

y cuya base exterior, de leve convexidad, está muy bruñida; y al otro extremo, ligada con la regla, una palanquita también de acero, cuyo brazo inferior acaba en un hemisferio pulimentado, que debe quedar en contacto con la regla inmediata, y cuyo brazo superior recorre un arco graduado, firmemente unido á la regla. Cuando una rayita ó índice en la extremidad de este brazo señala cierta división en mitad del arco, posee la regla la asignada; pero se sabe también la que á cualquiera otra lectura corresponde.

La regla de compensación de Colby, compuesta de dos, una de hierro y otra de latón, ambas de 10 pies de longitud, firmemente unidas en su parte media por dos cilindros transversales, lleva á cada extremo una palanquita metálica de unas seis pulgadas, que se articula con las dos componentes, de modo que no ofrece, aún cuando bien asegurada en ellas, impedimento á su dilatación.

En la extremidad de estas palanquitas hay dos señales microscópicas, cuya distancia permanece constante, pues estando fijas las reglas en su parte media, un aumento de temperatura hará mover las extremidades de tal manera, que permanezcan inmóviles las marcas colocadas en las extremidades de las palanquitas.

En los Estados Unidos, el profesor Bache ideó en 1845 un aparato, en el cual se encuentran combinadas el principio de las dobles reglas de Borda, la palanquita de compensación de Colby y la de contacto de Struve. Los metales empleados son el hierro y el latón.

Sistema enteramente distinto de los anteriores es el de Porro, adoptado por el Depósito de la Guerra de Francia, en las bases medidas en Argelia. Por este procedimiento sólo se usa una regla, con la cual se precisan, uno en pos de otro, iguales intervalos entre microscopios puestos sobre la línea, con los ejes ópticos verticales.

Los microscopios son cuatro y la longitud de la regla es de tres metros como el intervalo entre dos de aquellas consecutivas. Colocados en la dirección de la base los cuatro microscopios que llamaremos A, B, C y D, pónese primero la regla debajo de A y B, y léense éstos; trasládase debajo de B y C, mientras se coloca A con su sustentáculo tres metros más allá de D, y así sucesivamente.

Del mismo sistema, aunque con modificaciones y perfeccionamientos del comandante de Ingenieros, después General D. Carlos Ibáñez, y el Capitán de artillería D. Frutos Saavedra, es el aparato para medir bases que perteneció á la Comisión del Mapa de España. La longitud de la regla es de 4 metros ó más bien de dos toesas.

Las dos componentes de la regla son: una de latón y otra de platino, colocadas una sobre otra con una separación de 6^{mm}; sus dimensiones son iguales, y su sección transversal mide 21^{mm} por 5^{mm}. La longitud se dedujo de 120 comparaciones hechas con la regla número 1 de Borda.

De los aparatos usados por el Coast-Survey debemos mencionar las reglas de Hilgard, compuestas de una varilla de acero de 4 ó 5 metros de longitud que es la que sirve para la medida, llevando á uno y otro lado varillas de zinc dispuestas para funcionar como termómetros metálicos provistos de las escalas de Borda. El contacto entre dos se hace de una manera especial, ejerciendo presión por medio de un resorte hasta que dos rayas al principio separadas queden en prolongación, coincidencia que se aprecia por medio de una lente especial.

La modificación de este aparato ha sido llamada Aparato-Duplex ó regla de Eimbeck; se compone de dos varillas de 5 metros de longitud, una de acero y de latón la otra con contacto deslizante como las de Hilgard. Las dos varillas están colocadas dentro de un tubo que puede girar al derredor de su eje horizontal, y en las dos reglas los contactos se hacen acero con acero y latón con latón, leyendo las escalas de Borda convenientemente dispuestas.

Hace algunos años Jädering propuso el uso de cintas metálicas en las medidas lineales, afirmando podría obtenerse la precisión de 1/100000 aunque el trabajo fuera hecho al sol y con viento. Usó dos cintas de 25 metros de longitud: una de acero y la otra de cobre para que funcionara como termómetro metálico. Hizo uso de tripiés en la medida y las cintas las mantenía á tensión constante por medio de un dinamómetro.

El Coast and Geodetic Survey empleó las cintas de acero en la medida de las bases de Holton y M. Albans con espléndidos resultados, deduciendo de sus experiencias que puede alcanzarse la precisión del 1/1000000 sin gran esfuerzo; y la Comisión Geodésica Mexicana llegó á los mismos resultados en las medidas de las bases de Apam, Tecamachalco, Oaxaca y Rioverde. Las cintas usadas tienen una longitud de 100 ó de 50 metros, siendo más cómodo el trabajo con estas últimas; y se usan, ya rayando las extremidades ó leyendo en una extensión como de un decímetro que debe estar dividido en milímetros.

Actualmente se miden las bases geodésicas por medio de alambres invar de 24 metros de longitud dando la tensión con un peso constante y haciendo uso, en la medida, de tripiés para marcar en el terreno sus extremos.

El terreno elegido para medir una base debe ser llano, sin obstáculos, y tal que no sólo de cada extremo de ella se distinga el otro, sino que ambos se dominen de tales vértices de la triangulación, de manera que los lados de los triángulos, comenzando por la base, crezcan gradualmente.

Cualquiera que sea el aparato que se usa, es indispensable reducir rigurosamente la medida al plano vertical donde los extremos de la base se hallan, y determinar con exactitud la inclinación, respecto del horizonte del longímetro usado. A veces es necesario que dos ó más trozos de la base no estén con todo rigor en la misma recta, lo cual no es un inconveniente cuando se conocen los ángulos que las diversas partes forman entre sí; pero en cada segmento debe hacerse la medida en el mismo plano vertical.

Vamos á indicar con detalle la manera de medir bases con estos longímetros, por ser de actualidad y por haberse logrado grandes precisiones, á la vez que permiten operar rápidamente.

Indiquemos la manera de proceder en la medida de una base geodésica, haciendo uso como longímetro de una cinta de acero ó bien de alambres invar.

La diferencia esencial en el uso de uno ú otro longímetro estriba en la necesidad imprescindible de trabajar de noche haciendo uso de las cintas de acero, viniendo como consecuencia forzosa el estacado para determinar las extremidades de cada cinta; mientras que operando con metal invar, ya sea bajo la forma de alambre, ó bien de cinta, puede trabajarse de día sin inconveniente alguno.

La experiencia ha indicado la dificultad de determinar con precisión la temperatura de las reglas ó cintas metálicas; y los trabajos de los ingenieros del Coast and Geodetic Survey han demostrado, sin dejar lugar á duda, que operando de día, á los rayos del sol, hay siempre una diferencia de varios grados entre la temperatura que indican los termómetros de mercurio y la temperatura real de las cintas de acero, razón por la cual los resultados son bastante malos; mientras que operando de noche se logra conseguir que esa diferencia sea muy pequeña; pero como esa diferencia, más ó menos grande, según las circunstancias en que se opera, siempre existe, y como el coeficiente de dilatación del acero es bastante grande, de aquí una causa de error inherente á estos longímetros.

No pasa lo mismo con el metal invar, pues su coeficiente de dilatación siendo insensible, el error motivado por la incertidumbre de la temperatura carece de importancia.

La longitud más cómoda en las cintas de acero usadas

para medir bases geodésicas es la de 50 mts. con un apoyo intermedio, dando una tensión de 10 kilos, ya por medio de tensores de resorte, ya por medio de un peso constante.

La longitud de los alambres invar que actualmente se usan, es la de 24 mts. á la tensión de 10 kilos.

Los extremos de cada cinta se marcan sobre estacas de madera de 1^m5 de largo, por una sección de 0.08×0.10, debiendo quedar firmemente encajados en el suelo. Con alambres se usan tripiés de forma distinta, siendo bastante cómodos los usados por la Comisión Geodésica Mexicana y que describiremos adelante.

Una vez elegido el terreno y convenientemente preparado en la dirección en que debe efectuarse la medida, se construye el primer monumento, extremo de la base, y á poca distancia del otro extremo se coloca, lo más elevado que sea posible, una señal que marque la dirección, y que será ya un heliotropo ó bien una tabla, según la longitud de la base.

Hecho esto se procede á dividir la base en tramos próximamente de un kilómetro, división que se hace á medida que se va avanzando en el trabajo. La mejor manera de proceder es la siguiente:

Se instala un altazimut en el extremo construído y se visa la señal del otro extremo, quedando así definido el plano vertical en que debe quedar hecha la medida. Se empieza el estacado ó la colocación de los tripiés á la distancia exigida por el longímetro que vaya á usarse, y se continúa hasta completar sensiblemente un kilómetro, marcando tal punto en el terreno por medio de una estaca de madera de 2 mts. de largo por una sección de 0.10×0.20, sólidamente empotrada en el suelo. Terminado esto se procede á la medida del tramo, repitiéndola cuantas veces sea necesario para alcanzar una precisión determinada, siendo bastante con longímetros de acero 3 ó 4 medidas y sólo 2 con alambres.

Concluída la medida del primer tramo, se instala el altazimut en el primer kilómetro y siempre que se puede se visa la señal colocada en la terminación de la base; mas si á causa de las ondulaciones del terreno no se ve, se visa el extremo de atrás y midiendo un ángulo de 180° por medio del círculo, se tiene la dirección conveniente para avanzar, siendo esto preferible á hacer girar el anteojo sobre su eje horizontal para no tener que estar atendiendo á la colimación. El caso más favorable para la alineación será cuando siempre se vea la señal terminal, y el más desfavorable cuando sea necesario medir los ángulos. El trabajo se continúa de la manera descrita hasta llegar al otro extremo, construyendo el segundo monumento, de manera de no tener que leer fracciones del

longímetro usado, caso siempre posible en tanto que no se haya fijado *a priori* el otro extremo. En caso contrario se señala la fracción del longímetro, y su longitud se determina después.

Con las cintas se procede de la manera siguiente:

Se tiende ésta de manera que sus extremos se apoyen en la cabeza de las estacas, se da la tensión y se colocan dos termómetros al tercio de sus extremos, cuyo promedio se toma por la temperatura de la cinta. Todo listo, á la voz de "up" el observador del extremo de atrás hace que la cinta coincida con la señal y el de adelante lee la graduación de la cinta en el otro extremo, haciéndose á la vez la lectura de los termómetros, continuándose así toda la medida.

Sean l_0 la longitud del longímetro á cero grados, a su coeficiente de dilatación, t_1 la temperatura, promedio de los dos termómetros, y si llamamos λ_1 la lectura de la cinta, la longitud entre las dos primeras señales consecutivas será:

$$l_1 = l_0 (1 + a t_1) + \lambda_1; \text{ entre las dos siguientes}$$
$$l_2 = l_0 (1 + a t_2) + \lambda_2; \text{ y entre las dos últimas,}$$
$$l_n = l_0 (1 + a t_n) + \lambda_n.$$

Sumando estos valores tendremos la longitud del primer tramo dado por la primer medida, ó sea:

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = n l_0 + a l_0 (t_1 + t_2 + \dots + t_n) + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Si hacemos para simplificar:

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = L_1; t_1 + t_2 + \dots + t_n = T_1; \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \delta_1$$

la primera medida tendrá por valor:

$$L_1 = n l_0 + a l_0 T_1 + \delta_1; \text{ la segunda}$$

$$L_2 = n l_0 + a l_0 T_2 + \delta_2 \text{ y la iésima}$$

$$L_i = n l_0 + a l_0 T_i + \delta_i.$$

El promedio de las i repeticiones, valor definitivo del tramo será:

$$\frac{L_1 + L_2 + \dots + L_i}{i} = n l_0 + \frac{a l_0}{i} (T_1 + T_2 + \dots + T_i) + \frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_i}{i}$$

Si el primer miembro lo representamos por L podemos escribir la anterior:

$$L = n l_0 + \frac{a l_0}{i} \sum_i^1 T + \frac{1}{i} \sum_i^1 \delta$$

Para calcular el error probable, hagamos la diferencia entre este valor y cada uno de los valores individuales, obteniéndose:

$$L - L_1 = \frac{a l_0}{i} \left(\sum_i^1 T - i T_1 \right) + \frac{1}{i} \left(\sum_i^1 \delta - i \delta_1 \right) = \epsilon_1$$

De igual manera calcularemos $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_i$,

El error probable del promedio será pues, llamándolo:

$$\rho_1 = \pm \frac{2}{3} \left(\frac{[\epsilon^2]}{i(i-1)} \right)^{1/2}; \text{ el del 2º tramo será } \rho_2 \text{ que se}$$

calculará de igual modo, continuándose así hasta el último tramo.

El error probable de la base total dividida en i tramos será:

$$\rho_v = \pm (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_i^2)^{1/2}$$

Si la suma de los cuadrados de todos los errores la designamos $[E^2]$ y si la base se dividió en i' tramos habiendo medido cada tramo i veces, el error probable de un tramo deducido del conjunto de toda la medida será:

$$\rho_t = \pm \frac{2}{3} \left(\frac{[E^2]}{i i' - i'} \right)^{1/2}; \text{ y si la cinta ha cabido } n \text{ veces}$$

en el tramo, el error probable por puesta será:

$$\rho_p = \frac{\rho_t}{\sqrt{n}}$$

Pongamos un ejemplo para aclarar lo anterior, tomado de la medida de la base de Oaxaca.

En el tramo ó kilómetro núm. 3, tomamos del registro los siguientes valores:

$$\begin{array}{l}
 1^{\text{a}} \text{ medida } \left\{ \begin{array}{l} T_1 = 326^{\circ}8 \\ \delta_1 = 3.8500 \end{array} \right. \quad 2^{\text{a}} \text{ medida } \left\{ \begin{array}{l} T_2 = 302^{\circ}3 \\ \delta_2 = 3.8631 \end{array} \right. \\
 3^{\text{a}} \text{ medida } \left\{ \begin{array}{l} T_3 = 321^{\circ}5 \\ \delta_3 = 3.8544 \end{array} \right. \quad 4^{\text{a}} \text{ medida } \left\{ \begin{array}{l} T_4 = 262^{\circ}3 \\ \delta_4 = 3.8839 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El cálculo del error probable del tramo se dispone como sigue:

Nº del tramo	$T = \sum_{n=1}^i t$	iT	Diferencia	$\frac{\alpha l_0}{i} \times \text{Dif.}$	$\delta = \sum_{n=1}^i \delta$	$i\delta$	Diferencia	$\frac{1}{i} \text{ Dif.}$	ϵ en m m	ϵ^2	ρ
3	326.8	1307.2	- 94.3	-0.0132	3.8500	15.4000	+0.0514	+0.0129	-0.3	0.09	+0.48
	302.3	1209.2	+ 3.7	+0.0005	3.8631	15.4524	-0.0010	-0.0002	+0.3	0.09	
	321.5	1286.0	- 73.1	-0.0102	3.8544	15.4176	+0.0338	+0.0085	-1.7	2.89	
	262.3	1049.2	+163.7	+0.0229	3.8839	15.5356	-0.0842	-0.0211	+1.8	3.24	
	1212.9				15.4514				6.31		

$$i = 4; \alpha = 0.000011; l_0 = 50^{\text{m}}.000; \frac{\alpha l_0}{i} = 0.00014$$

Cálculo de la longitud del tramo.

Longitud de la cinta Nº 190 á 0º, con un apoyo intermedio y á 25 de tensión..... 49m.9920601 = l_0

$$\begin{array}{rcl}
 n l_0 = 20 \times 49.99206 & = & 999.8412 \\
 \frac{\alpha l_0}{i} \sum_{i=1}^n T & = & 0.1667 \\
 \frac{1}{i} \sum_{i=1}^n \delta & = & 3.8629 \\
 L & = & 1003.8708
 \end{array}$$

De igual manera se calculan todos los tramos. La suma de los cuadrados de todos los errores es:

$$115.03 = E^2$$

Número total de observaciones..... 37
 ,, ,, ,, tramos = i' 10

$$\rho_t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{115.04}{37-10}} = \pm 1.38 \text{ y}$$

$$\rho_t = \frac{1.38}{\sqrt{20}} = \pm 0.3$$

Veamos los errores inherentes al procedimiento seguido. Si no hubiera errores, toda la medida quedaría hecha en el plano vertical cuya traza es A B; pero al estacionarse en A visando B, el tramo A_1 puede formar con A B un ángulo de $\pm 10''$, suponiendo que el alineamiento se haga con aparato de $10''$; y como en el caso más desfavorable habrá que hacer el polígono 1, 2, 3.....n B, midiendo ángulos de 180° , en realidad habremos medido una línea quebrada, incuestionablemente mayor que A B.



El error cometido será pues igual al exceso en magnitud de la línea quebrada sobre la línea A B, que hubiera sido la línea medida si no hubiera habido error de alineamiento.

Sin duda alguna, el caso más desfavorable para un tramo será cuando á causa del alineamiento forme un ángulo de $10''$ con la línea A B, y el caso más favorable cuando quede paralelo á dicha línea; por consiguiente, el error máximo para un tramo será, en el supuesto de que valga 1000 metros y que sea $\alpha = 10''$, puesto que $h = \frac{1000 \times 10}{206265} = 0^{\text{m}}05$, el error $\frac{h^2}{2000} = \frac{0.0025}{2000} = 0^{\text{mm}}001$ y el mínimo cero. Como es indudable que habrá muchos tramos que queden paralelos, si aceptamos para cada tramo el error máximo que acabamos de calcular, tendremos un alejamiento entre la línea quebrada y la verdadera, que casi nunca se presentará en la práctica, pero en cambio tendremos un monto, á causa de este error, que nos servirá para apreciar la influencia del alineamiento por habernos puesto en un caso que, aunque posible, es muy poco probable.

Como actualmente, en geodesia, se prefieren bases gran-

des, valamos la influencia del alineamiento en una base de 25 klómetros, dividida en 25 tramos.

El error total será:

$$0^{mm}001 \times 25 = 0^{mm}025$$

cantidad enteramente despreciable.

Veamos la influencia del error de alineación en cada tramo. Aquí las estacas ó tripiés se alinean sin mover el aparato, y por lo mismo se separan de la verdadera línea la magnitud angular capaz de ser separada por el anteojo; si aceptamos que el poder amplificador sea como mínimo de 25, la magnitud angular máxima será de $\frac{90''}{25} = 3''6$ ó sea $4''$, aproximadamente.

En el caso de cintas de 50 metros,

$$h = \frac{50^m \times 4}{206265} = 0^m001,$$

y el error

$$\frac{0.001^2}{100} = 0^{mm}00001$$

para una cinta; y para todo el tramo

$$0^{mm}00001 \times 20 = 0^{mm}0002.$$

En el caso de los alambres,

$$h = \frac{24 \times 4}{206265} = 0.0005,$$

y el error

$$\frac{0.0005^2}{48} = 0^{mm}000005;$$

y para todo el tramo:

$$0^{mm}000005 \times 42 = 0^{mm}0002;$$

cantidad, como se ve, completamente despreciable.

Cualquiera que sea el longímetro usado, el dato por medio de él obtenido debe ser reducido al horizonte, para lo cual las reglas llevan consigo un eclímetro que permite medir el ángulo que forman con éste; mas cuando los longímetros son cintas ó alambres, es necesario hacer una nivelación sobre las cabezas de las estacas ó de los tripiés que señalan en el terreno los extremos de cada longímetro.

Si h es el desnivel obtenido por la nivelación, l distancia inclinada y c la corrección, tendremos:

$$c = 1 - l \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - l \left(1 - \frac{h^2}{2l^2} - \frac{h^4}{8l^4} - \dots\right); \text{ de donde:}$$

$$c = \frac{h^2}{2l} + \frac{h^4}{8l^3}$$

En terreno bien elegido es raro que h $\{ 2^m00$; por consiguiente para cintas de 50^m

$$\frac{h^4}{8l^3} = 0.016, \text{ valor despreciable.}$$

Para alambres, con $l = 24$ y $h = 1$ que corresponde sensiblemente á la misma pendiente de 4%,

$\frac{h^4}{8l^3} = 0.01$; por consiguiente para pendientes de 4% ó inferiores la corrección se calculará simplemente por la fórmula

$$c = \frac{h^2}{2l}$$

Como l es conocido con gran precisión, el error de c depende del de h.

Diferenciando, tendremos:

$$dc = \frac{h}{l} dh$$

Aunque la nivelación puede hacerse tan precisa como se quiera, es inútil como vamos á verlo; pues si hacemos $dh = 10^{mm}$, $l = 50$ mts. y $h = 1^m$, que para pendiente media es ya muy fuerte,

$$dc = \frac{10}{50} = 0.2; \text{ y para el tramo total}$$

$\Sigma dc = \pm 0.2 \sqrt{20} \{ 1^{mm} \}$; es decir inferior á $1/1000000$ del tramo.

En iguales condiciones de pendiente, para alambres, $l = 24$, $h = \frac{1}{4}$ y $dh = 10^{mm}$. luego:

$$dc = \frac{10}{96}; \text{ y para el tramo total}$$

$\Sigma dc = \frac{10}{96} \sqrt{42}$, cantidad también menor que un milímetro, ó que un $\frac{1}{1000000}$ del tramo.

Para hacer esta corrección en el kilómetro 3 de la base de Oaxaca, se hizo una nivelación de ida y vuelta sobre las estacas con la precisión antes indicada.

El cálculo se dispone como se ve á continuación:

KILOMETRO 3.			
Número de la estaca	h	h ²	$\frac{h^2}{2l}$
De 41			
á 42	0.494	0.244	0.00244
43	0.269	0.072	0.00072
44	0.023	0.001	0.00001
45	0.114	0.013	0.00013
46	0.300	0.090	0.00090
47	0.017	0.000	0.00000
48	0.045	0.002	0.00002
49	0.149	0.022	0.00022
50	0.034	0.001	0.00001
51	0.407	0.166	0.00166
52	0.258	0.067	0.00067
53	0.330	0.109	0.00109
54	0.664	0.441	0.00441
55	0.587	0.345	0.00345
56	0.270	0.073	0.00073
57	0.191	0.036	0.00036
58	0.224	0.050	0.00050
59	0.082	0.007	0.00007
60	0.092	0.008	0.00008
61	0.175	0.031	0.00031
			0.01778
Desnivel medio.			
0.236			

En geodesia la superficie de referencia es la superficie equipotencial de los mares, que coincide sensiblemente con su nivel medio. Veamos, pues, cómo se reducen las bases á este nivel.

Sean, B' la longitud total de la base reducida al horizonte, h la altura media del terreno sobre el nivel del mar y R_a el radio de la curvatura correspondiente á la sección hecha por el plano que contiene la base; si B es el valor de la base al nivel del mar, es claro que tendremos:

$$\frac{B}{B'} = \frac{R_a}{R_a + h}; \text{ de donde:}$$

$$\frac{B' - B}{B'} = \frac{h}{R_a + h}$$

Si llamamos x la corrección, despreciando h en presencia de R, tendremos:

$$x = \frac{B' h}{R_a}, \text{ con suficiente aproximación.}$$

La precisión de la corrección x depende de la longitud de la base y de la precisión con que se conozca h.

La nivelación de la base al mar más próximo se hace por una nivelación de precisión, y como veremos al tratar este asunto, si K es la distancia en kilómetros de la base al mar, el error ocasionado por la nivelación será de $5^{\text{mm}} \sqrt{K}$. El nivel medio del mar se determina por observaciones que duran cuando menos un año, pero que se prolongan durante años, siendo posible que las observaciones por medio del medimareómetro durante un año asignen el nivel medio con incertidumbre inferior á un décímetro; de manera que aun suponiendo K = 1000 kilómetros, el error de h será siempre inferior á 0^m500, tolerancia aceptada por la Comisión Geodésica.

Pongamos un ejemplo de medida con alambres.

Los extremos de los alambres están formados por dos aditamentos de metal invar de forma prismática, teniendo una de sus caras dividida en milímetros desde cero hasta completar ocho centímetros en un extremo, y en el otro desde 24 hasta completar también ocho centímetros, resultando á causa de esto que las lecturas del extremo "cero" serán negativas y positivas las del extremo "24." Por la manera de colocar el alambre al medir, el primer extremo queda á la izquierda y se designa por la letra I y el segundo á la derecha y se designa por la letra D.