Las correcciones angulares serán:

$$A - X = - 0.552$$
$$B - X = - 0.367$$
$$C - X = - 0.548$$
$$D - X = - 0.400$$
$$E - X = + 0.254$$

y los ángulos más probables:

1.2....60.45				
1.3....31.63	2.3....31.18			
1.4....17.45	2.4....17.00	3.4....45.82		
1.5....44.60	2.5....44.15	3.5....12.97	4.5....27.15	
1.6.... 8.25	2.6.... 7.80	3.6....36.62	4.6....50.80	5.6 ‖ 23.65

Comparados estos ángulos con los escritos en las columnas (1.2), (1.3), se tendrán las $v_{1.2}$, $v_{1.3}$, $v_{1,s}$, cuyos cuadrados los representaremos por:

$$[v\ v]$$

El error medio cuadrático será:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\ v]}{\text{Nº de observaciones—Nº de incógnitas}}} = \sqrt{\frac{[v\ v]}{\frac{s\,(s-1)}{2} - (s-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,[v\ v]}{(s-1)\ \ (s-2)}}$$

Manera especial de proceder de Schreiber.

En el metódo de ángulos, considerado de una manera general, cada uno de los $\frac{s[s-1]}{2}$ ángulos que forman las s direcciones combinadas dos á dos, pueden ser medidos un número cualquiera de veces; mas en la manera especial de proceder de Schreiber, todos los ángulos deben ser medidos el mismo número de veces. Toda observación de un ángulo entre dos direcciones h y k, consiste en dos medidas hechas en el mismo montaje, una con un círculo á la derecha y otra á la izquierda; la observación exigiendo cuatro visadas, á saber. 1ª visada según h; 2ª visada según k; 3ª visada según k, y 4ª visada según h. Estas dos medidas, una en un sentido, otra en sentido contrario, constituyen un par.

En el método de las direcciones, (método de Bessel), se opera por series. Para cada serie se deja el limbo fijo en el mismo montaje y se visan sucesivamente sea todas las señales por observar, si es posible, sea solamemte las que son visibles, resultando las series completas ó incompletas.

Cualquiera que sea el método empleado, sea en una estación p el peso de una *dirección final;* es decir, el valor más probable que resulta para esa dirección del conjunto de observaciones hechas en la estación; sea en el método de ángulos, q el número total de medidas de un ángulo y $q'=\frac{q}{2}$ el número de pares de este ángulo. Se sabe que tomando por unidad de peso, en el método de ángulos, el peso de una observación del par, es decir, el peso del promedio del ángulo entre los dos ángulos observados que forman el par, y lo que es equivalente en el método de direcciones, el peso de una observación de dirección, se obtiene el mismo valor para el peso p de una dirección final observando $\frac{p}{s}$ pares de cada ángulo, por el método de ángulos que p series completas por el método de direcciones.

Según lo que acaba de decirse, se tiene pues:

$$\frac{p}{s}=\frac{q}{2} \text{ ó}$$

$$p=\frac{sq}{2}=sq'$$

Por consiguiente, para dar á las direcciones finales en todas las estaciones, pesos tan iguales como sea posible entre sí, ó iguales á un número P previamente fijado según la precisión que se quiera obtener, y esto en el supuesto de ser s variable en cada estación, es necesario adoptar en cada una de ellas un valor q diferente, aceptando el valor par que satisfaga mejor á la relación:

$$q=\frac{2P}{s}$$

Una vez conocido q, se deduce p de manera que difiera muy poco de P, formando, como sigue, el cuadro de las observaciones por hacer en cada estación.

FORMACIÓN DEL CUADRO DE OBSERVACIÓN.

Deben observarse q' pares de cada ángulo en q' montajes, dividiendo en partes iguales el intervalo de dos microscopios consecutivos del círculo; si pues N es el número de microscopios, el intervalo del montaje será $\frac{360°}{Nq'}$.

Los montajes iniciales de que se debe partir para los diferentes ángulos, son determinados por las condiciones siguientes: deben dividir en partes iguales el intervalo $\frac{360°}{Nq'}$, y su número debe ser el número mínimo que permita medir en montajes diferentes todos los pares que contengan una dirección común, de manera que cada dirección sea observada solamente dos veces en el mismo montaje, y esto durante la observación de un solo y único par. De lo anterior resulta que el número de montajes iniciales será s-1 ó s, según que s es par ó impar. En efecto, en un montaje inicial se pueden observar cuando más $\frac{s}{2}$ ángulos, si s es par y $\frac{s-1}{2}$ si s es impar, porque si no, una misma dirección entraría en dos ó varios ángulos observados en el mismo montaje. Como el número total de ángulo es $\frac{s[s-1]}{2}$, el número mínimo de montajes iniciales satisfaciendo á las condiciones anteriores será:

$$\frac{s\ (s-1)}{2}\div\frac{s}{2}=s-1, \text{ s siendo par; ó}$$

$$\frac{s\ (s-1)}{2}\div\frac{s-1}{2}=s, \text{ para s impar}$$

El intervalo será pues $\frac{360°}{Nq'(s-1)}$ para s par, y $\frac{360°}{Nq's}$ para s impar. Llamemos á estos intervalos:

I, II, III, IV ....

Queda por repartirlos sobre los diferentes ángulos de manera de emplear cada uno de ellos el mismo número de veces y no observar una dirección cualquiera en un montaje dado, sino durante la observación de un solo y único par. Esta repartición puede hacerse de muchas maneras. Los cuadros siguientes, sin tener nada de absoluto, pueden servir de tipo, indicando el mecanismo por emplear. El montaje inicial correspondiente al ángulo de las direcciones 2 y 3, por ejemplo, se encuentra en la intersección de la línea 2 y de la columna 3. En cada línea ó columna, los montajes se siguen en el orden natural, excepción hecha para la última columna del primer cuadro, en la cual un montaje sobre dos es omitido.

Primer caso: s par, $s-1$ montajes iniciales. Supongamos $s = 6$; $s-1 = 5$.

	2	3	4	5	6
1	I	II	III	IV	V
2		III	IV	V	II
3			V	I	IV
4				II	I
5					III

Segundo caso: s impar, s montajes diferentes.

Supongamos $s = 5$.

	2	3	4	5
1	I	II	III	IV
2		III	IV	V
3			V	I
4				II

Esta repartición hecha, se puede preparar un cuadro dando los montajes en los cuales los q' pares diferentes de los $\frac{s(s-1)}{2}$ ángulos deben ser observados. Como debe observarse en las dos posiciones del instrumento, la mitad de las medidas de cada ángulo se observará en una posición y el resto en la otra posición.

En el método de direcciones es común cambiar el círculo de 15 en 15 grados, resultando, pues, una visual repetida 24 veces, siendo por lo mismo tal número el peso. Schreiber se propone que todos los ángulos compensados tengan el mismo peso, en todas las estaciones cualquiera que sea el número de visuales; si pues en una estación hay s visuales, el número de ángulos será:

$\frac{s(s-1)}{2}$ y el peso del ángulo compensado sin repetir será:

$\frac{s}{2}$ y su peso después de n repeticiones $\frac{ns}{2}$.

Para mayor claridad calculemos las anteriores expresiones para distintos valores de n y s.

Número de visuales	Número de ángulos $\frac{s(s-1)}{2}$	Peso de un ángulo sin repetir $\frac{s}{2}$	Número de repeticiones n	Peso del ángulo n veces repetido q $p = \frac{ns}{2}$
2	1	1.0	24	24
3	3	1.0	16	24
4	6	2.0	12	24
5	10	2.5	10	25
6	15	3.0	8	24
7	21	3.5	8	28
8	28	4.0	6	24
				24.7

Procediendo como lo indica la tabla anterior, se logrará que todos los ángulos tengan el mismo peso sensiblemente, con la única condición de determinar el número de repeticiones atendiendo al número de visuales.

Si cada ángulo debe repetirse q veces, $q' = \frac{q}{2}$ y para dos microscopios $N = 2$, luego el incremento de los ángulos para un montaje dado será:

$$d = \frac{360}{2x\frac{q}{2}} = \frac{360}{q};$$

y la repartición del montaje se hará calculando á δ por la siguiente:

$$\delta = \frac{360}{2\,x\,(s-1)} = \frac{360}{q\,(s-1)} \text{ para s par, y}$$

$$\delta = \frac{360}{q\,s} \text{ para s impar.}$$

EJEMPLO:

$$s = 6 \text{ visuales; } \frac{s\,(s-1)}{2} = 15 \text{ ángulos.}$$

Según la tabla, para 6 visuales debe hacerse $q = 8$; luego $d = \frac{360}{8} = 45°$; es decir, de 45° en 45° variará el ángulo de montaje inicial.

Para la repartición al cambiar de visual, $\delta = \frac{360}{8 \times 5} = 9°$; y como $s - 1 = 5$, sólo habrá 5 ángulos iniciales ó 5 montajes distintos, variando de 9 en 9°.

Con lo anterior se calculará la tabla siguiente:

REPARTICION DEL MONTAJE INICIAL EN LOS DIFERENTES ÁNGULOS.

	I 2	II 3	III 4	IV 5	V 6
1	0	9	18	27	36
2		18	27	36	9
3			36	0	27
4				9	0
5					18

Lecturas del círculo en que debe observarse cada ángulo.

ANGULOS	I	I	II	III
1.2	0	45	90	135
1.3	9	54	99	144
1.4	18	63	108	133
1.5	27	72	117	162
1.6	36	81	126	171
2.3	18	63	108	153
2.4	27	72	117	162
2.5	36	81	126	171
2.6	9	54	99	144
3.4	36	81	126	171
3.5	0	45	90	135
3.6	27	72	117	162
4.5	9	54	99	144
4.6	0	45	90	135
5.6	18	63	108	153

Hagamos otro ejemplo para s = 5.

Las tablas dan para s = 5, q = 10; $\frac{s(s-1)}{2}$ = 10 ángulos.

$$d = \frac{360}{q} = \frac{360}{10} = 36$$

$$\delta = \frac{360}{10 \times 5} = 7.2$$

Repartición del montaje inicial en los diferentes ángulos.

	I 2	II 3	III 4	IV 5
1	0	7.2	14.4	21.6
2		14.4	21.6	28.8
3			28.8	0.0
4				7.2

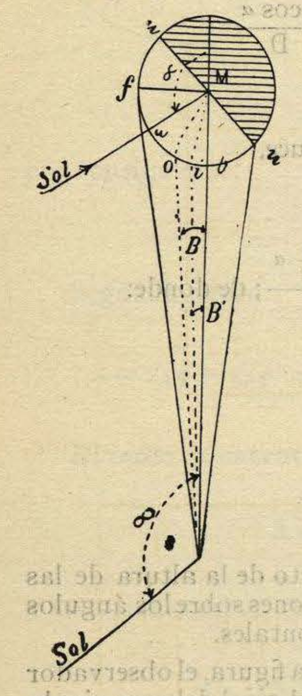
Lecturas del círculo en que debe observarse cada ángulo.

ANGULOS	I	I	III	II	II
1.2	0	36.0	72.0	108.0	144.0
1.3	7.2	43.2	79.2	115.2	151.2
1.4	14.4	50.4	86.4	122.4	158.4
1.5	21.6	57.6	93.6	129.6	165.6
2.3	14.4	50.4	86.4	122.4	158.4
2.4	21.6	57.6	93.6	129.6	165.6
2.5	28.8	64.8	100.8	136.8	172.8
3.4	28.8	64.8	100.8	136.8	172.8
3.5	0.0	36.0	72.0	108.0	144.0
4.5	7.2	43.2	79.2	115.2	151.2

Como s es impar, en dos posiciones se observa en la misma graduación.

A las direcciones más probables, calculadas como se dijo anteriormente, deben hacerse dos correcciones: corrección por la faz de las señales visadas y por su altura sobre el nivel del mar.

En general, no habrá lugar á la corrección por faz dado que las señales frecuentemente usadas en los trabajos geodésicos, son tablas orientadas normalmente á la dirección visada ó bien heliotropos; sin embargo, como suelen usarse señales de forma cilíndrica ó cónica, y en este caso la superficie iluminada depende de la posición del sol, vamos á indicar el error que puede cometerse y la manera de llevarlo en cuenta.



Sea en la figura A la estación y M la señal de radio M ξ = r; supongamos que el sol ocupa la posición definida por el ángulo α medido en la estación A y llamemos D la distancia A M siempre muy grande.

La bisección puede hacerse de dos maneras: ó bien dividiendo en dos partes la posición más brillante a b, y por lo mismo haciendo la bisección en c, cometiendo un error medido por el ángulo c A b = β; ó por el contrario, dividiendo en dos partes la porción visible f c m definida por la tangente A f y por la línea A m, n m siendo normal á la línea M — Sol, haciéndose en este caso la visección en c', medio de f c m, cometiéndose un error medido por el ángulo c' A b = β'.

En el primer caso, el ángulo a M b = $180 - \alpha$ y c M b = $90 - \frac{1}{2}\alpha$; por consiguiente, en el triángulo c M b,

$$c\,b = r \cos \frac{1}{2}\alpha; \text{ y en el triángulo c b A}$$

$$c\,b = D\,\beta \operatorname{sen} 1''; \text{ luego:}$$

$$\beta = \frac{r \cos \frac{1}{2}\alpha}{D \operatorname{sen} 1''}$$

En el segundo caso, si hacemos (f A c') = (c' A m) = S, el triángulo A f M nos da:

$$(S + \beta')\ \text{sen}\ 1'' = \frac{r}{D};$$

y el triángulo A M m

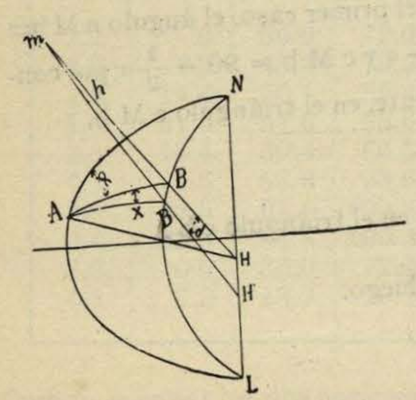
$$\frac{\text{sen}\ (S-\beta')}{r} = \frac{\text{sen A M m}}{D} = \frac{\text{sen}\ (\alpha - 90)}{D}$$ ó

$$(S-\beta')\ \text{sen}\ 1'' = -\frac{r \cos \alpha}{D}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce,

$$2\beta'\ \text{sen}\ 1'' = \frac{(1+\cos\alpha)\,r}{D} = \frac{2\,r \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{D};$$ de donde:

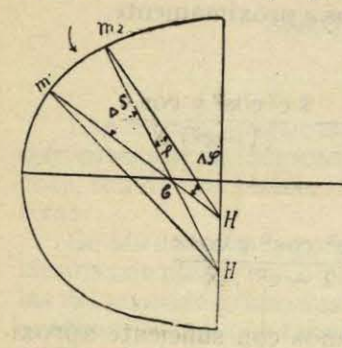
$$\beta' = \frac{r \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{D\ \text{sen}\ 1''}$$



Efecto de la altura de las estaciones sobre los ángulos horizontales.

En la figura, el observador en A al nivel del mar visa la señal M á la altura h sobre el nivel B del mar. El plano vertical en A proyecta M en B según la línea M H, A H siendo la normal de A; mientras que la vertical de M siendo M H' proyecta M en B', resultado de aquí un error en los ángulos horizontales medido por el ángulo B A B' = x.

Investiguemos primero el ángulo δ que forman las dos líneas proyectantes que parten de M. Si C es la intersección de las normales de M_1 y M_2 que están en el mismo meridiano á la distancia Δs, C será el centro de la curvatura del arco $M_1 M_2$ y llamando R al radio, tendremos:



$$\Delta s = R \Delta \varphi$$

Si M_1 H = N es la normal de M_1 y llamamos $\Delta\varphi'$ el ángulo M_1 H M_2, diferencia de latitud, tendremos:

$$\Delta s = N \Delta \varphi';$$

por consiguiente:

$$\frac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi} = \frac{R}{N}$$

Según la figura:

$$\delta = \Delta\varphi - \Delta\varphi' = \Delta\varphi\ (1 - \frac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi}) = \Delta\varphi\ (1 - \frac{R}{N})$$

El radio de curvatura en el meridiano es

$$R = \frac{a\ (1-e^2)}{(1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi)^{3/2}}$$

y la normal mayor

$$N = \frac{a}{(1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi)^{1/2}};$$

luego:

$$\frac{R}{N} = \frac{1-e^2}{1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi};$$

sustituyendo, tendremos:

$$\delta = \Delta\varphi\ (1 - \frac{1-e^2}{1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi}) = \frac{\Delta\varphi\, e^2 \cos^2 \varphi}{1-e^2\ \text{sen}^2\ \varphi}$$

Si proyectamos A B = s sobre el meridiano de A y contamos el azimut del S al N por el Oeste, como es costumbre en geodesia, se tendrá: $R \triangle \varphi = -s \cos \alpha$ próximamente.

Eliminando á $\triangle \varphi$, resultará:

$$\delta = -\frac{s\, e^2 \cos^2 \varphi \cos \alpha}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\, R} = -\frac{s\, e^2 \cos^2 \varphi \cos \alpha}{(1-e^2)\, N}$$

En el triángulo M B B'

$$B\,B' = h\delta = -\frac{h\, s\, e^2 \cos^2 \varphi \cos \alpha}{(1-e^2)\, N}$$

En el triángulo A B B' tendremos con suficiente aproximación

$$\frac{x}{B\,B'} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{s}\text{; de donde}$$

$$x = -\frac{B\,B' \operatorname{sen} \alpha}{s} = \frac{h\, e^2 \cos^2 \varphi \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{(1-e^2)\, N};$$

$$\text{y como } N = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{½}} = a\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)$$

con bastante aproximación, si sustituímos su valor y expresamos x en segundos, tendremos:

$$x'' = \frac{h\, e^2 \cos^2 \varphi \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{a(1+\frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - e^2) \operatorname{sen} 1''} =$$

$$= \frac{h\, e^2}{2\, a \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2\, \alpha \cos^2 \varphi;$$

y como:

$$\frac{e^2}{2\, a \operatorname{sen} 1''} = 0.00011$$

$$x'' = 0.00011\, h \operatorname{sen} 2\, \alpha \cos^2 \varphi,$$

sin que sea necesario conocer h con gran precisión, pues un error dh en h producirá otro en x'' que será:

$$d\, x'' < 0.00011\, dh.$$

Si $d\, x'' = 0.''01$, $dh = 100$ metros, y con este error en h en general no se afectaran los centésimos de segundo.

Medida de bases.

Las reglas geodésicas empleadas en los distintos países, diferentes por su longitud, forma y materia de que están hechas, son de dos clases: reglas con rayas y reglas con conteras.

En las del primer grupo, las rayas están grabadas sobre láminas de plata, oro ó platino incrustadas en la regla; y en las del segundo grupo sus extremos están formados por pequeños cilindros que terminan en un disco ó en un casquete esférico de ágata ó de metal duro y bruñido.

En casi todas las medidas geodésicas de Europa la unidad ha sido la toesa del Perú, regla de conteras, de la cual existen además de la copia de Borda, las de Struve y Bessel.

La regla inglesa tiene diez pies de extensión lineal, y por sección un rectángulo de ½ pulgada de base por ⅔ de altura. Descansa sobre dos rodillos que distan de los extremos un cuarto de la longitud, y las rayas que señalan la longitud están en los extremos de la regla rebajados hasta la mitad para dejar descubierta la sección neutra, en la cual se grabaron las rayas. El tipo del Instituto Geográfico de España es una regla de 4 metros de largo, compuesta de dos láminas unidas formando una ⊥, donde los trazos que sirven de índices se hallan sobre el canto superior de la lámina vertical.

Para saber la longitud que una regla metálica posee en determinado momento, requiérense tres datos: su longitud á cierta temperatura, su coeficiente de dilatación y su temperatura en el momento de operar. El primer dato se obtiene por la comparación de la regla con un patrón, el segundo por experiencias especiales y el tercero, ó sea la temperatura en el momento de operar, se hace ó por medio de termómetros de mercurio convenientemente colocados en la regla, ó por el método de Borda que consiste en componer la regla con dos metales, cuyos coeficientes de dilatación difieren mucho, formando de este modo un termómetro metálico, ó bien por el método de Colby, en el cual, por una sencilla combinación mecánica, se consigue que las dos reglas de distintos coeficientes ofrezcan dos puntos á distancias permanentes.

El aparato para medir bases usado por el astrónomo ruso F. W. Struve, consta de cuatro reglas de hierro, cada una de dos toesas de longitud. A un extremo lleva cada regla un cilindrito de acero, cuyo eje coincide con el de aquélla,