que el arc M M' forma un ángulo pequeño con el meridiano.

En el caso de arcos pequeños se tendrá

$$M\,N = \triangle\,\varphi\ R \text{ sen } 1'';$$

pero al tratar de las coordenadas geodésicas encontramos:

$$-\triangle\,\varphi = \frac{s \cos \alpha}{R \text{ sen } 1''} + \frac{s^2 \text{ sen}^2\,\alpha \text{ tg. } \varphi}{2\,R\,N \text{ sen } 1''} - $$

$$- \frac{s^3 \text{ sen}^2\,\alpha \cos \alpha\,(1 + 3 \text{ tg.}^2\,\alpha)}{6\ R\ N^2 \text{ sen } 1''}$$

Substituyendo, tendremos para la distancia reducida a meridiano, llamada s_m.

$$s_m = -s \cos \alpha - \frac{1}{2N} s^2 \text{ sen}^2 \alpha \text{ tg}\,\varphi + \frac{1}{6N^2} s^3 \text{ sen}^2 \alpha \cos \alpha\,(1+3 \text{ tg}^2\,\varphi),$$

en la que como el 2º y 3º término son muy pequeños, basta un valor aproximado de N.

Por medio de esta fórmula los lados de una triangulación ejecutada á lo largo de un meridiano, podrán proyectarse sobre éste, haciendo conocer su longitud.

Determinación de los elementos en el caso de varios arcos.

Cuando hay varias latitudes determinadas y deben combinarse todas, es necesaria la formación de las ecuaciones de observación entre las latitudes observadas y los arcos de meridiano medidos.

La ecuación (1) es incompleta para grandes arcos, pudiendo encontrarse la corrección necesaria de la manera siguiente:

La ecuación (2) puede escribirse con bastante aproximación para la investigación que va á hacerse.

$$s = a\,(1-e^2)\,[(1+\tfrac{3}{4}\,e^2)\,\triangle\,\varphi - \tfrac{3}{4}\,e^2 \text{ sen } \triangle\,\varphi \cos \varphi],$$

en la que $\varphi = \varphi'' + \varphi' = 2\,\varphi'$ sin inconveniente alguno, dado que $\cos \varphi$ está multiplicado por cantidades muy pequeñas.

Según lo anterior y quitando el exponente para comodidad, tendremos:

$$s = a\,(1-e^2)\ [(1+\tfrac{3}{4}\,e^2)\,\triangle\,\varphi - \tfrac{3}{4}\,e^2 \text{ sen } \triangle\,\varphi \cos 2\,\varphi']$$

Podemos poner

$$\text{sen } \triangle\,\varphi = \triangle\,\varphi - \tfrac{1}{6}\,(\triangle\,\varphi)^3,$$

con lo que

$$s = a\,(1-e^2)\,\triangle\varphi\,(1+\tfrac{3}{4}e^2 - \tfrac{3}{4}e^2 \cos 2\,\varphi + \tfrac{1}{8}e^2\,(\triangle\varphi)^2 \cos 2\,\varphi) \ldots\ldots (4)$$

El valor incompleto es

$$s_1 = \triangle\,\varphi\,R = a\,(1-e^2)\,\triangle\,\varphi\,(1+\tfrac{3}{3}\,e^2 \text{ sen}^2\,\varphi) =$$
$$= a\,(1-e^2)\,\triangle\,\varphi\,(1+\tfrac{3}{4}\,e^2 - \tfrac{3}{4}\,e^2 \cos 2\,\varphi) \ldots\ldots\ldots (5)$$

Si hacemos $s - s_1 = \delta\,s$, tendremos:

$$s - s_1 = \delta\,s = a\,\triangle\,\varphi\,(1-e^2)\,\tfrac{1}{8}\,e^2\,(\triangle\,\varphi)^2 \cos 2\,\varphi;$$

y expresando $\triangle\varphi$ en segundos, limitándose á la 2ª potencia de e

$$s - s_1 = \delta\,s = \tfrac{1}{8}\,a\,e^2\,(\triangle\,\varphi'' \text{ sen } 1'')^3 \cos 2\,\varphi \ldots\ldots\ldots (6)$$

La corrección es tan pequeña que para $\triangle\varphi = 1°$ á la latitud de 0° es -0^m028; $+0^m014$ á la latitud de 30°; 0.00 para $\varphi = 45$; $+0^m014$ para $\varphi = 60°$ y $+0^m028$ en el polo.

Entre dos latitudes ϑ_2 y ϑ_1, con el término correctivo anterior, podemos poner:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{R \text{ sen } 1''} - \frac{\delta\,s}{R \text{ sen } 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

en la que

$$\frac{1}{R} = \frac{(1-e^2 \text{ sen}^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a\,(1-e^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$