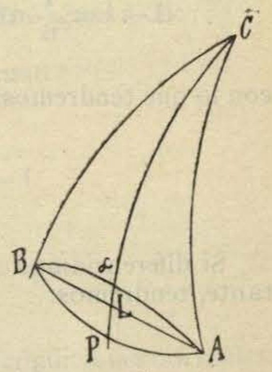
y como g difiere poco de 10, para apreciar el efecto de la corrección, no hay inconveniente alguno en escribir la anterior como sigue, tomando el milímetro por unidad:

$$d\lambda = 0^{\text{mm}}{.}345\; dg;$$

fórmula que demuestra, dada la pequeña variación de g, que no es necesario llevar en cuenta la corrección por variación de la pesantez.

Triangulación.

Sean A y B dos puntos de la superficie terrestre y C el polo. El plano que contiene la normal en A y pasa por B, y el plano que contiene la normal en B y pasa por A, cortan la superficie según dos curvas planas diferentes. Suponiendo, para fijarnos, que A y B pertenezcan al hemisferio norte, y que B está á mayor latitud que A, la curva A P B dada por el plano que contiene la normal en A queda al sur de la curva B Q A dada por el plano que contiene la normal en B. Al hablar de la distancia A B, hay cierta ambigüedad, si bien ésta es más aparente que real, porque la curva más corta ó distancia geodésica, como veremos, no difiere apenas en extensión líneal de cada una de las curvas planas; por otra parte, la dirección B Q A es exacta en B y la de A P B lo es en A. Además de las tres curvas anteriores que hemos considerado, definiremos una cuarta, llamada curva de alineación.



Supongamos que un observador, colocado entre A y B con un instrumento de pasos, quiere ponerse en línea con ambos puntos. Para ello cambiará de posición transversalmente respecto de la línea A B hasta conseguir colocarse en un punto L, donde el plano vertical descrito por el eje óptico del anteojo, pase tanto por A como por B.

En todo rigor, al considerar los triángulos geodésicos en la superficie terrestre, suponemos que las líneas que unen los vértices son líneas geodésicas; pero discrepando tan poco

entre sí las líneas que anteriormente hemos definido, y á causa de la propiedad de la línea de alineación, de conservar el azimut constante, podemos aceptar que las líneas que unen los vértices son líneas de alineación, pues los ángulos que éstas líneas forman entre sí son los dados por el instrumento, mientras que los ángulos que forman las geodésicas deben ser calculados.

Gauss define del siguiente modo la curvatura de una superficie, de conformidad con el método seguido en las curvas planas. Si tenemos una porción de superficie curva ceñida por una línea cerrada, y trazamos los radios de una esfera de radio unidad, paralelos á las normales á la superficie en los diferentes puntos de ese contorno, el área de la porción correspondiente de la esfera será la curvatura total de la porción de superficie de que se trata. Y esto supuesto, si dado un punto de ella dividimos la curvatura total del elemento superficial donde se encuentra dicho punto por el área de este elemento, el cociente nos ofrecerá la medida de la curvatura en tal punto. Sea pues, ese elemento un pequeñísimo rectángulo formado por cuatro líneas de curvatura: α β los lados de ese rectángulo, ρ_m ρ_p los radios correspondientes de curvatura. Las normales trazadas por los puntos del contorno estarán en cuatro planos que se cortarán de dos en dos perpendicularmente. Los radios correlativos de la esfera de radio unidad determinarán en su superficie un rectángulo cuyos lados serán

$$\frac{\alpha}{\rho_m} \text{ y } \frac{\beta}{\rho_p}, \text{ y su área } \frac{\alpha\beta}{\rho_m\,\rho_p},$$

la cual, dividida por el área del rectángulo, da

$$\frac{1}{\rho_m\,\rho_p},$$

y esto será la medida de la curvatura.

Demostró Gauss que si una superficie inextensible, pero flexible, se arquea ó deforma más ó menos, la medida de la curvatura aún en cada punto será la misma. Así tomando en una superficie una porción muy pequeña, en cuyo centro los radios principales de curvatura sean ρ_m y ρ_p, esa porción podrá adaptarse, sin que en ningún punto de ella cambie la curvatura sobre una esfera de radio igual á $(\rho_m\,\rho_p)^{1/2}$

Podemos pues representar los triángulos geodésicos por una serie de triángulos colocados en esferas osculatrices de radio igual á $\sqrt{\rho_m \, \rho_p}$, $\rho_m \, \rho_p$ siendo los radios de curvatura en el meridiano y en un plano normal, en el punto medio del triángulo considerado.

Supuesto lo anterior, si llamamos A, B y C los ángulos del triángulo esférico equivalente, a b y c los lados opuestos y ε el exceso esférico, tendremos:

$$\varepsilon = B + C + A - 180^\circ; \text{ de donde}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon = \operatorname{sen} \frac{1}{2} (B+C) \operatorname{sen} \frac{1}{2} A - \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} A$$

Según las fórmulas de Delambre, tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (B+C)}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \frac{1}{2} a}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (B+C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} a}$$

de los que se deduce:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (B+C) \operatorname{sen} \frac{1}{2} A - \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} A =$$

$$= \operatorname{sen} A \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a};$$

y por consiguiente:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a} \operatorname{sen} A$$

si hacemos:

$$a + b + c = 2\,\delta$$

$$-a + b + c = 2\,\delta_1$$

$$+a - b + c = 2\,\delta_2$$

$$+a + b - c = 3\,\delta_3$$

sabemos que se tiene, según la Trigonometría esférica:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \left(\frac{\operatorname{sen} \delta_2 \operatorname{sen} \delta_3}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^{1/2}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \left(\frac{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^{1/2} ; \text{ de donde}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} A = \frac{(\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_1 \operatorname{sen} \delta_2 \operatorname{sen} \delta_3)^{1/2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}; \text{ y substituyendo:}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{(\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_1 \operatorname{sen} \delta_2 \operatorname{sen} \delta_3)^{\frac{1}{2}}}{2 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a}$$

Consideremos ahora un triángulo esférico cuyos tres lados sean pequeños con relación al radio de la esfera; y sean A' B' C' los ángulos y $\triangle'$ el area de un triángulo plano cuyos lados a, b, c, sean iguales á los del triángulo esférico.

Podemos poner:

$$\operatorname{sen}^{1/2} \delta = \delta^{1/2} \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right)^{1/2} = \delta^{1/2} \left(1 - \frac{\delta^2}{12}\right) \text{ y}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = 1 - \frac{a^2}{8}; \text{ y por consiguiente,}$$

$$\varepsilon = (\delta \, \delta_1 \, \delta_2 \, \delta_3)^{1/2} \frac{1 - \dfrac{\delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{12}}{1 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

Pero las fórmulas que nos dan δ, δ_1......, elevadas al cuadrado y sumando nos dan:

$$\delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

y substituyendo

$$\varepsilon = (\delta \, \delta_1 \, \delta_2 \, \delta_3)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}\right)$$

$$= (\delta \, \delta_1 \, \delta_2 \, \delta_3)^{1/2} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24}\right)$$

El área de un triángulo plano en función de sus lados es:

$$\triangle' = (\delta\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3)^{1/2},$$

luego:

$$\varepsilon = \triangle'\ (1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{24})\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por otra parte, sabemos que se tiene:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A' = \left[\frac{\delta_2\ \delta_3}{b\ c}\right]^{1/2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A' = \left[\frac{\delta\ \delta_1}{b\ c}\right]^{1/2};$$

luego:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A' = \left(\frac{\delta\ \delta_1}{b\ c}\right)^{1/2} \left(\frac{\operatorname{sen}\delta_2\ \operatorname{sen}\delta_3}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}\right)^{1/2}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A' = \left(\frac{\delta_2\ \delta_3}{b\ c}\right)^{1/2} \left(\frac{\operatorname{sen}\delta\ \operatorname{sen}\delta_1}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}\right)^{1/2};$$

de donde:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A - A') = \frac{\triangle'}{(b\ c)^{1/2}}\ \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}\delta_2}{\delta_2}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_3}{\delta_3}\right)^{1/2} - \left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_1}{\delta_1}\right)^{1/2}}{(\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c)^{1/2}}$$

$$= \frac{\triangle'}{b c}\ \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}\delta_2}{\delta_2}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_3}{\delta_3}\right)^{1/2} - \left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_1}{\delta_1}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\operatorname{sen} b}{b}\ \frac{\operatorname{sen} c}{c}\right)}$$

El desarrollo del seno en función del arco nos da:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\delta^2}{6} + \frac{\delta^4}{120} - \ldots\ldots\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\delta^2}{12} + \frac{\delta^4}{1440}\right),$$

luego:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\delta_2}{\delta_2}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_3}{\delta_3}\right)^{1/2} - \left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_1}{\delta_1}\right) = \left(1 - \frac{\delta_2^2}{12} + \frac{\delta_2^4}{1440}\right)$$

$$\left(1 - \frac{\delta_3^2}{12} + \frac{\delta_3^4}{1440}\right) - \left(1 - \frac{\delta^2}{12} + \frac{\delta^4}{1440}\right) \left(1 - \frac{\delta_1^2}{12}\ \frac{\delta_1^4}{1440}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\delta_2^2}{12} + \frac{\delta_2^4}{1440} - \frac{\delta_3^2}{12} + \frac{\delta_2^2\ \delta_3^2}{144} + \frac{\delta_3^4}{1440}\right) - \left(1 - \frac{\delta^2}{12} + \frac{\delta^4}{1440} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1^2}{12} + \frac{\delta^2\ \delta_1^2}{144} + \frac{\delta_1^4}{1440}\right) = \frac{\delta^2 - \delta_2^2 + \delta_1^2 - \delta_3^2}{12} +$$

$$+ \frac{\delta_2^2\ \delta_3^2 - \delta^2\ \delta_1^2}{144} - \frac{\delta^4 - \delta_2^4 + \delta_1^4 - \delta_3^4}{1440}$$

Pero:

$$\delta^2 - \delta_2^2 = a\,b + b\,c;\ \delta^2 + \delta_2^2 = \frac{1}{2}\ (a^2 + b^2 + c^2) + a\ c$$

$$\delta_1^2 - \delta_3^2 = -a\,b + b\,c;\ \delta_1^2 + \delta_3^2 = \frac{1}{2}\ (a^2 + b^2 + c^2) - a\ c$$

$$\delta^4 - \delta_2^4 = (\delta^2 - \delta_2^2)\ (\delta^2 + \delta_2^2) = \frac{1}{2}\ a\,b\,(a^2 + b^2 + c^2) +$$

$$+ a^2\,b\,c + \frac{1}{2}\ b\ c\ (a^2 + b^2 + c^2) + a\ b\ c^2$$

$$\delta_1^4 - \delta_3^4 = (\delta_1^4 - \delta_3^2)\ (\delta_1^2 + \delta_3^2) = -\frac{1}{2}\ a\,b\,(a^2 + b^2 + c^2) +$$

$$+ a^2\,b\,c + \frac{1}{2}\ b\ c\ (a^2 + b^2 + c^2) - a\ b\ c^2$$

$$\delta^4 - \delta_2^4 + \delta_1^4 - \delta_3^4 = b\,c\ (3\ a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\delta^2 - \delta_2^2 + \delta_1^2 - \delta_3^2 = 2\ b\,c$$

$$\delta_2^2\ \delta_3^2 = \frac{1}{16}\left[a^2 - (b - c)^2\right]^2;\ \delta^2\ \delta_1^2 = \frac{1}{16}\left[(b + c)^2 - a^2\right]^2$$

$$\delta_2^2\ \delta_3^2 - \delta^2\ \delta_1^2 = \frac{1}{2}\ b\,c\ (a^2 - b^2 - c^2)$$

Substituyendo tendremos:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\delta_2}{\delta_2}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_3}{\delta_3}\right)^{1/2} -$$

$$-\left(\frac{\operatorname{sen}\delta}{\delta}\ \frac{\operatorname{sen}\delta_1}{{}_1\delta}\right)^{1/2} = \frac{b\,c}{6} + \frac{b\,c}{288}(a^2 - b^2 - c^2) - \frac{b\,c\,(3\,a^2 + b^2 + c^2)}{1440} =$$

$$= \frac{b\,c}{6}\left[1 + \frac{1}{48}(a^2 - b^2 - c^2) - \frac{3\,a^2 + b^2 + c^2}{240}\right] =$$

$$= \frac{b\,c}{6}\left[1 + \frac{5\,(a^2 - b^2 - c^2) - 3\,a^2 - b^2 - c^2}{240}\right] =$$

$$= \frac{b\,c}{6}\left(1 + \frac{a^2 - 3\,b^2 - 3\,c^2}{120}\right)$$

Por otra parte:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} b}{b}\ \frac{\operatorname{sen} c}{c}\right)^{1/2} = \left[\left(1 - \frac{b^2}{6}\right)\ \left(1 - \frac{c^2}{6}\right)\right]^{1/2} = 1 - \frac{b^2 + c^2}{12};\ \text{luego}$$

sustituyendo, tendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - A') = \frac{\triangle'}{6}\left(1 + \frac{a^2 - 3\,b^2 - 3\,c^2}{120}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{12}\right) = \frac{\triangle'}{6}\left(1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120}\right)$$

de donde:

$$A - A' = \tfrac{1}{3}\triangle'\left(1 + \frac{a^2 + 7\,b^2 + 7\,c^2}{120}\right).$$

Poniendo por $\triangle'$ su valor en función de ε, tendremos:

$$A - A' = \frac{1}{3}\varepsilon\left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24}\right)\left(1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120}\right) = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}(-2a^2 + b^2 + c^2)$$

$$B - B' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}(a^2 - 2\,b^2 + c^2)$$

$$C - C' = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}(a^2 + b^2 - 2\,c^2)$$

Como el último término es despreciable, resulta el teorema de Legendre, que dice:

Los ángulos A, B, C, de un triángulo esférico, cuyos lados a, b, c, son muy pequeños con relación al radio de la esfera, son iguales á los ángulos correspondientes del triángulo plano cuyos lados son también a, b, c, aumentado cada ángulo con el tercio del exceso esférico del triángulo.

La aplicación del teorema de Legendre simplifica mucho la resolución práctica de los triángulos geodésicos, mas conviene saber hasta qué punto de aproximación puede llegarse con seguridad.

Si se conoce el lado c y ε es el exceso esférico, tendremos según el teorema citado:

$$a = c\,\frac{\operatorname{sen}\left(A - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{3}\varepsilon\right)};$$

y el cálculo riguroso:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c\,\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = K;$$

de donde:

$$a = \operatorname{arco}\operatorname{sen} K.$$

Si llamamos δa la diferencia entre estas soluciones, tendremos:

$$\delta a = c\,\frac{\operatorname{sen}\left(A - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\operatorname{sen}\left(C - \frac{1}{3}\varepsilon\right)} - \operatorname{arco}\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen} c\,\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}\right).$$

Para trasformar este valor hagamos uso de las fórmulas de Delambre:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - C)}{\cos\frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a - c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b};\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A - C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}B} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a + c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}b}$$

que mutiplicados dan:

$$\frac{\operatorname{sen}(A - C)}{\operatorname{sen} B} = \frac{\cos c - \cos a}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b};\ \text{pero el primer}$$

miembro puede escribirse:

$$\frac{\operatorname{sen}(A - C)}{\operatorname{sen} B} = (\cot C - \cot A)\,\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}\operatorname{sen} C = (\cot C - \cot A)\,\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}\operatorname{sen} C,$$

luego:

$$\cot C - \cot A = \frac{\cos c - \cos a}{\mathrm{sen}\, a\, \mathrm{tg}\, \frac{1}{2} b\, \mathrm{sen}\, C} = \frac{-\frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}}{\frac{1}{2} a\, b\, (1 - \frac{a^2}{6})\,(1 + \frac{b^2}{12})\, \mathrm{sen}\, C} =$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a\, b\, \mathrm{sen}\, C}\; \frac{1 - \frac{a^2 + c^2}{12}}{1 - (\frac{2\, a^2 - b^2}{12})} = \frac{a^2 - c^2}{a\, b\, \mathrm{sen}\, C}\,(1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{12})$$

Por otra parte:

$$c\, \frac{\mathrm{sen}\,(A - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\mathrm{sen}\,(C - \frac{1}{3}\varepsilon)} = c\, \frac{\mathrm{sen}\, A \cos \frac{1}{3}\varepsilon - \cos A\, \mathrm{sen}\, \frac{1}{3}\varepsilon)}{\mathrm{sen}\, C \cos \frac{1}{3}\varepsilon - \cos C\, \mathrm{sen}\, \frac{1}{3}\varepsilon)} =$$

$$= c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C}\; \frac{1 - \mathrm{tg}\, \frac{1}{3}\varepsilon \cot A}{1 - \mathrm{tg}\, \frac{1}{3}\varepsilon \cot C} =$$

$$= c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} + c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C}\, \mathrm{tg}\, \frac{1}{3}\varepsilon\, (\cot C - \cot A) =$$

$$= c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} + c\, \frac{a}{c}\, \frac{1}{3}\varepsilon\, \frac{a^2 - c^2}{ab\, \mathrm{sen}\, C}\,(1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{12}) =$$

$$= c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} + \frac{a}{6}\,(a^2 - c^2)\, \frac{2\,\varepsilon}{ab\, \mathrm{sen}\, C}$$

Sabemos que se tiene:

$$\mathrm{arco\,sen}\; x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\, x^5}{40} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \text{ luego:}$$

$$\mathrm{arco\,sen}\; (\mathrm{sen}\, c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C}) =$$

$$= \mathrm{sen}\, c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} + \frac{1}{6}\, \mathrm{sen}^3 c\, \frac{\mathrm{sen}^3 A}{\mathrm{sen}^3 C} + \frac{3}{40}\, \mathrm{sen}^5 c\, \frac{\mathrm{sen}^5 A}{\mathrm{sen}^5 C} + \ldots\ldots$$

pero podemos poner:

$$\mathrm{sen}\;\; c = c - \frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{120}$$

$$\mathrm{sen}^3 c = c^3 - \frac{c^5}{2}$$

$$\mathrm{sen}^5 c = c^5$$

$$\frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} = \frac{\mathrm{sen}\;\; a}{\mathrm{sen}\;\; c} = \frac{a}{c}\,(1 - \frac{a^2 - c^2}{6})$$

$$\frac{\mathrm{sen}^3 A}{\mathrm{sen}^3 C} = \frac{a^3}{c^3}\,(1 - \frac{a^2 - c^2}{2})$$

$\dfrac{\mathrm{sen}^5 A}{\mathrm{sen}^5 C} = \dfrac{a^5}{c^5}$; y sustituyendo, tendremos:

$$\mathrm{arco\,sen}\; (\mathrm{sen}\, c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C}) = (c - \frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{120})\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} +$$

$$+ \frac{1}{6}\,(c^3 - \frac{c^5}{2})\, \frac{a^3}{c^3}\,(1 - \frac{a^2 - c^2}{2}) + \frac{3}{40}\, c^5\, \frac{a^5}{c^5} = c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} -$$

$$- \frac{1}{6}\,(c^3 - \frac{c^5}{20})\, \frac{a}{c}\,(1 - \frac{a^2 - c^2}{6}) + \frac{1}{6}\,(c^3 - \frac{c^5}{2})\, \frac{a^3}{c^3}\,(1 - \frac{a^2 - c^2}{2}) +$$

$$+ \frac{3}{40}\, a^5 = c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} - \frac{a}{6}\,(c^2 - \frac{c^4}{20})\;(1 - \frac{a^2 - c^2}{6}) +$$

$$+ \frac{a^3}{6}\,(1 - \frac{c^2}{2})\;(1 - \frac{a^2 - c^2}{2}) + \frac{3}{40}\, a^5 = c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} +$$

$$+ \frac{a}{6}\,(a^2 - c^2 - \frac{a^4}{20} - \frac{7\, c^4}{60} + \frac{a^2\, c^2}{6}) =$$

$$= c\, \frac{\mathrm{sen}\, A}{\mathrm{sen}\, C} + \frac{a}{6}\,(a^2 - c^2 - \frac{a^4}{20} - \frac{7\, c^4}{60} + \frac{3\, a^2\, c^2 + 7\, a^2\, c^2}{60}).$$

Y finalmente, reduciendo:

$$\text{arco sen}\left(\text{sen c}\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}}\right) = \text{c}\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} + \frac{a}{6}$$

$$\left[a^2 - c^2 - \frac{a^2}{20}(a^2-c^2) + \frac{7\,c^2}{60}(a^2-c^2)\right] =$$

$$= c\,\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} + \frac{a}{6}(a^2-c^2)\left(1-\frac{a^2}{20}+\frac{7\,c^2}{60}\right).$$

Sustituyendo, tendremos:

$$\delta a = c\,\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} + \frac{a}{6}(a^2-c^2)\frac{2\,\varepsilon}{\text{ab sen C}} -$$

$$- c\,\frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} - \frac{a}{6}(a^2-c^2)\left(1-\frac{a^2}{20}+\frac{7\,c^2}{60}\right);$$

de donde:

$$\delta\,a = \frac{a}{6}(a^2-c^2)\left(\frac{2\ \varepsilon}{\text{ab sen C}} - 1 + \frac{3\,a^2 - 7\,c^2}{60}\right)$$

Si calculamos ε por la fórmula $2\,\varepsilon = \text{ab sen C}$, tendremos:

$$\delta\,a = \frac{a}{6}(a^2-c^2)\ \frac{3\,a^2-7\,c^2}{60} = \frac{a}{360}\ (a^2-c^2)\ (3\,a^2-7\,c^2)$$

$$\delta\,b = \frac{360}{b}\ (b^2-c^2)\ (3\,b^2-7\,c^2)$$

Para apreciar el error hagamos una aplicación numérica. Si hacemos R (radio de la esfera) = 6400 kilómetros, a = 300 kilómetros y c = 100, tendremos para δ a expresada en metros:

$$\delta\,a = \frac{300}{360}\ \frac{\left(\overline{300}^2 - \overline{100}^2\right)\left(3\times\overline{300}^2 - 7\times\overline{100}^2\right)}{(6400)^4}\times 10^2 = \overset{m}{0{,}008}$$

Sin inconveniente alguno puede pues calcularse el exceso esférico por la fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\text{ab sen C}}{2\,R^2\,\text{sen }1''},\ \text{puesto que } \triangle' = \frac{1}{2}\,\text{ab sen C};$$

pero en la esfera osculatriz, $R^2 = \rho_p\,\rho_m$; y como

ρ_m(radio de curvatura en el meridiano) $= \dfrac{a\ (1-e^2)}{(1-e^2\,\text{sen}^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}$,

ρ_p (radio de curvatura en una sección normal) $= \dfrac{a}{(1-e^2\,\text{sen}^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}}}$,

$R^2 = \dfrac{a^2\,(1-e^2)}{(1-e^2\,\text{sen}^2\,\varphi)^2} = a^2(1-e^2)\,(1+2\,e^2\,\text{sen}^2\,\varphi)$ con suficiente aproximación.

Si hacemos abstracción de e^4, podemos poner:

$R^2 = a^2\,(1-e^2\cos 2\,\varphi)$; y sustituyendo:

$$\varepsilon = \frac{\text{a b sen C}}{2\,a^2\,(1-e^2\cos 2\,\varphi)\ \text{sen }1''}$$

Si hacemos $m = \dfrac{1}{2\,a^2\,(1-e^2\cos 2\,\varphi)\ \text{sen }1''}$, tendremos

$$\varepsilon = \text{a b sen C . m .}$$

A continuación tabulamos lg m para todas las latitudes de la República Mexicana, tomando los elementos de Clark para 1866.

O sea:

$$\text{lg a} = 6.8046985\ \ ;\ \ \text{lg e}^2 = 7.8305006$$

φ	lg. m.	φ	lg. m.
15	1.406 54	25	1.405 89
16	49	26	81
17	43	27	73
18	37	28	64
19	31	29	55
20	1.406 25	30	1.405 47
21	18	31	37
22	11	32	28
23	04	33	19
24	1.405 97	34	1.405 09

Por argumento se tomará la latitud que corresponde al punto medio de cada triángulo.

No sólo influyen en el error probable de un ángulo observado la perfección del instrumento que se emplea, la práctica del observador y el número de medidas efectuadas, sino también el arte y tino con que en general las operaciones se llevan. En cuanto son parte los errores de bisección, de lectura del círculo y de graduación, puede deducirse el valor del error probable de la comparación del promedio con los valores individuales; mas hay otros errores que sólo se manifiestan al cotejar las observaciones hechas en diferentes estaciones. De esta clase son los errores de centración, refracciones laterales y la faz de las señales. Por lo tanto, más confianza que la indicación propia de las mismas observaciones, debe inspirar el estudio de los errores acusados por las sumas de los tres ángulos de cada triángulo, obtenidos por medición directa.

Las tolerancias aceptadas por el Coast Suvery para el cierre de los triángulos son de 3'' en triángulos de 1er. orden, 8'' en los de 2° y 15'' en los de 3°. El error probable de las bases calculadas consideradas como lados de triángulos será de $\frac{1}{80000}$ en triangulaciones de 1er. orden, $\frac{1}{35000}$ en las de 2° y $\frac{1}{20000}$ en las de 3°; y las discrepancias entre las bases medidas y los cálculos será de $\frac{1}{25000}$, $\frac{1}{10000}$ y $\frac{1}{5000}$ respectivamente según el orden.

Ecuaciones de condición en una red geodésica son las que existen entre los valores de las cantidades excedentes, tales como por observación se hallan, y los valores de las mismas, tales como por cálculo resultan; pues, por ejemplo, cuando ya se tienen las observaciones necesarias para fijar todos los puntos, cualquier otro ángulo que se observe puede compararse con su valor calculado.

Si el número de elementos ó datos necesarios para calcular una red es m y se tienen m'>m, habrá m'—m elementos superfluos, que podrán expresarse en función de los m necesarios, resultando m'—m ecuaciones de condición.

Supongamos, pues, que en una red existan B bases medidas y A ángulos deducidos de las direcciones más probables en cada estación; y llamemos p el número de puntos ó vértices.

Para fijar la posición relativa de dos puntos basta con dar la distancia que los une; se necesita, pues, una condición. Si partiendo de este lado se quiere fijar otro punto, se necesitan conocer dos ángulos ó dos lados; es decir, dos condiciones por cada nuevo punto; por consiguiente, el número de condiciones necesarias para fijar la posición relativa de p puntos, será:

$$1 + (p - 2) = 2\,p - 3.$$

Como los elementos ó datos observados de la red son:

$$B + A,$$

el número de ecuaciones de condición será:

$$B + A - 2\,p + 3.$$

que en la práctica para facilitar su investigación se dividen en tres clases:

ecuaciones de bases,
ecuaciones de ángulo ó poligonales y
ecuaciones de lados.

Como una red sólo necesita una base para ser calculada, si hay B bases, habrá B—1 ecuaciones de bases. En todo rigor, en la ecuación que liga dos bases, deben corregirse tanto éstas como los ángulos de los triángulos que las unen; pero como el error de las bases es insignificante comparado con el de los ángulos y mucho mayor la influencia de éstos, no hay inconveniente en suponer las bases exactas, calculando tan sólo las correcciones correspondientes de los ángulos.

Ecuaciones de ángulo ó poligonales son las que expresan que la suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces 180° como lados tiene menos dos, más el exceso esférico. Si en un polígono trazamos una diagonal que sea observada de sus dos extremos, es claro que habrá dos ecuaciones de condición; es decir, por cada diagonal introducida habrá una ecuación más de condición; luego para d diagonales el número de ecuaciones será: d+1; pero en un polígono en el que haya l visuales recíprocas y p puntos en los que se haya observado, se tiene d=l—p; por consiguiente, el número de ecuaciones de ángulo será:

$$l - p + 1.$$

Se dice que una red es simple cuando tiene el número absolutamente indispensable de lados, y en tal caso el cálculo de éstos á partir de una base sólo puede hacerse siguiendo un camino, siendo tal número, según dijimos anteriormente:

$$2\,p - 3;$$

si pues en la red hay l lados, los superfluos serán:

$$l - 2\,p + 3,$$

é igual el número de ecuaciones de lado.

La suma de estas tres ecuaciones:

$$B - 1 + l - p + 1 + l - 2p + 3 \;=\; B + 2l - p - 2p + 3.$$

Si en una estación se observan l' direcciones, habrá l'—1 ángulos; si en otra se observan l'' el número de ángulos será l''—1; por consiguiente, el número de ángulos correspondiente á p estaciones; será:

$$l' + l'' + \ldots\ldots - p.$$

Si en una figura hay l lados observados recíprocamente, el número total de direcciones será 2 l ó l'+l''+...... =2 l; luego el número total de ángulos será:

$$A = 2\,l - p.$$

La ecuación anterior queda, pues:

$$B + A - 2\,p + 3,$$

idéntica á la dada anteriormente.

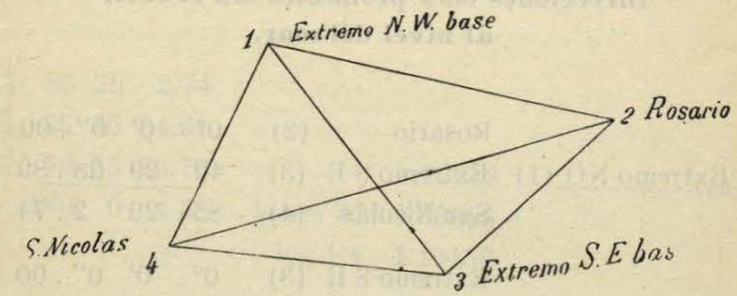
No debe olvidarse que en las ecuaciones de ángulo sólo deben entrar las líneas observadas recíprocamente y los vértices en que se hayan observado.

Según la teoría, todas las ecuaciones anteriores deben resolverse simultáneamente; pero para aminorar el trabajo, es común no considerar desde luego las ecuaciones de base, efectuando la compensación por figuras independientes, verificando solamente las condiciones de ángulos y lados, introduciendo después las ecuaciones de bases, eligiendo la cadena mejor configurada.

Debe tenerse presente que si se omite una ecuación de condición, la compensación es incompleta; y que si se introduce una ecuación de más, que se deduzca de las establecidas, á más de aumentarse el trabajo, puede caerse en una indeterminación; así es que debe procederse con método, estableciendo las ecuaciones paso á paso, á medida que se vayan presentando al desarrollar la figura.

Pongamos un ejemplo que aclare lo anterior é indique la manera de proceder.

Elijamos la siguiente figura:



Las condiciones indispensables para fijar los puntos de la figura, son:

$$2\,p - 3 = 5,$$

puesto que p=4; y en efecto, (1—3) es la base medida que fija la posición relativa de los puntos 1 y 3; y para fijar los puntos 4 y 2 es suficiente el conocimiento de dos ángulos ó dos lados para cada uno; en total, 5 condiciones.