Como en la figura existen los siguientes elementos:

B (bases)............... = 1
A (ángulos medidos = 8

Total.............. = 9

$$B + A - 2p + 3 = 4$$

ecuaciones de condición.

Puesto que B=1 no habrá ecuación de bases.

Las ecuaciones de ángulo serán:

$$1 - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3,$$

puesto que hay seis líneas; y las de lados:

$$1 - 2p + 3 = 6 - 2 \times 4 + 3 = 1.$$

Direcciones más probables sin reducir al nivel del mar.

	Rosario (2)	0°	0'	0" . 00
Extremo N O (1)	Extremo S E (3)	42	29	38 . 89
	San Nicolás (4)	85	29	2 . 74
	Extremo S E (3)	0°	0'	0" . 00
Rosario (2)	San Nicolás (4)	7	41	58 . 59
	Extremo N O (1)	43	17	33 . 50
	Rosario (2)	161	51	42 . 53
Extremo S E (3)	San Nicolás (4)	0	0	0 . 00
	Extremo N O (1)	67	38	53 . 01
	Extremo N O (1)	0	0	0 . 00
San Nicolás (4)	Rosario (2)	58	55	26 . 73
	Extremo S E (3)	69	21	41 . 01

Cálculo del exceso esférico.

1^4_3 42 59 23.85	log 1.3	4.19967	
4^3_1 69 21 41.01	lg sen 4^3_1	9.97119	
3^1_4 67 38 53.01		4.22848	.... (a)
179 59 57.87	lg sen 1^4_3	9.83370	
	log 4.3	4.06218	
1^3_2 42 29 38.89			
2^1_3 43 17 33.50	log 1.3	4.19967	
3^2_1 94 12 49.52	lg sen 2^1_3	9.83615	
180 0 1.91		4.36352	
	lg sen 3^2_1	9.99882	
	log 1.2	4.36234	
1^4_2 85 29 2.74			
2^1_4 35 35 34.91			
4^2_1 58 55 26.73		4.22848	.... (a)
180 0 4.38	lg sen 3^1_4	9.96608	
	log 1.4	4.19456	
4^3_2 10 26 14.28			
3^2_4 161 51 42.53	log 1.2	4.36234	
2^4_3 7 41 58.59	lg sen 4^2_1	9.93272	
179 59 55.40		4.42962	
	lg sen 1^4_2	9.99865	
	log 4.2	4.42827	

(1.3) Base de Apam 15,837 mts.

$$\begin{array}{lr} \log 1.4 & 4.19456 \\ \log 1.3 & 4.19967 \\ \lg \operatorname{sen}\ 1^4_3 & 9.83370 \\ & 1.40627 \\ \hline & 9.63420 \\ & \varepsilon_1 = 0.43 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \log 1.2 & 4.36234 \\ \log 1.3 & 4.19967 \\ \lg \operatorname{sen}\ 1^3_2 & 9.82963 \\ & 1.40627 \\ \hline & 9.79791 \\ & \varepsilon_2 = 0.63 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \log 1.2 & 4.36234 \\ \log 1.4 & 4.19456 \\ \lg \operatorname{sen}\ 1^4_2 & 9.99865 \\ & 1.40627 \\ \hline & 9.96182 \\ & \varepsilon_3 = 0.92 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \log 4.2 & 4.42827 \\ \log 4.3 & 4.06218 \\ \lg \operatorname{sen}\ 4^3_2 & 9.25806 \\ & 1.40627 \\ \hline & 9.14678 \\ & \varepsilon_2 = 0.14 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \varepsilon_3 = 0.92 \\ \varepsilon_4 = \underline{0.14} \\ 1.06 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} \varepsilon_1 = 0.43 \\ \varepsilon_2 = \underline{0.63} \\ 1.06 \end{array}\right\} \end{array}\right. \text{Comprobación.}$$

Reducción al nivel del mar.

LADOS	Azts. simples	Azts. dobles	Altura	Factor	Reducción
(1) Extº N O — Rosario (2)	272° 40′	185° 20′	3k.4	−0.010	−0.034
Extº S E (3)	315 10	270 20	2. 5	−0.097	−0.243
S. Nicolás (4)	358 9	356 18	3. 0	−0.006	−0.018
(2) Rosario — Extº S E (3)	49 22	98 44	2. 5	+0.096	+0.240
S. Nicolás (4)	57 4	114 8	3. 0	+0.089	+0.267
Extº N O (1)	92 40	185 20	2. 5	−0.009	−0.022
(3) Extº S E — Rosario (2)	229 22	98 44	3. 4	+0.096	+0.326
S. Nicolás (4)	67 30	135 0	3. 0	+0.069	+0.207
Extº N O (1)	135 9	270 18	2. 5	−0.097	−0.243
(4) S. Nicolás — Extº N O (1)	178 9	356 18	2. 5	−0.006	−0.015
Rosario (2)	237 4	114 8	3. 4	+0.089	+0.303
Extº S E (3)	247 30	135 0	2. 5	+0.069	+0.173
	Partiendo del dato: Az. S. Nicolás—Rosario = 237° 4′				

Ecuaciones del ángulo (con valores reducidos al nivel del mar).

$$\begin{array}{rl} 1^4_3 = & 42°59'24''.07 + (1_4)-(1_3) \\ 4^3_1 = & 69\ 21\ 41\ .\ 20 + (4_3)-(4_1) \\ 3^1_4 = & \underline{67\ 38\ 52\ .\ 56} + (3_1)-(3_4) \\ & 179\ 59\ 57\ .\ 83 \\ -(180+\varepsilon) = & -\underline{(180\ \ 0\ \ 0\ .\ 43)} \\ 0 = & -\ 2\ .\ 60 + (1_4)-(1_3)+(4_3)-(4_1)+(3_1)-(3_4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1^3_2 = & 42°29'38''.68 + (1_3)-(1_2) \\ 3^2_1 = & 94\ 12\ 50\ .09 + (3_2)-(3_1) \\ 2^1_3 = & \underline{43\ 17\ 33\ .\ 24} + (2_1)-(2_3) \\ & 180\ \ 0\ \ 2\ .\ 01 \\ -(180+\varepsilon) = & -\underline{(180\ \ 0\ \ 0\ .\ 63)} \\ 0 = & +\ 1\ .\ 38 + (1_3)-(1_2)+(3_2)-(3_1)+(2_1)-(2_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1^4_2 = & 85\ 29\ \ 2\ .76 + (1_4)-(1_2) \\ 4^2_1 = & 58\ 55\ \ 27.05 + (4_2)-(4_1) \\ 2^1_4 = & \underline{35\ 35\ \ 36.62} + (2_1)-(2_4) \\ & 180\ \ 0\ \ 4{:}43 \\ -(180+\varepsilon) = & -\underline{(180\ \ 0\ \ 0.92)} \\ 0 = & +\ 3.51 + (1_4)-(1_2)+(4_2)-(4_1)+(2_1)-(2_4) \end{array}$$

Ecuación de lados.

$$\frac{l_4\, l_3\, l_2}{l_3\, l_2\, l_4} = \frac{\text{sen } 3_4^1 \text{ sen } 2_3^1 \text{ sen } 4_1^2}{\text{sen } 4_1^3 \text{ sen } 3_1^2 \text{ sen } 2_4^1}$$

$$\frac{\text{sen}\,[3_4^1+(3_1)-(3_4)]\,\text{sen}\,[2_3^1+(2_1)-(2_3)]\,\text{sen}\,[4_1^2+(4_2)-(4_1)]}{\text{sen}\,[4_1^3+(4_3)-(4_1)]\,\text{sen}\,[3_1^2+(3_2)-(3_1)]\,\text{sen}\,[2_4^1+(2_1)-(2_4)]}$$

log sen 3_4^1 9.966078102+	8.7	log sen 4_1^3 9.971193523+	7.9
» sen 2_3^1 9.836149300+	22.3	» sen 3_1^2 9.998824361−	1.6
» sen 4_1^2 9.932719778+	12.7	» sen 2_4^1 9.764940058+	29.4
9.734947180		9.734957942	
−9.734957942			

$$0 = \; - \; 107{,}62 + 8.7\,(3_1) - 8.7\,(3_4) + 22.3\,(2_1) - 22.3\,(2_3) + 12.7\,(4_2) - 12.7\,(4_1) - 7.9\,(4_3) + 7.9\,(4_1) + 1.6\,(3_2) - 1.6\,(3_1) - 29.4\,(2_1) + 29.4\,(2_4)$$

$$0 = -\,107.62 + 7.1\,(3_1) - 8.7\,(3_4) - 7.1\,(2_1) - 22.3\,(2.3) + 12.7\,(4_2) - 4.8\,(4_1) - 7.9\,(4_3) + 1.6\,(3_2) + 29.3\,(2_4)$$

ECUACIONES CORRELATIVAS.

	1_4	1_3	1_2	2_1	2_4	2_3	3_2	3_1	3_4	4_3	4_2	4_1	n
a	+1	−1						+1	−1	+1		−1	+ 2.60
b		+1	−1	+1		−1	+1	−1					− 1.37
c	+1		−1	+1	−1						+1	−1	− 3.51
d				−7.1	+29.4	−22.3	+1.6	+7.1	−8.7	−7.9	+12.7	−4.8	+107.62
s	+2.0	0	−2.0	−5.1	+28.4	−23.3	+2.6	+7.1	−9.7	−6.9	+13.7	−6.8	

CÁLCULO DE LAS CORRECCIONES.

	1_4	1_3	1_2	2_1	2_4	2_3	3_2	3_1	3_4	4_3	4_2	4_1
a	+0.590767	−0.590767						+0.590767	−0.590767	+0.590767		−0.590767
b		+0.112636	−0.112636	+0.112636		−0.112636	+0.112636	−0.112636				
c	−0.666469		+0.666469	+0.666469	+0.666469						−0.666469	+0.666469
d				−0.343039	+1.420472	−1.077433	+0.077305	+0.343039	−0.420344	−0.381691	+0.613605	−0.231914
Correcciones	−0.075702	−0.478131	+0.553833	−0.896872	+2.086941	−1.190069	+0.189941	+0.821170	−1.011111	+0.209076	−0.052864	−0.156212

ECUACIONES NORMALES.

	a	b	c	d	s	aa + ab + ... + ad	n
a	+ 6.00	− 2.00	+ 2.00	+ 12.70	+ 18.70	+ 18.70	+ 2.60
b	− 2.00	+ 6.00	+ 2.00	+ 9.70	+ 15.70	+ 15.70	− 1.37
c	+ 2.00	+ 2.00	+ 6.00	− 19.00	− 9.00	− 9.00	− 3.51
d	+ 12.7	+ 9.70	+ 19.00	+1787.46	+1790.86	+1790.86	+ 107.62

$$+12.7\,(4_2) - 4.8\,(4_1) - 7.9\,(4_3) + 1.6\,(3_2) + 29.3\,(2_4)$$

$(an)=+2.60$	$(aa)=+6.00$	$(ab)=-2.00$	$[ac]=+2.00$	$[ad]=+12.70$	$[as]=+21.30$
$\frac{(an)}{(aa)}=+0.433333$		$\frac{(ab)}{(aa)}=-\frac{1}{3}$	$\frac{[ac]}{[aa]}=+\frac{1}{3}$	$\frac{[ad]}{[aa]}=+2.116667$	
$-\beta\frac{(ab)}{(aa)}=+0.037545$	$(bn)=-1.37$	$(bb)=+6.00$	$[bc]=+2.00$	$[bd]=+9.70$	$[bs]=+14.33$
$-\gamma\frac{(ac)}{(aa)}=+0.222151$	$-\frac{(ab)}{(aa)}(an)=+0.866667$	$-\frac{(ab)}{(aa)}(ab)=+0.666667$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]=-0.666667$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]=-4.233333$	
$-\delta\frac{(ad)}{(aa)}=-0.102267$	$(bn1)=-0.503333$	$(bb1)=+5.666666$	$[bc1]=-2.666667$	$[bd1]=+13.933333$	
$\alpha=+0.590767$	$\frac{(bn1)}{(bb1)}=-0.094375$		$\frac{[bc1]}{[bb1]}=+0.5$	$\frac{[bd1]}{[bb1]}=+2.6125$	
	$-\gamma\frac{(bc1)}{(bb1)}=+0.333235$	$(cn)=-3.51$	$[cc]=+6.00$	$[cd]=-19.00$	$[cs]=-12.51$
	$-\delta\frac{(bd1)}{(bb1)}=-0.126224$	$-\frac{(ac)}{(aa)}(an)=+0.866667$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]=+0.666667$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]=+4.233333$	
	$\beta=+0.112636$	$(cn1)=-4.376667$	$[cc1]=+5.333333$	$[cd1]=-23.233333$	
		$-\frac{(bc1)}{(bb1)}(bn1)=+0.251667$	$-\frac{[bc1]}{[bb1]}[bc1]=-1.333333$	$-\frac{[bc1]}{[bb1]}[bd1]=-6.966667$	
		$(cn2)=-4.12500$	$[cc2]=+4.000000$	$[cd2]=-30.200000$	
		$\frac{(cn2)}{(cc2)}=-1.031250$		$\frac{[cd2]}{[cc2]}=+7.550000$	
		$-\delta\frac{(cd2)}{(cc2)}=+0.364781$	$[dn]=+107.62$	$[dd]=+1787.46$	$[ds]=+1898.48$
		$\gamma=-0.666460$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[an]=-5.503333$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]=-26.881667$	
			$[dn1]=+102.116667$	$[dd1]=+1760.578333$	
			$-\frac{[bd1]}{[bb1]}[bn1]=+1.314058$	$-\frac{[bd1]}{[bb1]}[bd1]=-36.40833$	
			$[dn2]=+103.431625$	$[dd2]=+1724.177500$	
			$-\frac{[cd2]}{[cc2]}[cn2]=-31.143750$	$-\frac{[cd2]}{[cc2]}[cd2]=-228.010000$	
			$[dn3]=+72.287975$	$[dd3]=+1496.167500$	
			$\frac{[dn3]}{[dd3]}=+0.048315$		
			$\frac{[dn3]}{[dd3]}=\delta=+0.048315$		

VERIFICACION DE LAS ECUACIONES NORMALES.

$\alpha=+0.590767$ $\beta=+0.112636$ $\gamma=-0.666469$ $\delta=+0.0483153624$

	a)	b)	c)	d)	n)
(a	+ 6.000000	−2.000000	+ 2.000000	+ 12.700000	+ 2.600000
	+ 3.544602	−0.225272	− 1.332938	+ 0.613605	+ 2.599997
(b	− 2.000000	+6.000000	+ 2.000000	+ 9.700000	— 1.370000
	− 1.181534	+0.675816	− 1.332938	+ 0.468659	— 1.369997
(c	+ 2.000000	+2.000000	+ 6.000000	− 19.000000	— 3.510000
	+ 1.181534	+0.225272	− 3.998814	− 0.917992	— 3.510000
(d	+12.700000	+9.700000	−19.000000	+1787.460000	+107.620000
	+ 7.502741	+1.092569	+12.662911	+ 86.361778	+107.619999

Angulos compensados.

	ÁNGULOS PLANOS.
$1_3^4 = 42°\ 59'\ 24''.47$	$42°\ 59'\ 24''.33$
$4_1^3 = 69\ \ 21\ \ 41\ .56$	$69°\ 21\ \ 41\ .42$
$2_3^1 = 67\ \ 38\ \ 54\ .39$	$67\ \ 38\ \ 54\ .25$
Exc. esf. $= \quad 0\ .42$	$100\ \ 0\ \ 0\ .00$
$1_2^3 = 42°\ 29'\ 37''.65$	$42\ \ 29\ \ 37\ .44$
$3_1^2 = 94\ \ 12\ \ 49\ .46$	$92\ \ 12\ \ 49\ .25$
$2_3^1 = 43\ \ 17\ \ 33\ .53$	$43\ \ 17\ \ 33\ .31$
Exc. esf. $= \quad 0\ .64$	$180\ \ 0\ \ 0\ .00$
$1_2^4 = 85\ \ 29\ \ 2\ .13$	$85\ \ 29\ \ 1\ .83$
$4_1^2 = 58\ \ 55\ \ 27\ .16$	$58\ \ 55\ \ 26\ .85$
$2_4^1 = 35\ \ 35\ \ 31\ .63$	$45\ \ 35\ \ 31\ .32$
Exc. esf. $= \quad 0\ .92$	$180\ \ 0\ \ 0\ .00$

Ecuaciones de lados.

lg sen $3_4^1 = 9.9660\ 796.96$	lg sen $4_1^3 = 9.9711\ 938.11$
lg sen $2_3^1 = 9.8361\ 499.54$	lg sen $3_1^2 = 9.9988\ 245.06$
lg sen $4_1^2 = 9.9327\ 199.10$	lg sen $2_4^1 = 9.7649\ 312.85$
$9.7349\ 495.60$	$9.7349\ 496.02$
496.02	
-0.42	

Cálculo de los lados.

Base de Apam=15827.0853 metros.

log	1_3	4.199675240
sen	4_1^3	9.971193697
		4.228481543
sen	1_3^4	9.833702761
log	4.3	4.062184304
	4.3	11539.43

		4.228481543
sen	3_4^1	9.966079572
sen	1.4	4.194561115
	1.4	15651.69

log	1.3	4.199675240
sen	2_3^1	9.836149456
		4.363525784
sen	3_1^2	9.998824487
log	1.2	4.362350271
	1.2	23032.99

		4.363525784
sen	1_2^3	9.829631487
log	2.3	4.193157271
	2.3	15601.18

log	1.2	4.362350271
sen	4_1^2	9.932719500
		4.429630771
sen	1_2^4	9.998649468
log	4.2	4.428280239
	4.2	26808.98

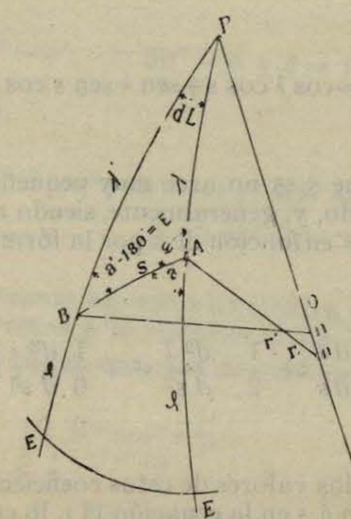
		4.429630771
sen	2_4^1	9.764930356
log	1.4	4.194661127
	1.4	15651.69

Fórmulas y factores para el cálculo de latitudes longitudes y azimutes geodésicos.

Conocidas las coordenadas geográficas, latitud y longitud de un punto de la superficie de la tierra, su distancia á otro, y azimut de la línea que los une, se trata de determinar la latitud y longitud del nuevo punto y el azimut inverso de su línea de unión.

La investigación de las nuevas coordenadas puede hacerse resolviendo el triángulo esférico formado por los dos puntos y el polo; pero, tal modo de proceder exige el uso de logaritmos de diez cifras decimales, pues la precisión de las nuevas coordenadas no debe de ser inferior á la exactitud con que se conoce la distancia lineal de las dos estaciones.

Es, pues, oportuno proceder indirectamente, y hacer, no los nuevos datos absolutos sino su diferencia con los de la estación de partida, á menos que, el arco comprendido entre los dos puntos, abarque varios grados, en cuyo caso, la investigación directa se hace necesaria; mas no lo será en los casos comunes de la geodesia, pues la intervisibilidad de las estaciones limita la amplitud de los arcos, pudiendo expresar las diferencias de la latitud, longitud, etc., en función de la distancia entre las dos estaciones, azimut y coordenadas del punto de partida.



Sean A y B dos puntos en el esferoide de revolución de latitudes $AE=\varphi$; $BE'=\varphi'$; unidos por la línea geodésica $AB=s$, que hace con el meridiano de A el ángulo

$$PAB=180^\circ-\alpha=\xi$$

y con el de B el ángulo $PBA=\alpha'-180^\circ=\xi'$; siendo α y α' sus azimutes, contados del S. al N., pasando por el O.

Si llamamos L y L' las longitudes de los puntos A y B, positivas hacia el O. y contadas á partir de cierto meridiano el ángulo $APB=dL$, será la diferencia de sus longitudes, pudiendo poner $L'-L=dL$.

Si designamos por N y R la normal mayor y el radio de curvatura en el meridiano, tendremos para los puntos A y B:

$$An=N;\ Ar=R;\ Bn'=N';\ Br'=R'.$$

Conociendo la longitud lineal K de la línea geodésica AB, su azimut α y las coordenadas geográficas de A, empecemos por buscar la diferencia de latitudes entre A y B.

Llamando λ y λ' sus colatitudes, el triángulo APB, considerado como esférico, nos da:

$$\cos\lambda'=\cos\lambda\cos s+\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}s\cos\xi \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Observando que s es un arco muy pequeño, raras veces mayor que un grado, y, generalmente, siendo menor que 30', podemos expresar λ' en función de s por la fórmula de Taylor, y poner:

$$\lambda'=\lambda+\frac{d\lambda}{ds}s+\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\lambda}{ds^2}s^2+\frac{1}{6}\frac{d^3\lambda}{ds^3}s^3+\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Para obtener los valores de estos coeficientes, diferenciemos λ' con relación á s en la ecuación (1), lo cual nos da:

$$\frac{d\lambda'}{ds}=\frac{\cos\lambda\operatorname{sen}s-\operatorname{sen}\lambda\cos s\cos\xi}{\operatorname{sen}\lambda'};$$

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2}=\cot\lambda'-\frac{(\cos\lambda\operatorname{sen}s-\operatorname{sen}\lambda\cos s\cos\xi)^2\cot\lambda'}{\operatorname{sen}^2\lambda'}$$

$$\frac{d^3\lambda'}{ds^3}=-\frac{\frac{d\lambda'}{ds}}{\operatorname{sen}^2\lambda'}\frac{\operatorname{sen}^2\lambda}{\operatorname{sen}^4\lambda'}\Big[2\cot\lambda'(\cos\lambda\operatorname{sen}s-\operatorname{sen}\lambda\cos s\cos\xi)\cos\lambda'-$$

$$-(\cos\lambda\operatorname{sen}s-\operatorname{sen}\lambda\cos s\cos\xi)^2\frac{\frac{d\lambda'}{ds}}{\operatorname{sen}^2\lambda'}\Big]+$$

$$+\frac{1}{\operatorname{sen}^4\lambda'}(\cos\lambda\operatorname{sen}s-\operatorname{sen}\lambda\cos s\cos\xi)^2\cot\lambda'\,2\operatorname{sen}\lambda'\cos\lambda'\frac{d\lambda'}{ds}$$

Mas como para $s=0$, $\lambda'=\lambda$, tendremos:

$$\frac{d\lambda}{ds}=-\cos\xi;\ \frac{d^2\lambda}{ds^2}=\operatorname{sen}^2\xi\cot\lambda;\ \frac{d^3\lambda}{ds^3}=\cos\xi\operatorname{sen}^2\xi(1+3\cot^2\lambda):$$

y substituyendo estos valores en la ecuación (2),

$$\lambda'-\lambda=-s\cos\xi+\tfrac{1}{2}s^2\operatorname{sen}^2\xi\cot\lambda+\tfrac{1}{6}s^3\operatorname{sen}^2\xi\cos\xi(1+3\cot^2\lambda)+\ldots;$$

pero

$$\lambda'=90^\circ-\varphi';\ \lambda=90^\circ-\varphi\ \text{ y }\ \xi=180^\circ-\alpha$$

luego tendremos:

$$\varphi-\varphi'=s\cos\alpha+\tfrac{1}{2}s^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\varphi-\tfrac{1}{6}s^3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$$
$$(1+3\operatorname{tg}^2\varphi)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Hasta aquí hemos supuesto una esfera de radio 1; pero tenemos que referirnos á la esfera de radio N, luego deberemos poner $s=\frac{K}{N}$; con lo que, sustituyendo, quedará:

$$\varphi-\varphi'=\frac{K\cos\alpha}{N}+\frac{1}{2}\cdot\frac{K^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{N^2}-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{K^3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha}{N^3}(1+3\operatorname{tg}^2\varphi)+\ldots\ldots (4)$$