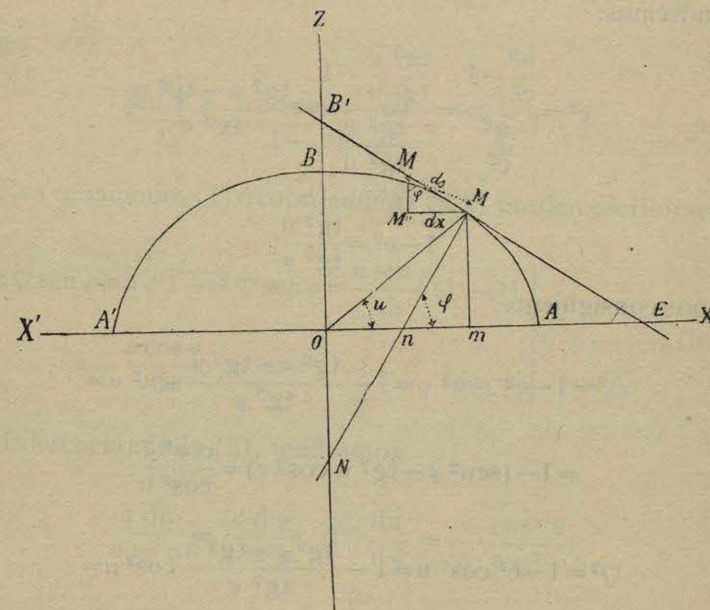
Tabla de los valores de log $\frac{1}{\cos \frac{1}{2} d}$

d	$\log \frac{1}{\cos \frac{1}{2} d}$	d	$\log \frac{1}{\cos \frac{1}{2} d}$	d	$\log \frac{1}{\cos \frac{1}{2} d}$	d	$\log \frac{1}{\cos \frac{1}{2} d}$	d	$\log \frac{1}{\cos \frac{1}{2} d}$
10′	0.000000	28′	0.000004	46′	0.000019	64′	0.000019	82′	0.000031
11	1	29	4	47	10	65	19	83	32
12	1	30	4	48	11	66	20	84	32
13	1	31	4	49	11	67	21	85	33
14	1	32	5	50	11	68	21	86	34
15	1	33	5	51	12	69	22	87	35
16	1	34	5	52	12	70	22	88	36
17	1	35	6	53	13	71	23	89	36
18	1	36	6	54	13	72	24	90	37
19	2	37	6	55	14	73	24	91	38
20	2	38	7	56	14	74	25	92	39
21	2	39	7	57	15	75	26	93	40
22	2	40	7	58	15	76	26	94	41
23	2	41	8	59	16	77	27	95	41
24	3	42	8	60	16	78	28	96	42
25	3	43	8	61	17	79	29	97	43
26	3	44	9	62	18	80	29	98	44
27	3	45	9	63	18	81	30	99	45

Corrección por la difernecia entre el arco y la tangente.

Latitud	Log. F.
15°	7.675
16	.698
17	.719
18	.738
19	.756
20	.772
21	.787
22	.800
23	.812
24	.823
25	.832
26	.841
27	.849
28	.855
29	.861
30	.866
31	.870
32	873
33	.875

Distancias, Azimutes y Triángulos en un Esferoide.



Supongamos que la Tierra es un elipsoide de revolución, engendrado por la elipse A' B M A, girando alrededor del eje de las Z, cuyos semi-ejes sean o A=a, o B=c.

La latitud de un punto cualquiera M es el ángulo M n A=φ, y al ángulo M O A=u se le llama la latitud reducida.

La ecuación de la curva meridiana es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ecuación que se satisface con los valores:

$$x=a \cos u, \quad z=c \operatorname{sen} u \text{..........................} (1)$$

Diferenciando estas ecuaciones, y atendiendo al triángulo infinitesimal M M' M'', tendremos:

$$\left.\begin{aligned} -dx&=a \operatorname{sen} u\, d\, u=\operatorname{sen} \varphi\, d\, s \\ dz&=c \cos u\, d\, u=\cos \varphi\, d\, s \end{aligned}\right\} \text{..................} (2)$$

deduciéndose:

$$a \operatorname{tg} u=c \operatorname{tg} \varphi \text{................................} (3)$$

Designando por e la excentricidad del meridiano, es decir: la cantidad que satisface la ecuación $a^2 e^2 = a^2 - c^2$ y poniendo,

$$\triangle^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi, \quad \nabla^2 = 1 - e^2 \cos^2 u \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

tendremos:

$$e^2 = \frac{\frac{a^2}{c^2} - 1}{\frac{a^2}{c^2}} = \frac{\frac{tg^2\,\varphi}{tg^2\,u} - 1}{\frac{tg^2\,\varphi}{tg^2\,u}} = \frac{tg^2\,\varphi - tg^2\,u}{tg^2\,\varphi};$$

$$1 - e^2 = \frac{tg^2\,u}{tg^2\,\varphi};$$

y por consiguiente:

$$\triangle^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - \frac{tg^2\,\varphi - tg^2\,u}{tg^2\,\varphi} \operatorname{sen}^2 \varphi =$$

$$= 1 - (\operatorname{sen}^2 \varphi - tg^2\,u \cos^2 \varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 u};$$

$$\nabla^2 = 1 - e^2 \cos^2 u = 1 - \frac{tg^2\,\varphi - tg^2\,u}{tg^2\,\varphi} \cos^2 u =$$

$$= 1 - \left(\cos^2 u - \frac{\operatorname{sen}^2 u}{tg^2\,\varphi}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

De las anteriores ecuaciones se deduce:

$$\left.\begin{aligned} \triangle \nabla &= \sqrt{1 - e^2} \\ \nabla \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen} u \\ \cos \varphi &= \triangle \cos u \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Multiplicando correlativamente las dos últimas, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{\triangle} = \frac{\operatorname{sen} 2\,u}{\nabla};$$

y multiplicándolas en cruz:

$$\nabla \triangle \operatorname{sen} \varphi \cos u = \operatorname{sen} u \cos \varphi; \text{ ó}$$

$$\operatorname{sen} \varphi \cos u\,(1 - \sqrt{1 - e^2}) = \operatorname{sen}(\varphi - u);$$

de donde:

$$2 \operatorname{sen} \varphi \cos u = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - u)}{1 - \sqrt{1 - e^2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \cos u \frac{\cos \varphi}{\cos u}}{\triangle} = \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{\triangle},$$

luego:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi}{\triangle} = \frac{2 \operatorname{sen}(\varphi - u)}{1 - \sqrt{1 - e^2}} = \frac{\operatorname{sen} 2\,u}{\triangle} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

Las ecuaciones (1) ó coordenadas (x, z) pueden escribirse:

$$\left.\begin{aligned} z &= c \nabla \operatorname{sen} \varphi = a \sqrt{1 - e^2}\, \nabla \operatorname{sen} \varphi = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\triangle}(1 - e^2) \\ x &= \frac{a \cos \varphi}{\triangle} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Diferenciando la (3), tendremos:

$$\frac{a\,du}{\cos^2 u} = \frac{c\,d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \text{ ó } \frac{du}{d\varphi} = \frac{c}{a} \frac{\cos^2 u}{\cos^2 \varphi};$$

pero según la (2):

$$\frac{ds}{du} = \frac{c \cos u}{\cos \varphi},$$

luego, multiplicando

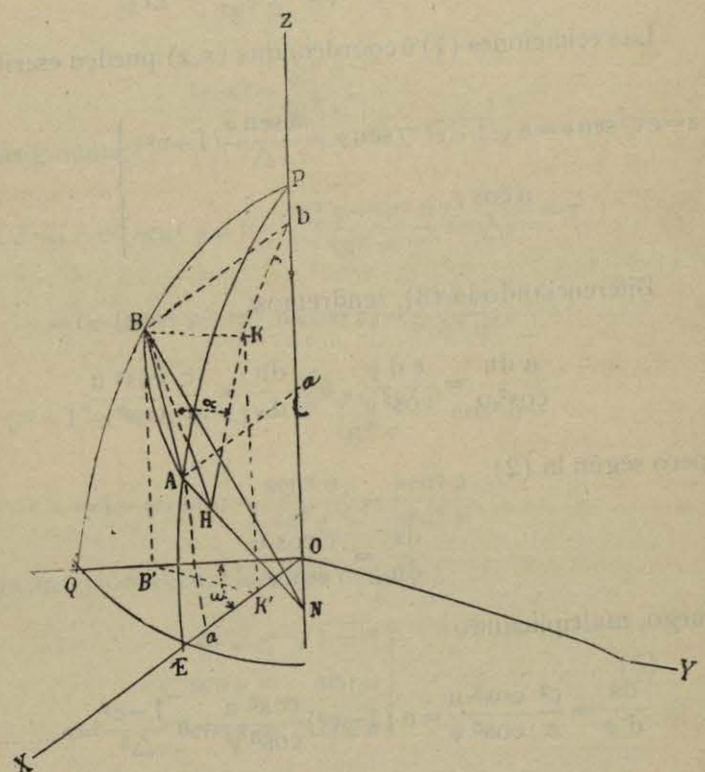
$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{c^2}{a} \frac{\cos^3 u}{\cos^3 \varphi} = a\,(1 - e^2) \frac{\cos^3 u}{\cos^3 \varphi} = a\, \frac{1 - e^2}{\triangle^3} = \rho \ldots\ldots (7)$$

que es el radio de curvatura en el meridiano.

El radio de curvatura en una sección normal al meridiano se confunde con la normal mayor $MN = N$; y como según la figura:

$$\left.\begin{aligned} x &= N \,.\, \cos \varphi \\ N &= \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{a}{\triangle} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Sean O el centro del esferoide, O P el semi-eje polar, E Q el ecuador, A B puntos de los meridianos P A E, P B Q; a, b las proyecciones de A, B sobre el eje, A N la normal mayor de A, B N la intersección del plano A N B con el meridiano de B; K la proyección de B sobre el plano P A E O; B H, K H perpendiculares á N. Designemos por α el azimut de B en A, esto es, la inclinación del plano N A B respecto del plano N A P, y sea: $90° + \mu$ la distancia zenital de B en A, con lo cual $BAN = 90° - \mu$.



Si u, u' son las latitudes reducidas de los puntos A y B y designamos por ω el ángulo de los planos P A E y P B Q, tendremos para las coordenadas de los puntos A (x, y, z) y B (x', y', z'):

$$x = Aa \qquad x' = OK' = OB' \cos \omega$$
$$y = O \qquad y' = B'K' = OB' \operatorname{sen} \omega$$
$$z = OA \qquad z' = Ob$$

y según las ecuaciones (1):

$$x = a \cos u \qquad x' = a \cos u' \cos \omega$$
$$y = o \qquad y' = a \cos u' \operatorname{sen} \omega$$
$$z = c \operatorname{sen} u \qquad z' = c \operatorname{sen} u'$$

Llamando K la cuerda A B, tendremos:

$$K^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Los triángulos rectángulos B H A y B K H, nos dan:

$$AH = K \cos BAH = K \operatorname{sen} \mu;\ HK = BH \cos \alpha = K \cos \mu \cos \alpha.$$

La proyección de la línea quebrada $AH + HK$ sobre el eje de las X es $x - x'$ y sobre el eje de las Z $z' - z$, teniéndose:

$$\left.\begin{array}{l} K(\ \operatorname{sen}\mu\cos\varphi + \cos\mu\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi) = a(\cos u - \cos u'\cos\omega) \\ K(-\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\varphi + \cos\mu\cos\alpha\cos\varphi) = c(\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u) \end{array}\right\} (8)$$

Y puesto que $BK = y' = BH \operatorname{sen} \alpha$

$$K \cos \mu \operatorname{sen} \alpha = a \cos u' \operatorname{sen} \omega \ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

Sustituyendo en la expresión de K los valores de las coordenadas, se tiene:

$$K^2 = (a \cos u' \cos \omega - a \cos u)^2 + a^2 \cos^2 u' \operatorname{sen}^2 \omega + c^2 (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u)^2$$

Desarrollando, poniendo por c^2 su valor $c^2 = a^2 (1 - e^2)$ y haciendo:

$$\Sigma = \operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u,$$

se tiene:

$$\frac{K^2}{a^2} = \cos^2 u' + \cos^2 u - 2 \cos u' \cos u \cos \omega + (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u)^2 - e^2 \Sigma^2;$$

de donde:

$$1 - \frac{K^2}{2a^2} = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u' + \cos u \cos u' \cos \omega + \frac{e^2}{2} \Sigma^2 \ldots\ldots (9)$$

Eliminando en las ecuaciones (8) á sen μ, se tiene:

$$K \cos \mu \cos \alpha = a \operatorname{sen} \varphi (\cos u - \cos u' \cos \omega) + c \cos \varphi\, \Sigma.$$

Poniendo por sen φ y cos φ sus valores en función de u, tendremos:

$$K\cos\mu\cos\alpha = a\,\frac{\operatorname{sen}\mu}{\nabla}\,(\cos u-\cos u'\cos\omega)+c\triangle\cos u\,\Sigma;$$

de donde:

$$\nabla\frac{K}{a}\cos\mu\cos\alpha=\operatorname{sen}u\cos u-\operatorname{sen}u\cos u'\cos\omega+\cos u\operatorname{sen}u'-$$
$$-\cos u\operatorname{sen}u-e^2\cos u\,\Sigma;\ \text{ó}$$

$$\nabla\frac{K}{a}\cos\mu\cos\alpha=\cos u\operatorname{sen}u'-\operatorname{sen}u\cos u'\cos\omega-e^2\Sigma\cos u\ldots(9)$$

Eliminando en las mismas ecuaciones (8) á cos μ, tendremos:

$$K\operatorname{sen}\mu=a\cos\varphi\,(\cos u-\cos u'\cos\omega)-c\operatorname{sen}\varphi\,\Sigma;$$

ó bien:

$$K\operatorname{sen}\mu=a\triangle\cos u\,(\cos u-\cos u'\cos\omega)-\frac{c\operatorname{sen}u}{\nabla}\,\Sigma;$$

de donde:

$$\nabla K\operatorname{sen}\mu=c\,(\cos^2 u-\cos u\cos u'\cos\omega)-c\operatorname{sen}u\,(\operatorname{sen}u'-\operatorname{sen}u)\ \text{ó}$$

$$\nabla\frac{K}{c}\operatorname{sen}\mu=1-\operatorname{sen}u\operatorname{sen}u'-\cos u\cos u'\cos\omega\ldots\ldots(9)$$

Reunamos las (8') y (9) en un solo grupo:

$$\left.\begin{aligned}
&1-\frac{K^2}{2a^2}=\operatorname{sen}u\operatorname{sen}u'+\cos u\cos u'\cos\omega+\frac{e^2}{2}\Sigma^2\\
&\nabla\frac{K}{a}\cos\mu\cos\alpha=\cos u\operatorname{sen}u'-\operatorname{sen}u\cos u'\cos\omega-e^2\Sigma\cos u\\
&\frac{K}{a}\cos\mu\operatorname{sen}\alpha=\cos u'\operatorname{sen}\omega\\
&\nabla\frac{K}{c}\operatorname{sen}\mu=1-\operatorname{sen}u\operatorname{sen}u'-\cos u\cos u'\cos\omega
\end{aligned}\right\}(9)$$

Las tres primeras son análogas á las ecuaciones fundamentales de la Trigonometría esférica.

Si designamos por v el lado de un triángulo esférico, y los otros dos lados por 90—u y 90—u', formando un ángulo ω, tendremos:

$$\cos v=\operatorname{sen}u\operatorname{sen}u'+\cos u\cos u'\cos\omega=1-2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}v.$$

Según esta ecuación, la primera de las (9), queda:

$$1-\frac{K^2}{2a^2}=1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}v+\frac{e^2}{2}(\operatorname{sen}u'-\operatorname{sen}u)^2;$$

de donde:

$$\frac{K^2}{2a^2}=2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}v-2e^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(u'-u)\cos^2\frac{1}{2}(u'+u)$$

y haciendo:

$$\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\frac{v}{2}=e\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'+u),$$

y sustituyendo, tendremos:

$$K=2a\operatorname{sen}\frac{1}{2}v\cos\psi\ldots\ldots(10)$$

$$\nabla\frac{K}{c}\operatorname{sen}\mu=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}v;$$

de donde:

$$\operatorname{sen}\mu=\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}v}{\nabla\frac{K}{c}}=\triangle\operatorname{sen}\frac{1}{2}v\sec\psi\ldots\ldots(10)$$

y por simetría:

$$\operatorname{sen}\mu'=\triangle'\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\sec\psi\ldots\ldots(10)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\mu=\frac{a}{K}\cos u'\operatorname{sen}\omega\ldots\ldots(10)$$

y por simetría:

$$\operatorname{sen}\alpha'\cos\mu' = \frac{a}{K}\cos u \operatorname{sen}\omega \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Reunamos en un solo grupo las ecuaciones (10):

$$\left.\begin{aligned} K &= 2a \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\cos\psi \\ \operatorname{sen}\mu &= \triangle \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\sec\psi \\ \operatorname{sen}\mu' &= \triangle' \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}v\sec\psi \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\mu &= \tfrac{a}{K}\cos u'\operatorname{sen}\omega \\ \operatorname{sen}\alpha'\cos\mu' &= \tfrac{a}{K}\cos u\operatorname{sen}\omega \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Estas ecuaciones dan la distancia entre dos puntos del esferoide, sus recíprocos azimutes y sus distancias zenitales.

Si dividimos la segunda ecuación (9) por la tercera, resultará:

$$\nabla \cot\alpha\cos u'\operatorname{sen}\omega = \cos u\operatorname{sen}u' - \operatorname{sen}u\cos u'\cos\omega - e^2\Sigma\cos u.$$

Poniendo por u, u' sus equivalentes en φ y φ', tendremos:

$$\nabla\cot\alpha\frac{\cos\varphi'}{\triangle'}\operatorname{sen}\omega = \frac{\cos\varphi}{\triangle}\nabla'\operatorname{sen}\varphi' - \nabla\operatorname{sen}\varphi\frac{\cos\varphi'}{\triangle'}\cos\omega -$$

$$-e^2\frac{\cos\varphi}{\triangle}(\nabla'\operatorname{sen}\varphi' - \nabla\operatorname{sen}\varphi)\ \text{ó}$$

$$\cot\alpha\cos\varphi'\operatorname{sen}\omega = \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi'\frac{\triangle'\ \nabla'}{\triangle\ \nabla} - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi'\cos\omega -$$

$$-\frac{e^2\cos\varphi}{\triangle}\left(\frac{\triangle'\ \nabla'}{\nabla}\operatorname{sen}\varphi' - \frac{\nabla\ \triangle'}{\nabla}\operatorname{sen}\varphi\right);$$

y puesto que:

$$\triangle'\ \nabla' = \triangle\ \nabla$$

$$\cot\alpha\cos\varphi'\operatorname{sen}\omega = \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi' - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi'\cos\omega - \frac{e^2\cos\varphi}{\triangle}\times$$

$$\times(\triangle\operatorname{sen}\varphi' - \triangle'\operatorname{sen}\varphi).$$

En el caso de una esfera, e=o y $\triangle$ ó $\nabla=1$, y llamando β el valor en que se convierte el azimut α, tendremos:

$$\cot\beta\cos\varphi'\operatorname{sen}\omega = \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi' - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi'\cos\omega;$$

deduciéndose de estas dos fórmulas

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{e^2\cos\varphi}{\triangle\cos\varphi'}\left[\frac{\triangle'\operatorname{sen}\varphi - \triangle\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\omega}\right].$$

Y de igual modo, para los azimutes α' y β'

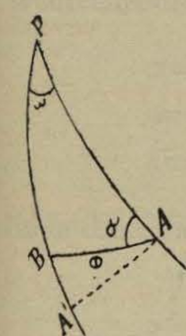
$$-\cot\alpha' + \cot\beta' = \frac{e^2\cos\varphi'}{\triangle'\cos\varphi}\left[\frac{\triangle'\operatorname{sen}\varphi - \triangle\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\omega}\right],$$

que nos dan la diferencia entre los azimutes en un esferoide y los correspondientes en una esfera.

Fácilmente, de una manera aproximada, podemos encontrar la diferencia entre los dos azimutes, de la manera siguiente, en las distancias comunes en geodesia:

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{e^2\cos\varphi\ 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\varphi'\operatorname{sen}\omega} =$$

$$= \frac{e^2\cos\varphi\,(\varphi-\varphi')\cos\varphi}{\cos\varphi'\operatorname{sen}\omega}.$$



Según la figura adjunta, tenemos:

$$\operatorname{sen}(\varphi'-\varphi) = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha;\ \text{ó}\ \varphi'-\varphi = \theta\cos\alpha$$

$$\text{y}\ \operatorname{sen}\omega\cos\varphi' = \theta\operatorname{sen}\alpha;$$

luego:

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = -\frac{e^2\cos^2\varphi\,\theta\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha^2}{\theta\operatorname{sen}\alpha};\ \text{ó}$$

$$\beta - \alpha = -\frac{e^2}{2}\,\frac{\cos^2\varphi\operatorname{sen}2\alpha.}{\operatorname{sen}1''}$$

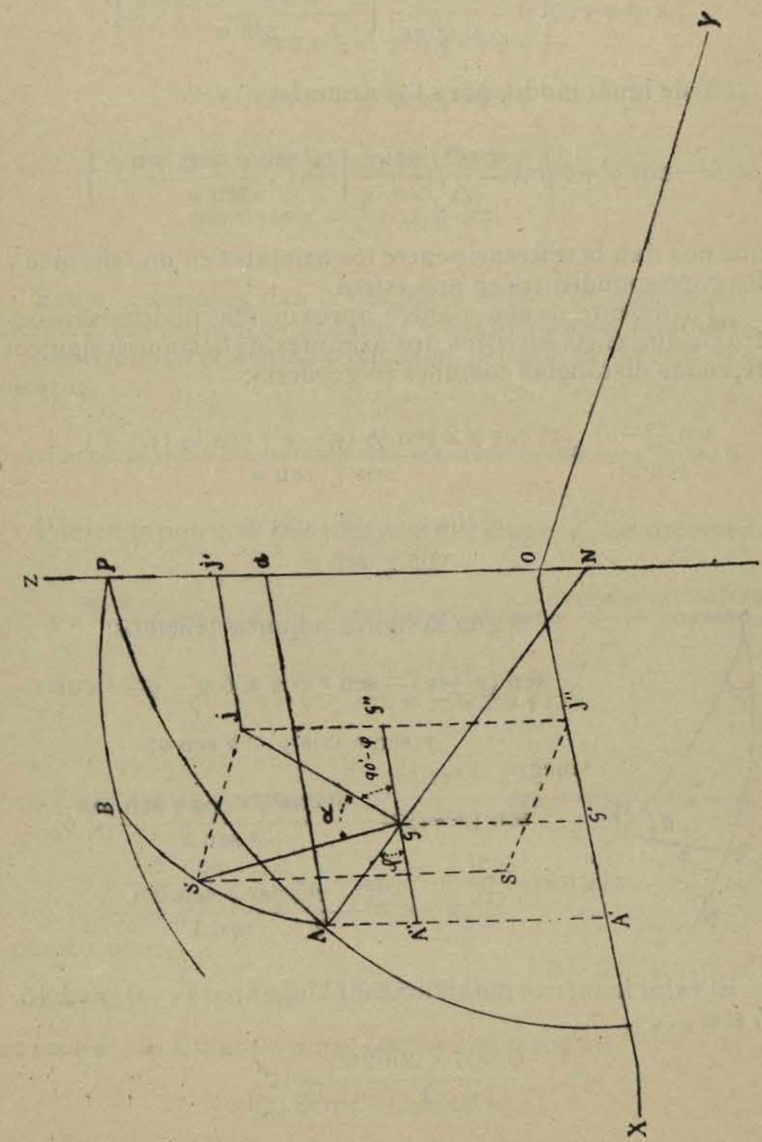
El valor numérico máximo tendrá lugar para $\varphi=0°$ y $\alpha=45°$ ó sea

$$\frac{0.007\times 206265}{2} = 12'$$

La figura adjunta nos representa un elipsoide de revolución cuya ecuación es:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c}=1;$$

A P, B P dos secciones meridianas y A B una curva, de una sección oblicua, cuya ecuación se trata de encontrar.



Sea S un punto cualquiera de la curva de coordenadas (x, y, z); si bajamos S G normal á A N $=\rho$, y hacemos A G $=\zeta$, S G $=\xi$, valores que fijan la posición de S, tendremos según la figura:

$$x=OJ''=OA'-A'G'-G'J''$$
$$y=SJ$$
$$z=SS'=JJ''=JG''+G''J''=JG''+AA'-AA''.$$

Las coordenadas del punto A son:

$$x_1=OA'=\frac{a}{\Delta}\cos\varphi=\rho\cos\varphi$$
$$y_1=0$$
$$z_1=AA'=\rho\,(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi;$$

y como:

$$A'G'=AG\cos\varphi=\zeta\cos\varphi,$$
$$G'J''=GJ\operatorname{sen}\varphi=\xi\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi,$$
$$JG''=\xi\cos\alpha\cos\varphi,$$
$$AA''=\zeta\operatorname{sen}\varphi,$$

tendremos sustituyendo:

$$x=(\rho-\zeta)\cos\varphi-\xi\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi$$
$$y=\xi\operatorname{sen}\alpha$$
$$z=[\rho\,(1-e^2)-\zeta]\operatorname{sen}\varphi+\xi\cos\alpha\cos\varphi$$

En la ecuación del elipsoide pongamos por a su valor, ó sea:

$$a^2=\frac{c^2}{1-e^2}$$

con lo que quedará:

$$(1-e^2)\,(x^2+y^2)+z^2=c^2=a^2\,(1-e^2)=\rho^2\,\Delta^2\,(1-e^2)=$$
$$=\rho^2\,(1-e^2)\,(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi).$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de (x, y, z), tendremos:

$$\xi^2\left[\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{sen}^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{1-e^2}\right]+\zeta^2\left[\cos^2\varphi+\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{1-e^2}\right]-$$

$$-2\,\zeta\,\xi\cos\alpha\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{e^2}{1-e^2}-2\,\rho\,\zeta=o;$$

de donde:

$$\xi^2\left[1+\frac{e^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{1-e^2}\right]+\zeta^2\left[1+\frac{e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}{1-e^2}\right]-$$

$$-2\,\zeta\,\xi\cos\alpha\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{e^2}{1-e^2}-2\,\rho\,\zeta=o.$$

Si hacemos:

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{e\cos\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2}},\ y\\ f&=\frac{e\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\sqrt{1-e^2}},\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

tendremos:

$$\xi^2\,(1+h^2)+\zeta^2\,(1+f^2)-2\,h\,f\,\zeta\,\xi-2\,\rho\,\zeta=o\ldots\ldots(14)$$

Tal es la ecuación de la curva en función de las coordenadas ζ y ξ.

De la (14) se deduce el radio de curvatura de la sección vertical en A, puesto que tal radio es el límite de la razón de $\frac{\xi^2}{2\zeta}$ cuando estas cantidades se desvanecen.

En efecto, supongamos que una superficie referida á tres ejes rectangulares esté representada por la ecuación:

$$z=f\,(x\,y),$$

y que se pueda aplicar la serie de Maclaurin al desarrollo de esta ecuación; se tendrá como es sabido:

$$z=f\,(x\,y)_0+\left(\frac{df}{dx}\right)_0x+\left(\frac{df}{dy}\right)_0y+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{2}+\left(\frac{d^2f}{dx\ dy}\right)_0xy+$$

$$+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0\frac{y^2}{2}+\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0\frac{x^3}{2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

el índice cero indicando que en la función y en las derivadas se ha hecho:

$$x=o\ ,\ y=o.$$

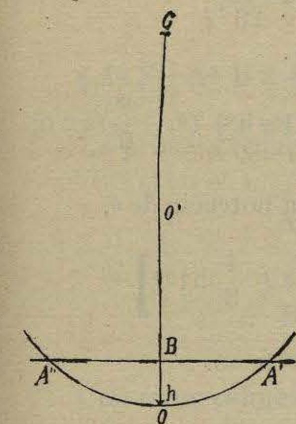
Si la superficie pasa por el origen, tangencialmente al plano de las (x y), y que se elija la dirección del eje de las x, de manera de hacer desaparecer el término en x y, la ecuación se reducirá á:

$$z=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{2}+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0\frac{y^2}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si cortamos la superficie por un plano paralelo al de las (x y) y situado á la altura de h (infinitamente pequeño de segundo orden), la sección tendrá por ecuación, despreciando los términos de orden superior.

$$2\,h=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0x^2+\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0y^2.$$

Esta ecuación será una elipse si la superficie es convexa, porque entonces los coeficientes de x^2 é y^2 serán positivos. Esta elipse infinitamente pequeña ha recibido de M. Dupin el nombre de *indicador;* y el estudio de sus caracteres geométricos indica y determina los de la superficie misma al derredor del punto considerado.



Tiremos por el eje de la Z, es decir, por la normal á la superficie en O, un plano que la corta según la curva A' O A, la intersección de este plano con el plano del indicador, siendo el diámetro A' A=2 ρ. Sea O C=2 r el diámetro del círculo osculador en O, es decir, del círculo que pasa por los tres puntos infinitamente próximos A' O A.

Es evidente que:

$$\overline{BA}^2=(2\,r-h)\,h,$$

ó despreciando h^2 que es de 4º orden,

$$\rho^2=2\,r\ h;$$ por consiguiente:

$r=\frac{\rho^2}{2\,h}$; y si llamamos R el radio de curvatura

$R=\lim\frac{\rho^2}{2\,h}$ ó con nuestras notaciones

$$R=\lim\frac{\xi^2}{2\zeta}=\lim\frac{h\,f\,\xi-\frac{1}{2}\zeta\,(1+f^2)+\rho}{1+h^2}=\frac{\rho}{1+h^2}$$

y poniendo por h su valor,

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\rho}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi\cos^2\alpha\right) \text{............} (15)$$

Si unimos el punto A con el S y hacemos la distancia AS=r y el arco AS=θ, tendremos haciendo

$$\xi=r\cos\theta,\quad \zeta=r\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

y sustituyendo estos valores en la (14), que puede escribirse como sigue:

$$r^2\cos^2\theta\,(1+h^2)-2\,h\,f\,r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta+r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,(1+f^2)-$$
$$-2\,\rho\,r\,\mathrm{sen}\,\theta=o;$$

de donde:

$$r+r\,(h\cos\theta-f\,\mathrm{sen}\,\theta)^2-2\,R\,(1+h^2)\,\mathrm{sen}\,\theta=o.$$

Si en esta ecuación ponemos:

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2},\ \mathrm{sen}\,\theta=\theta-\frac{\theta^3}{6},$$

resultará:

$$r+r\left[h\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)-f\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)\right]^2-2\,R\,(1+h^2)\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)=o;$$

desarrollando y limitándose á la tercera potencia de θ,

$$r\,(1+h^2)+r\left[\theta^2(f^2-h^2)-2\,h\,f\,\theta+\frac{4}{3}\,h\,f\,\theta^3\right]-$$
$$-(1+h^2)\left(2\,R\,\theta-\frac{1}{3}\,R\,\theta^3\right)=o.$$

Haciendo $F=\frac{f\,h}{1+h^2}$ y $H=\frac{f^2-h^2}{1+h^2}$, tendremos:

$$r+r\,\theta^2 H-2\,r\,\theta\,F+\tfrac{4}{3}\,r\,\theta^3\,F-2\,R\,\theta+\tfrac{1}{3}R\,\theta^3=o;$$

ordenando con relación á θ,

$$r-2\,\theta\,(R+r\,F)+H\,r\,\theta^2+\tfrac{1}{3}\,\theta^3\,(4\,F\,r+R)=o.$$

Desarrollando por coeficientes indeterminados el valor de θ, tendremos limitándose á la cuarta potencia de r:

$$\theta=A\,r+B\,r^2+C\,r^3+D\,r^4$$

$$r-2\,(Fr+R)\,(Ar+Br^2+Cr^3+Dr^4)+Hr\,(A^2r^2+2\,A\,Br^3+$$
$$+B^2r^4+2\,A\,C\,r^4)+\tfrac{1}{3}\,(4\,Fr+R)\,(A^3r^3+3\,A^2B\,r^4)=o$$

Ordenando según las potencias de r y reduciendo, tendremos:

$$(1-2\,A\,R)\,r-2\,(A\,F+B\,R)\,r^2+(A^2H+\tfrac{1}{3}A^3R-2\,B\,F-2\,C\,R)\,r^3+$$
$$+(\tfrac{4}{3}A^3F+A^2B\,R+2\,A\,B\,H-2\,C\,F-2\,D\,R)\,r^4=0.$$

Igualando á cero los coeficientes de las diversas potencias de r, se tendrá:

$$1-2\,A\,R=0$$

$$2\,(A\,F+B\,R)=0$$

$$A^2H+\tfrac{1}{3}A^3R-2\,B\,F-2\,C\,R=0$$

$$\tfrac{4}{3}A^3F+A^2\,B\,R+2\,A\,B\,H-2\,C\,F-2\,D\,R=0$$

La primera ecuación da:

$$A=\frac{1}{2\,R}$$; y la 2ª

$$B=-\frac{F}{2\,R^2}$$

Con estos valores la tercera ecuación da:

$$C=\frac{1}{48\,R^3}+\frac{H}{8\,R^3}+\frac{F^2}{2\,R^3},$$

y la cuarta:

$$D=-\frac{F^3}{2\,R^4}-\frac{3\,H\,F}{8\,R^4}$$

Substituyendo los coeficientes por sus valores encontrados:

$$\theta=\frac{r}{2R}-\frac{1}{2}F\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{8}H+\frac{1}{2}F^2\right)\left(\frac{r}{R}\right)^3-$$

$$-\left(\frac{3}{8}HF+\frac{1}{2}F^3\right)\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

que es la ecuación polar de la curva A B.

La longitud de la curva desde A hasta S, es:

$$s=\int(1+r^2\frac{d\theta^2}{dr^2})^{\frac{1}{2}}\,dr;$$

ó bien

$$s=r+\int(\tfrac{1}{2}\,r^2\frac{d\theta^2}{dr^2}-\tfrac{1}{8}\,r^4\frac{d\theta^4}{dr^4})\,dr.$$

Diferenciando la ecuación de la curva, tendremos:

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{2\,R}-F\frac{r}{R^2}+3\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{8}H+\frac{1}{2}F^2\right)\frac{r^2}{R^3}-$$

$$-4\left(\frac{3}{8}FH+\frac{1}{2}F^3\right)\frac{r^3}{R^4}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2=\frac{1}{4R^2}-F\frac{r}{R^3}+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{8}H+\frac{5}{2}F^2\right)\frac{r^2}{R^4}-$$

$$-\left(\frac{1}{8}F+\frac{9}{4}FH+5F^3\right)\frac{r^3}{R^5}+\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^4=\frac{1}{16\,R^4}-F\frac{r}{2\,R^5}+\ldots\ldots.$$

Y sustituyendo:

$$s=r+\int\left[\frac{1}{8}\,\frac{r^2}{R^2}-\frac{1}{2}F\,\frac{r^3}{R^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{8}H+\frac{5}{2}F^2\right)\frac{r^4}{R^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}F+\frac{9}{4}FH+5F^3\right)\frac{r^5}{R^5}-\frac{1}{128}\frac{r^4}{R^4}+\frac{1}{16}F\frac{r^5}{R^5}\right]dr.$$

Integrando:

$$s=r+\frac{r^3}{24\,R^2}+\frac{1}{8}F\frac{r^4}{R^3}+\left(\frac{1}{160}+\frac{3}{80}H+\frac{5}{20}F^2\right)\frac{r^5}{R^4}-$$

$$-\left(\frac{1}{96}F+\frac{9}{48}FH+\frac{5}{12}F^3\right)\frac{r^6}{R^5}-\frac{1}{640}\,\frac{r^5}{R^4}+\frac{1}{96}F\frac{r^6}{R^5};$$

y ordenando:

$$s=r+\frac{r^3}{24\,R^2}\left(1-3F\frac{r}{R}\right)+\left(\frac{3}{640}+\frac{3}{80}H+\frac{1}{4}F^2\right)\frac{r^5}{R^4}-$$

$$-\left(\frac{3}{16}FH+\frac{5}{12}F^3\right)\frac{r^6}{R^5}.$$

Si en esta ecuación reemplazamos K en lugar de r, obtendremos la longitud de toda la curva AB, y si ponemos por F y H sus valores, limitándose á la segunda potencia de e, pues el término en $e^2\,K^5$ sólo es de 3 mm. por una distancia de 483 kilómetros, tendremos:

$$s=K+\frac{K^3}{24\,R^2}-\frac{e^2\,K^4}{16\,R^3}\cos\alpha\,\text{sen}\,2\,\varphi+\frac{3\,K^5}{640\,R^4},$$

pues

$$F=\frac{f\,h}{1+h^2}=\frac{e^2\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\varphi\,\cos\alpha}{1-e^2\,(1-\cos^2\varphi\,\cos^2\alpha)},$$

que despreciando las potencias superiores á e^2, se reduce simplemente al numerador.

De igual manera, la longitud de la curva BA, obtenida como intersección de la superficie por el plano que determina la normal en B y el punto A, será:

$$s'=K+\frac{K^3}{24\,R'^2}-\frac{e^2K^4}{16\,R'^3}\cos\alpha'\,\text{sen}\,2\,\varphi'+\frac{3\,K^5}{640\,R'^4}$$

Como se ve, la diferencia entre s y s' es insensible, y sin inconveniente alguno puede aceptarse como valor definitivo el promedio entre ambas series.

Sensiblemente $\alpha+\alpha'=180°$, y por lo mismo los cosenos