Como se ve en la lámina número 3 los tripiés usados constan de dos partes, del tripié propiamente dicho, fácil de colocarlo rápida y aproximadamente en la dirección conveniente, y de una parte móvil que se ve en la lámina número 4, y que al moverla sobre la cabeza del tripié permite la alineación precisa y rápida de la varilla cilíndrica que queda sobre la cara del tripié. En fa varilla cilíndrica entra un prisma triangular que se afianza en cualquiera posición por medio de un tornillo, teniendo una arista muy aguzada que sirve para leer en la escala que llevan los alambres, y aunque el prisma no es muy ancho lleva, sin embargo, una línea en la parte media indicando el lugar donde debe hacerse la lectura.

Los tensores usados y la bobina con los alambres enrollados se ve la lámina número 4.

Los alambres se someten á la tensión de 10 kilos y se hacen tres lecturas en distintas posiciones de la escala, como se ve á continuación.

Modelo de registro usado por la Comisión Geodésica Mexicana.

Base de "La Cruz," 28 de diciembre de 1907.
Caminando de W. á E.
Hilo número 25.

I	D	D—I	T
15.6	20.0	+ 4.4	
20.6	25.0	4.4	28° 5
25.5	30.0	4.5	
Promedio		+ 4.43	

Corr. temp. + 0.11
Long. tramo Nº 1. + 4.54

De igual manera se continúa el trabajo.

Lámina 3.

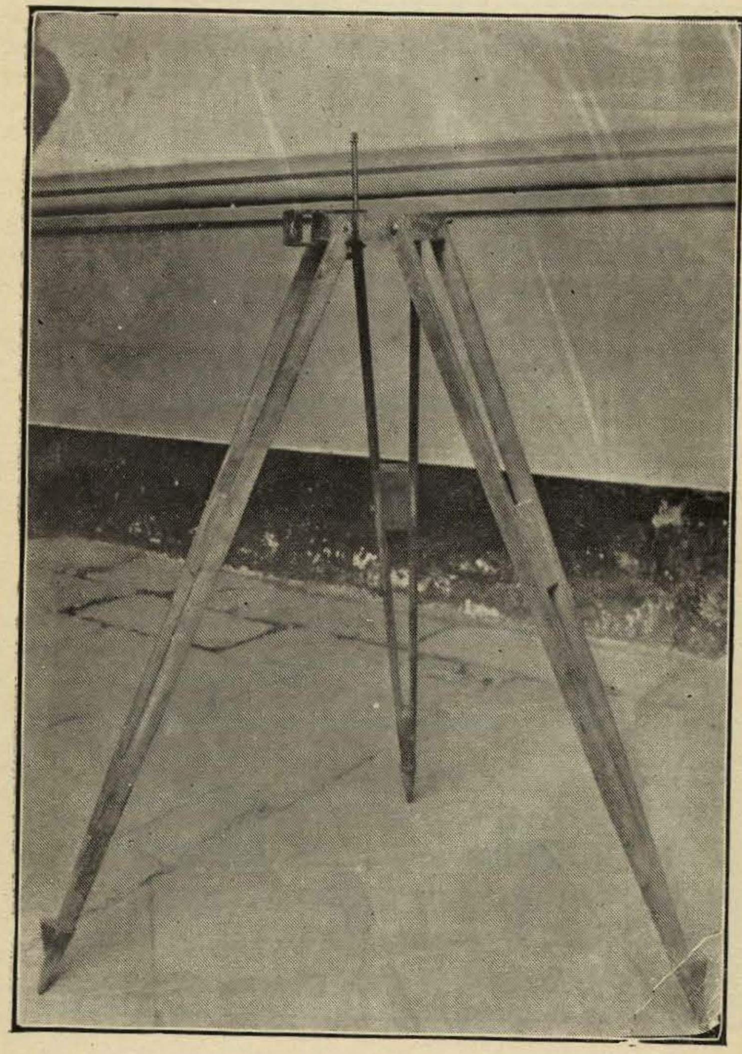


Lámina 4.

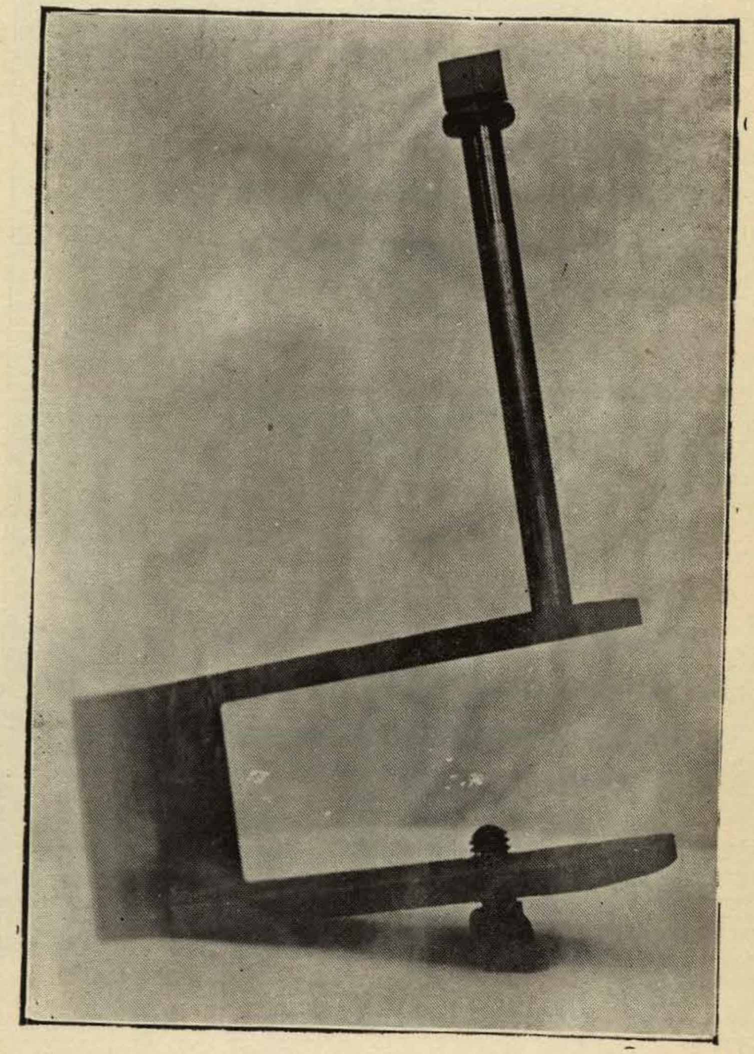
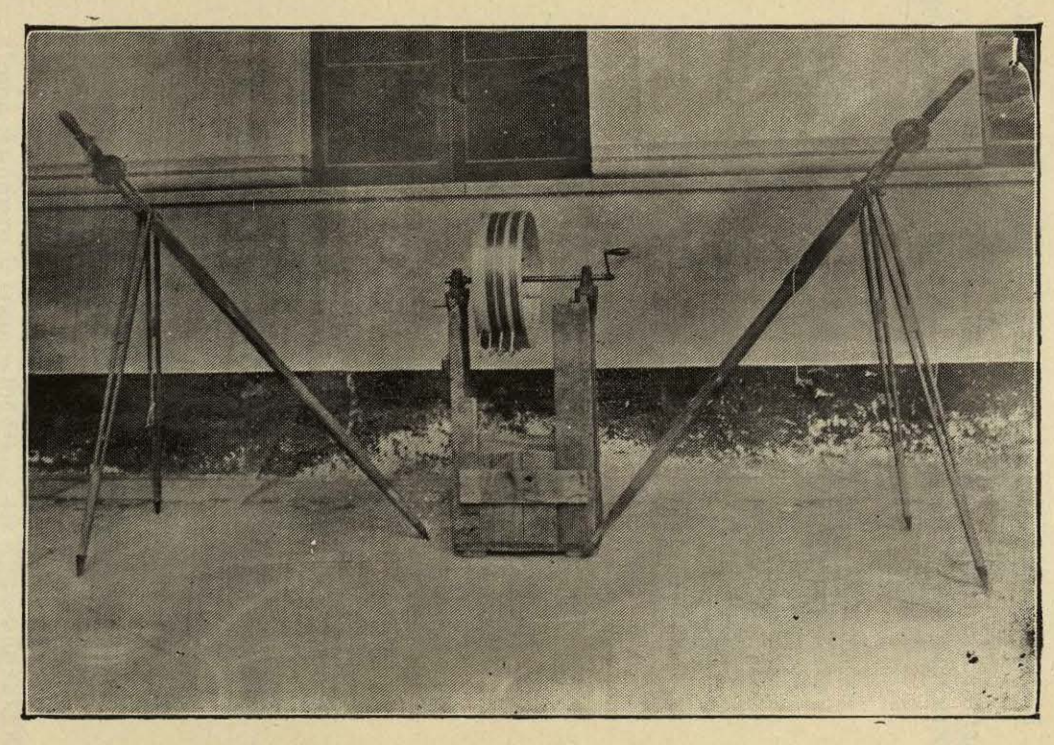


Lámina 5.



La longitud del alambre Nº 25 á 15° es $\overset{m}{24}+\overset{mm}{0.81}$, y su ecuación en función de la temperatura:

$$l_t = l_o\,(1+0.000000338\,t+0.00000000007\,t^2);\ \text{ó bien:}$$

$$l_t = l_{15^\circ} + l_{15}\,[0.000000338\,(t-15) + 0.00000000007\,(t^2-225)].$$

Haciendo variar t de cero á 35° se tiene la siguiente tabla, que permite hacer fácilmente las correcciones por temperatura:

Temperatura.	Corrección.
0	mm — 0.122
5	— 0.082
10	— 0.041
15	0.000
20	+ 0.041
25	+ 0.082
30	+ 0.123

La suma de todos los tramos en la primer
medida fué: — 353.34;
en la segunda: — 354.27 y
en la tercera: — 354.85

Promedio............ — 354.15

Error probable del promedio = ± $0^{mm}31$.

Cálculo del tramo.

Como el número de tramos fué 40......40 ×24=960.00000

40×0.81= ×0.03240

Corrección por lecturas.................................. —0.35415

Total = 959.67825

De igual manera se continúa.

Sin duda alguna, un hilo puede definir una longitud por la distancia rectilínea de sus extremidades, de la misma manera que una barra rígida; pero esta distancia no es igual en general, á la verdadera distancia comprendida entre las dos señales del hilo, es decir, á su longitud desarrollada tomada á lo largo de su eje, pues el hilo afecta una forma curvilínea y está sometido á una tensión que produce en él un alargamiento elástico; pero si la tensión del hilo es siempre la misma y si la acción de la pesantez es prácticamente invariable, es claro que la cuerda, que es la longitud definida en estas condiciones es siempre constante.

Sea $\underline{O}\ \underline{A}\ \underline{B}$ (fig. 8), nna catenaria referida á dos ejes rectangulares que pasan por su punto más bajo, y supongamos que la carga lineal es constante.

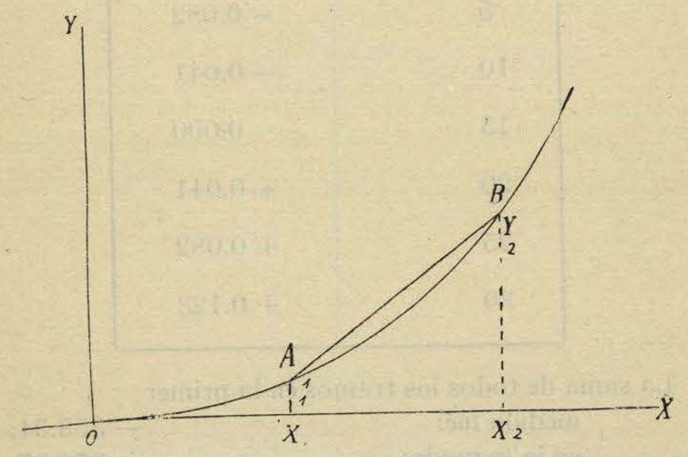


Figura 8.

Su ecuación será como es bien sabido:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} - 2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Hagamos $c = \dfrac{1}{2\,a}$ .... (2) con lo que:

$$y = \frac{1}{4\,a}\left(e^{2ax} + e^{-2ax} - 2\right); \text{ pero:}$$

$$e^{2ax} = 1 + 2\,a\,x + 2\,a^2\,x^2 + \frac{8\,a^3x^3}{6} + \frac{16\,a^4x^4}{24} + \frac{32\,a^5x^5}{120} + \\ + \frac{64\,a^6x^6}{720}$$

$$e^{-2ax} = 1 - 2\,a\,x + 2\,a^2x^2 - \frac{8\,a^3x^3}{6} + \frac{16\,a^4x^4}{24} - \frac{32\,a^5x^5}{120} + \\ \frac{64\,a^6x^6}{720};$$

luego constituyendo:

$$y = a\,x^2 + \frac{1}{2}\,a^3\,x^4 + \frac{2}{45}\,a^5\,x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

El valor de los términos del 2° miembro depende tanto del valor de a como de su alejamiento del origen; pero según la teoría de la catenaria, p siendo el peso del hilo por metro y f la tensión en el punto más bajo

$$c = \frac{f}{p} = \frac{1}{2\,a}\text{ ; de donde:}$$

$$a = \frac{p}{a\,f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

En los hilos usados su diámetro es de $1^{mm}65$, su densidad de 8.1 y su módulo de elasticidad 16 000 kilos por milímetros cuadrados; la sección es de 2^{mm2} 138 y su peso por metro lineal $17^{gra.}32$; luego.

$$a = \frac{17.32}{20\,000} = 0.000866,\text{ puesto que la ten-}$$

sión normol es de 10 kilos.

En la práctica, las coordenadas de un hilo dado, relacionadas al punto más bajo de la catenaria de que forma parte, dependen únicamente de las pendientes admitidas para la medida; si pues por esta causa el hilo ocupa la posición A B, y si llamamos $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ las coordenadas de sus extremos y α el ángulo que la cuerda A B forma con el eje de las X, es claro que:

$$\mathrm{tg.}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad\text{.............................}(5)$$

Si ponemos por las (y) los valores de la (3), limitado al primer término del desarrollo, tendremos:

$$\mathrm{tg.}\,\alpha = a\,\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = a\,(x_2 + x_1)\text{...............}(6)$$

Como caso extremo de la práctica común, podemos aceptar una pendiente de 10% ó sea tg. $\alpha = 0.1$; por consiguiente tendremos según la (6):

$$x_1 + x_2 = \frac{0.1}{0.000866} = 111^{m}111$$

Puesto que la longitud de los hilos es de 24^{m}

$$x_2 - x_1 = 24^{m}$$

luego

$$x_2 = 67^{m}56$$

$$x_1 = 43^{m}56$$

Con estos valores el tercer término del desarrollo de (y) para $x_2 = 67^{m}56$ y $a = 0.0009$ es muy próximo á 2μ; y para $x_1 = 43.56$ es 14 veces más pequeño. La tangente se modifica, pues, por este término, cantidad inferior á $\frac{1}{1.0000000}$, y el coseno, que importa conocer para reducir al horizonte, es afectado en menos de $\frac{1}{2.0000000}$; por consiguiente, el tercer término del desarrollo es despreciable.

Para conocer las variaciones de la longitud definida por un hilo tendido, cuando sus extremidades están situadas á niveles diferentes, es necesario calcular en función de las abscisas $x_1\, x_2$ la longitud del arco formado por el hilo y la longitud de la cuerda que lo subtende.

El arco está dado por la siguiente fórmula:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\frac{dy^2}{dx})}\; dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{1 + (2ax + \frac{4}{3}a^3x^3)^2\right\}^{\frac{1}{2}} xd =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{1 + \frac{1}{2}(2ax + \frac{4}{3}a^3x^3)^2 - \frac{1}{8}(2ax + \frac{4}{3}a^3x^3)^4\right\} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (1 + (2a^2x^2 + \frac{2}{3}a^4x^4)\quad dx$$

ó integrando:

$$l = (x_2 - x_1) + \frac{2}{3}a^2\,(x_2^3 - x_1^3) + \frac{2}{15}a^4\,(x_2^5 - x_1^5)$$

En el caso más desfavorable de la práctica, $x_2 < 68^{m}$ y $x_1 < 44^{m}$ y como sensiblemente: $a = 0.0009$, el 3er. término del desarrollo de l es menor que: $0^{m}.00002531$; por consiguiente puede despreciarse para los alambres, y aceptar para valor del desarrollo del arco la siguiente:

$$l = (x_2 - x_1) + \frac{2}{3}a_2\,(x_2^3 - x_1^3)$$

La cuerda tiene por valor:

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = x_2 - x_1)\,\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}\,;$$

$$\text{pero tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - = \frac{a\,(x_2^2 - x_1^2) + \frac{1}{3}(x_2^4 - x_1^4)\,a^3}{x_2 - x_1}$$

El 2º término del valor de tgα es menor que $0^{m}.0002$; pudiendo calcularse tgα con la precisión necesaria por la siguiente:

$$\mathrm{tg}\alpha = a\,\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = a\,(x_2 + x_1)\,;$$

por consiguiente:

$$\lambda = (x_2 - x_1)\left[1 + a^2 (x_2 + x_1)^2\right]^{1/2} =$$

$$= (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} a^2 (x_2 + x_1)^2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{8} a^4 (x_2 + x_1)^4 (x_2 - x_1)$$

La diferencia entre el arco y la cuerda será pues:

$$1 - \lambda = \tfrac{2}{3} a^2 (x_2^3 - x_1^3) - \tfrac{1}{2} a^2 (x_2 + x_1)^2 (x_2 - x_1) +$$
$$+ \tfrac{1}{8} a^4 (x_2 + x_1)^4 (x_2 - x_1) = \tfrac{4}{6} a^2 (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \times$$
$$(x_2 - x_1) - \tfrac{3}{6} a^2 (x_2^2 + 2 x_2 x_1 + x_1^2)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{8} a^4$$
$$(x_2 - x_1^4) \times (x_2 - x_1) = \tfrac{1}{6} a^2 (x_2 - x_1)^3 + \tfrac{1}{8} a^4 (x_2 + x_1)^3$$
$$(x_2^2 - x_1^2)$$

El último término en el caso más desfavorable de la práctica es inferior á 0m.0003; por consiguiente casi siempre inferior al límite de tolerancia en la lectura, pudiendo calcular con la precisión necesaria la diferencia entre el arco y la cuerda por la fórmula.

$$1 - \lambda = \tfrac{1}{6} a^2 (x_2 - x_1)^3 \text{; mas como}$$

$$\lambda = \frac{x_2 \; x_1}{\cos \alpha}, \text{ y } \alpha \text{ es siempre pequeño, podemos poner:}$$

$$1 - \lambda = \tfrac{1}{6} a^2 \lambda^3$$

Para una pendiente máxima del 10% podemos suponer constante la cuerda de la catenaria; mas para pendientes mayores es necesario llevar en cuenta su variación con la pendiente.

Aplicando esta fórmula para los alambres, tendremos que el acortamiento por la catenaria es:

$$1 - \lambda = \tfrac{1}{6} (0.000865)^2 (24)^3 = \tfrac{1}{6} (0.000000748225)$$
$$13824 = 0\text{m}.001724$$

Si ponemos en ella por a su valor quedará:

$$1 - \lambda = \frac{1}{6} \lambda^3 \frac{p^2}{4 f^2} = \frac{1}{24} \lambda^3 \; p^2 \frac{1}{f^2}$$

Para encontrar la deformación de la catenaria por variación en la tensión, diferenciemos la anterior, con lo que tendremos:

$$d\lambda = \frac{1}{12} \lambda^3 \; p^2 \frac{df}{f^3} = \frac{1}{3} \lambda \frac{df\, p^2}{f4\, f^2} = \frac{1}{3} a^2 \lambda^3 \frac{df}{f}$$

suponiendo l constante lo que equivale á suponer que no hay deformación elástica.

Numéricamente puede escribirse la anterior fórmula como sigue:

$$d\lambda = 0.003448 \; \frac{df}{f} \; (= 0.0003448 \; df \text{ para } f = 10 \text{kilos});$$

por consiguiente para que $d\lambda$ sea menor que 0.mm 1, es necesario que f sea menor que ⅓ de kilo, y como en $d\lambda$ entra el cubo de la distancia, se ve claramente la ventaja de los longímetros de pequeña longitud, así como las fuertes tensiones.

$$\text{Si } df = 0.^{k}1, \; d\lambda = 0.^{mm}034$$

Es sabido que el esfuerzo por unidad de superficie, es proporcional al alargamiento por unidad de longitud; por consiguiente, si la tensión f varía $\triangle f$, la longitud l variará $\triangle l$, cantidades que están ligadas por la siguiente ecuación:

$$\frac{\triangle f}{\delta} = E \frac{\triangle l}{l}$$

E, siendo el módulo de elasticidad y δ la sección recta del longímetro.

De la anterior se deduce:

$$\triangle l = \frac{l \triangle f}{\delta E}$$

Para los hilos empleados en la medida:
$\delta = 2mm^2.138$ y E 16.000 kilos por mm².; por consiguiente, puesto que $l=24$:

$$\Delta l = \frac{24000}{2.138 \times 16000} \Delta f = 0.7023 \, \Delta f,$$

la unidad siendo el milímetro:

Para $\Delta f = 0.^{k}1$ el alargamiento elástico sería:

$\Delta l = 0.^{mm}070$ y como por curvatura hemos encontrado: $\delta\lambda = 0.034$, la deformación total será la suma de: Δl y $d\lambda$ igual á 0.104.

Para calcular la flecha de la catenaria haremos uso de la (3) limitada á su primer término, ó sea:

$y = a\,x^2$, lo cual equivale á suponer que se confunde con una parabola.

Según la figura, para que (y) sea la flecha que designaremos por f, $x = x_2 = \frac{1}{2}\lambda$, luego:

$f = \frac{1}{4}\,a\lambda^2$; más como λ es constante é igual á 24:

$$f = 144\,a = 144\,\frac{p}{2f} = 72\,\frac{p}{f};\ \text{y como}$$

$$p = 0^{k}0173$$

$$f = 1.2456\,\frac{1}{f};$$

y para f = 10 kilos:

$$f = 0^{m}125$$

valor de la flecha de los alambres en las condiciones normales.

Hemos visto que $d\lambda$ disminuye cuando aumenta f, pero en la práctica no conviene que la tensión sea muy grande tanto para no producir alargamiento elástico permanente, como para disminuir los frotamientos.

Veamos ahora cómo influye en la longitud de los hilos la variación de la pesantez.

Cuando la tensión se da por medio de pesos, el hilo conserva su forma, pero su alargamiento elástico crece con la aceleración de la pesantez; por consiguiente la variación estará dada por la fórmula:

$$\Delta l = \frac{l}{\sigma E}\,\Delta f$$

Δf siendo la variación del peso con que se da la tensión debida á la variación de la pesantez.

Para los alambres *invar*, la anterior fórmula se escribe numéricamente como sigue:

$$\Delta l = 0.702\,\Delta f$$

las unidades siendo el milímetro y el kilógramo.

Para que Δl tenga importancia, es necesario que cuando menos $\Delta f = 0^{k}.1$, ó lo que es lo mismo, que el peso con que se da la tensión varíe á causa de la variación de la pesantez, $0^{k}.1$, cosa que no se verifica ni del Ecuador al Polo.

Cuando la tensión se da por medio de resortes, la deformación elástica es constante, pero la flecha aumentará con la intensidad de la pesantez; y para calcular sus variaciones, pongamos en la fórmula:

$$l - \lambda = \frac{1}{6}\,a^2\,\lambda^3\ \text{por a su valor, igual á}\ \frac{p}{2f},$$

con lo que tendremos:

$$l - \lambda = \frac{1}{24}\,\frac{p^2}{f^2}\,\lambda^3$$

Si diferenciamos con relación á p, puesto que l es constante, tendremos:

$$d\lambda = -\frac{1}{3}\,a^2\,\lambda^3\,\frac{d\,p}{p};$$

más como p es proporcional á g:

$$d\lambda = -\frac{1}{3}\,a^2\,\lambda^3\,\frac{d\,g}{g};$$

ecuación que para los alambres puede escribirse numéricamente:

$$d\lambda = 0.00345\,\frac{d\,g}{g};$$