Supongamos que el círculo nos representa el horizonte verdadero y Z la proyección del zenit real. Sean V el polo del limbo instrumental; Z A_0 la traza del plano que contiene la vertical y el eje azimutal del aparato, A_0 siendo la lectura desconocida del círculo azimutal; Z M y Z M' las trazas de los planos verticales que pasan por las señales visadas, y Z K y Z K' las trazas de los planos verticales que contienen el eje de altura.

Es claro que:

arco Z V$=\gamma$ (desviación del eje azimutal del aparato, medida por el nivel paralelo)

arco V K$=$arco V K'$=90^\circ-\gamma_1$, γ_1 siendo el ángulo que el eje alturas hace con el círculo; γ_1 es pues la altura del punto K sobre este círculo.

arco K M$=$K' M'$=90^\circ+$c, c siendo la colimación

A_m A'_m A_k A'_k serán los azimutes astronómicos de los puntos M, M', K y K'

arco Z M $=\xi$ distancia zenital del punto M.
arco Z M'$=\xi'$ „ „ „ „ M'.

$$\left.\begin{array}{l}\text{arco Z K} = 90 - \text{b} \\ \text{arco Z K}' = 90 - \text{b}'\end{array}\right\}$$ b y b' siendo las inclinaciones del eje sobre el horizonte, correspondientes á los dos azimutes, inclinaciones dadas por el nivel montante.

El triángulo esférico Z V K nos da:

cos (KV)$=$cos (KZ) cos (ZV)$+$sen (KZ) sen (ZV) cos (KZV) ó sen $\gamma_1=$sen b cos $\gamma+$cos b sen γ cos (A_k-A_o); puesto que se trata de arcos muy pequeños:

$\gamma_1=\text{b}+\gamma\cos(A_k-A_o)$; de donde:

$$\left.\begin{array}{l}\text{b}=\gamma_1-\gamma\cos(A_k-A_c) \\ \text{b}'=\gamma_1-\gamma\cos(A'_k-A_o)\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Los triángulos K V K' y K Z K' nos dan:

$$\cos(\text{K K}')=\text{sen}\,\gamma_1\,\text{sen}\,\gamma_1+\cos\gamma_1\cos\gamma_1\cos(\text{K V K}')$$
$$\cos(\text{K K}')=\text{sen b sen b}'+\cos\text{b}\cos\text{b}'\cos(\text{K Z K}')$$

Puesto que γ_1 b y b' son cantidades muy pequeñas, tendremos:

cos (K K')$\doteq$cos (K V K')
cos (K K')$=$cos (K Z K'); de donde:

$$\text{K V K}'=\text{K Z K}'\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

K V K' es el ángulo que ha girado el instrumento, que llamaremos:

L'$-$L, y K Z K' es la verdadera diferencia de azimutes de los puntos M y M', luego:

$$\text{L}'-\text{L}=A'_k-A_k$$

El triángulo M Z K nos da:

$$\cos(\text{K M})=\cos(\text{K Z})\cos(\text{Z M})+$$
$$\text{sen}(\text{K Z})\,\text{sen}(\text{Z M})\cos(\text{K Z M}),\ \text{ó}\ \cos(90^\circ+\text{c})=$$
$$\cos(90^\circ-\text{b})\cos\xi+\text{sen}(90^\circ-\text{b})\,\text{sen}\,\xi\cos(A_k-A_m)$$

ó $-$sen c$=+$sen b cos $\xi+$cos b sen ξ cos (A_k-A_m); de donde:

$$\cos(A_k-A_m)=\frac{-\text{sen c}-\text{sen b}\cos\xi}{\cos\text{b sen}\,\xi}$$

El ángulo A_k-A_m difiere poco de 90°; si llamamos $\triangle$ la diferencia, podemos poner:

(3)..............$A_k-A_m=90^\circ+\triangle$; ó substituyendo:

$\text{sen}\,\triangle=\dfrac{\text{sen c}+\text{sen b}\cos\xi}{\cos\text{b sen}\,\xi}$; ó con bastante aproximación:

$\triangle=\dfrac{\text{c}+\text{b}\cos\xi}{\text{sen}\,\xi}=\dfrac{\text{c}}{\text{sen}\,\xi}+\text{b}\cot\xi$; por consiguiente la (3) queda:

$$A_k-A_m=\frac{\text{c}}{\text{sen}\,\xi}+\text{b}\cot\xi+90^\circ\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

y de igual manera:

$$A'_k-A'_m=\frac{\text{c}}{\text{sen}\,\xi'}+\text{b}'\cot\xi'+90^\circ\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Poniendo en las anteriores por b y b' sus valores, tendremos:

$$A_k-A_m=\frac{\text{c}}{\text{sen}\,\xi}+\Big[\gamma_1-\gamma\cos(A_k-A_o)\Big]\cot\xi+90^\circ$$

$$A'_k-A'_m=\frac{\text{c}}{\text{sen}\,\xi'}+\Big[\gamma_1-\gamma\cos(A'_k-A_o)\Big]\cot\xi'+90^\circ$$

$$A'_k-A_k-(A'_m-A_m)=\text{c}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\xi'}-\frac{1}{\text{sen}\,\xi}\right)+\gamma_1(\cot\xi'-\cot\xi)$$
$$-\gamma\cot\xi'\cos(A'_k-A_o)+\gamma\cot\xi\cos(A_k-A_o).$$

Según la figura podemos poner:

$(A_k - A_o) = 90° + (A_m - A_o)$ y $(A'_k - A_o) = 90° + (A'_m - A_o)$;

luego

$$(A'_m - A_m) - (A'_k - A_k) = c\left(\frac{1}{\text{sen }\xi} - \frac{1}{\text{sen }\xi'}\right) + \gamma_1(\cot\xi - \cot\xi') +$$

$$\gamma\left[\cot\xi \text{ sen }(A_m - A_o) - \cot\xi' \text{ sen }(A'_m - A_o)\right]$$

ó según la (2)

$$(6)\quad (A'_m - A_m) - (L' - L) = c\left(\frac{1}{\text{sen }\xi} - \frac{1}{\text{sen }\xi'}\right) + \gamma_1(\cot\xi - \cot\xi')$$

$$+\gamma\left[\cot\xi \text{ sen }(A_m - A_o) - \cot\xi' \text{ sen }(A_m - A_o)\right]$$

La fórmula (8) es para una posición del círculo, á la derecha, por ejemplo; y para el círculo á la izquierda, tendremos, notando que el arco V K valdrá $90 + \gamma_1$ y el arco K M $90° - c$, y llamando al ángulo dado por el instrumento $L''' - L''$

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots(A'_m - A_m) - (L''' - L'') = -c\left(\frac{1}{\text{sen }\xi} - \frac{1}{\text{sen }\xi'}\right)$$

$$-\gamma_1(\cot\xi - \cot\xi')$$

$$+\gamma\left[\cot\xi \text{ sen }(A_m - A_o) - \cot\xi' \text{ sen } A'_m - A_o)\right]$$

Sumando la (6) y la (7), y dividiendo por 2:

$$(A'_m - A_m) - \frac{(L' - L) + L''' - L''}{2} =$$

$$\gamma\left[\cot\xi \text{ sen }(A_m - A_o) - \cot\xi' \text{ sen }(A'_m - A_o)\right] \quad (8)$$

Fórmula que demuestra que el promedio de los ángulos en las dos posiciones queda exento de los errores de colimación é inclinación del eje horizontal sobre el círculo; pero subsistiendo el error proviniente de la inclinación del eje del aparato sobre la vertical real, error acusado por el nivel paralelo.

Si llamamos $\triangle$ A á este error, la (8) se escribe:

$$\triangle A = \gamma\left[\cot\xi \text{ sen }(A_m - A_o) - \cot\xi' \text{ sen }(A'_m - A^o)\right] \quad (9)$$

El valor máximo del binomio entre paréntesis no puede fijarse sin hacer antes algunas apreciaciones. Las distancias z y z' varían comunmente entre 85 y 95° y los valores de los senos de $(A'_m - A_o)$ pueden alcanzar valores comprendidos entre $+1$ y -1.

Para fijar las ideas supongamos que $\cot z$ es positiva é igual á 0.087, es decir que $z = 85°$; los casos interesantes serán cuando el segundo término del binomio alcance los valores:

$$+0.087 \text{ y}$$
$$-0.087$$

En el primero, $\triangle A = 0$ y en el segundo $\triangle A = 0.2\,\gamma$ que será un máximo: entonces sí aceptamos que $\triangle$ A no pase de 1″, resulta que $\gamma = 5''$: cosa que nos aconseja que la diferencia entre dos posiciones inversas del nivel montante no pase de 10″, es decir, de las lecturas del nivel no acusen más de 5 divisiones de diferencia; puesto que esas divisiones valen generalmente 2″.

Hay que fijar mucho la atención en que se ha aceptado que las distancias zenitales de los puntos visados no sean menores de 85° ni mayores de 95°.

Angulos verticales.—En la figura 8 el círculo nos representa el horizonte verdadero y Z el zenit.

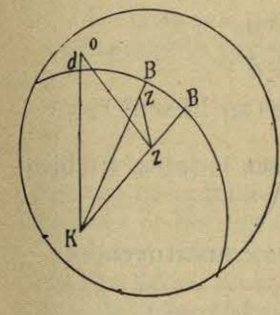

Figura 8.

Supongamos que Z' es el polo instrumental y K el punto en que el eje de alturas del instrumento, prolongado, encuentra al horizonte; B B' O' es el gran círculo que tiene K por polo, ó sea el círculo vertical del aparato, círculo descrito por la línea de colimación del anteojo.

Sea O un objeto cualquiera, observado en el hilo horizontal O O' perpendicular al círculo, siendo K O' la traza del plano que lo contiene.

Prolongando K Z' hasta B', el arco B' O' ó el ángulo O' K B' medirá la distancia zenital instrumental del punto O. Si la lectura del círculo en B' es ξ_o y ξ en O', tendremos haciendo B' O' = Z_1, para una posición del instrumento:

$$Z_1 = \xi_o - \xi$$

Para diferentes azimutes la posición relativa de los puntos B' y B es distinta, pero su posición relativa está dada por el nivel paralelo; si llamamos l_o la lectura del nivel cuando B y B' se confunden y l la lectura en cualquier otro caso, tendremos:

$$\triangle Z_1 = B\,B' = l_o - l$$

l siendo la semisuma algebráica de las extremidades de la burbuja.

Si hacemos el arco B O' = Z', tendremos:

$$Z' = Z_1 + \triangle Z_1$$

La verdadera distancia zenital del punto O es Z O = Z; y el triángulo esférico K Z O, en el que K O = 90° + c, Z K = 90 — b y el ángulo O K Z = Z', nos da:

$$\cos Z = -\operatorname{sen} c \operatorname{sen} b + \cos c \cos b \cos Z'; \text{ pero}$$
$$\cos Z' = \cos^2 \tfrac{1}{2} z' - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z'; \text{ luego:}$$

$$\cos Z = -\operatorname{sen} c \operatorname{sen} b\,(\cos^2 \tfrac{1}{2} z' + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z') +$$
$$+ \cos c \cos b\,(\cos^2 \tfrac{1}{2} z' - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z') =$$
$$= \cos (c + b) \cos^2 \tfrac{1}{2} z' - \cos (c - b) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z'.$$

De las anteriores ecuaciones se deduce:

$$\cos z' - \cos z = \left[1 - \cos (c + b)\right] \cos^2 \tfrac{1}{2} z' -$$
$$- \left[1 - \cos (c - b)\right] \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z' =$$
$$= 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c + b) \cos^2 \tfrac{1}{2} z' - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c - b) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z'.$$

Pero $\cos z' - \cos z = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (z' + z) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (z - z')$; ó bien puesto que z y z' difieren poco:

$\cos z' - \cos z = 2 \operatorname{sen} z' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (z - z')$; y sustituyendo:

$$2 \operatorname{sen} z' \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (z - z') = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c + b) \cos^2 \tfrac{1}{2} z' -$$
$$- 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c - b) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} z'\text{; de donde, puesto que } \operatorname{sen} z' =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} z' \cos \tfrac{1}{2} z':$$

$$Z - z' = \left(\frac{c + b}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \cot \tfrac{1}{2} z' -$$

$$-\left(\frac{c - b}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z' = \varepsilon \text{......} \;(1)$$

De la anterior se deduce:

$$z = z' + \varepsilon = z_1 + \triangle z_1 + \varepsilon = (\xi_0 - \xi) + (l_0 - l) + \varepsilon \text{ ....(2).}$$

Para otra posición del aparato tendremos igualmente:

$$z = \xi' - \xi_0 + l' - l_0 + \varepsilon', \text{ en la que:}$$

$$\varepsilon' = \left(\frac{c' + b'}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \cot \tfrac{1}{2} z' - \left(\frac{c' - b'}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z'.$$

El promedio de los dos valores de z, nos da:

$$z = \tfrac{1}{2} (\xi' - \xi) + \tfrac{1}{2} (l' - l) + \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') \text{ ....(3).}$$

En la medida de los ángulos verticales lo que más influye es la inclinación del eje vertical que se lleva en cuenta por la observación del nivel paralelo.

Sensiblemente ε y ε' son iguales, y por lo mismo la influencia en las distancias zenitales de los errores de colimación é inclinación del eje de alturas, está dado por la (1), cuyo valor máximo es sin duda:

$$\varepsilon_m = \left(\frac{c + b}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' \cot \tfrac{1}{2} z'.$$

En trabajos geodésicos cot ½ z' difiere poco de la unidad y exagerando podemos aceptar $c + b = 20''$, con lo que:

$$\varepsilon_m = 100 \times 0.000005 = 0''0005.$$

Lo anterior demuestra la poquísima influencia de los errores de colimación é inclinación del eje de alturas en la medida de las distancias zenitales.

Los niveles que sirven para determinar la inclinación de los ejes deben tener una sensibilidad igual á la aproximación del instrumento, y al telescopio se le da una potencia igual á la de los microscopios.

Observación por medio de direcciones.—Al ocupar una estación para visar los vértices A B C......M, es conveniente empezar por elegir una dirección por punto de partida, ya sea tomando el vértice que mejor se vea, ya erigiendo una señal que diste cuando menos tres kilómetros de la estación de observación. Los vértices se observan por orden de azimut: bisértase A y se leen los microscopios; se hace lo mismo con B y de igual modo se continúa hasta llegar al último M; se invierte entonces el aparato, se vuelve á bisectar M y se retrocede observando todos los vértices hasta el primero observado.

El promedio de las direcciones en las dos posiciones del instrumento constituye una observación completa; más para lograr determinada precisión debe observarse cada dirección n veces, y para eliminar los errores del círculo, las direcciones deben observarse en distinta posición de éste, cambiándolo aproximadamente $\frac{360^\circ}{i\,n}$, n siendo, como digimos, el número de series é i el de microscopios. La práctica seguida en el Coast Survey, es elegir 5 ó 7 posiciones equidistantes, $\frac{360}{5}$ ó $\frac{360}{7}$, y tomar igual número de series en cada posición hasta lograr la precisión deseada.

Es muy difícil visar todos los puntos en cada posición del círculo, siendo necesario completar después las series partiendo de la posición elegida como punto de partida ó de cualquier vértice que sea visible.

Si llamamos α el error probable de una bisección, β el error probable del promedio de las lecturas con los microscopios y γ el error cometido en el ángulo por los errores de división del círculo; el error probable del ángulo medido por n series en idéntica posición del círculo será:

$$\gamma \pm \sqrt{\frac{2\,(\alpha^2+\beta^2)}{\eta}}$$

Mas si el ángulo se deduce de n medidas en cada una de las m posiciones del círculo, el error probable será.

$$\pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m} + \frac{2\,(\alpha^2+\beta^2)}{m\,n}}$$

Como se ve, el error probable de un ángulo depende del instrumento, del observador y de los números n y m.

Observación por ángulos.—En vez de proceder como acabamos de decirlo, puede hacerse de la manera siguiente:

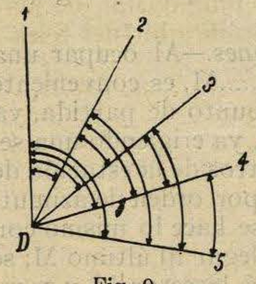

Fig. 9.

Se observan los ángulos, (fig. 9)

1º Entre 1 y 2, después entre 1 y 3 y se continúa hasta llegar al último; después se sigue midiendo entre 2.3; (2.4) (2.5); y se continúa de igual modo, eliminando una de las direcciones, como se ve claramente en la figura.

Si hay n_1 vértices, la combinación de la 1ª dirección con todas las demás harán que se midan $n_1 - 1$ ángulos; en

la 2ª habrá $n_1 - 2$, con la 3ª $n_1 - 3$ y así sucesivamente hasta no tener sino un ángulo. Los ángulos medidos forman pues una progresión aritmética cuyo primer término es (n_1-1) el último 1 y el número de términos $(n_1 - 1)$; luego su suma será:

$$\frac{1}{2}\,(n_1-1)\,(n_1-1+1) = \frac{1}{2}\,n_1\,(n_1-1)$$

Los ángulos deben quedar medidos en distintas partes del círculo para eliminar los errores de graduación.

Observación por el método de repetición.—Este método se encuentra hoy casi abandonado, porque la experiencia ha probado que está sujeto á errores que la observación en las dos posiciones del instrumento no elimina; aunque se ha logrado obtener buenos resultados midiendo un cierto número de veces el ángulo, é igual número su explemento.

Este método está indicado cuando el lugar de observación no es firme y la circulación del observador al derredor del aparato puede alterar su estabilidad.

Las horas más convenientes para observar las direcciones azimutales son de la salida del sol á las 9 a. m. y de las 3 p. m. hasta la puesta del sol, pudiendo continuarse las observaciones en la noche con señales adecuadas. Los ángulos verticales pueden medirse de las 11 a. m. á las 2 p. m., bastando dos medidas en cada día y repitiendo las medidas varios días, á la misma hora, á causa de la variación de la refracción atmosférica.

Nota.—Puede determinarse el poder amplificador de un telescopio por la siguiente consideración:

Si el círculo del aparato aproxima b'', el telescopio debe ser capaz de apreciar esta misma magnitud; y por consiguiente, el poder amplificador será:

$M = \frac{90}{b}$ cantidad que se incrementa en $\frac{1}{3}$ á causa de la opacidad atmosférica y de la diversa iluminación de las señales: debiendo calcularse el poder amplificador del telescopio por la siguiente:

$$M = \frac{4}{3} \times \frac{90}{b} = \frac{120}{b}$$

Para b = 2'', M = 60.

Método de Bessel.

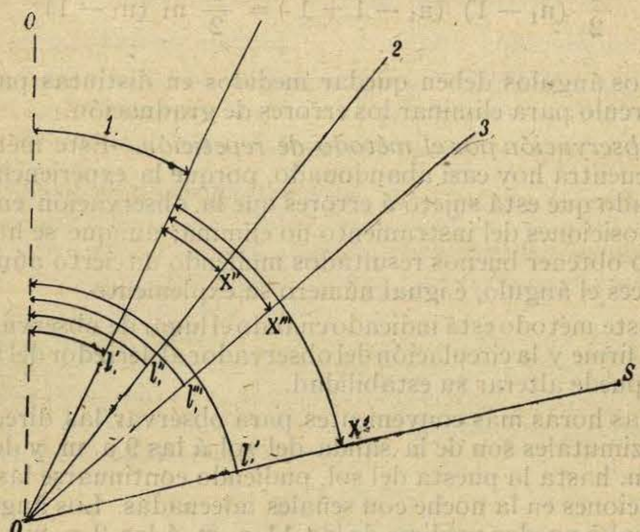

Fig. 10.

Sea O una estación en la cual se ha instalado un altazimut.

Para fijar las ideas diremos que un arco se cuenta en sentido directo cuando su graduación va en sentido contrario al de las manecillas de un reloj y que es retrógrado el movimiento que siguen las manecillas de un reloj.

Los ángulos se miden en la forma siguiente:

Se establece el diámetro 0–180 del limbo en una posición cualquiera, pero invariable: hecho esto, se miden las direcciones que con respecto á la línea 0–180 tienen sucesivamente las visuales dirigidas á los puntos 1, 2, 3, etc., cuando el círculo vertical del anteojo queda (por ejemplo) á la izquierda, moviendo el anteojo en el sentido retrógrado. Terminada esta primera operación, se gira el anteojo 180 al derredor del eje de alturas, con lo que el círculo vertical quedará á la derecha, y se miden nuevamente las direcciones de las mismas visuales en el sentido directo, es decir, se mide primero la dirección de la visual á s después la de la que se dirige á (s–1) y así en seguida.

Terminada la segunda operación, se desaloja el diámetro 0–180 un ángulo α en el sentido directo y conservando invariable la nueva dirección del diámetro dicho, se miden las nuevas direcciones de las visuales á 1, 2, 3; etc., en el sentido retrógrado y con el círculo vertical á la derecha, después se invierte el anteojo para llevar el círculo vertical á la izquierda y recomienza en el sentido directo la medición de las direcciones á partir de la visual á s. En seguida se desaloja el diámetro 0–180 otro ángulo α, siempre en el sentido directo y se recomienza la operación descrita.

Tomaremos por lecturas l_1', l_1'', l_1''',.........l_1^s el promedio de las dos posiciones, y si llamamos p_1', p_1'', p_1''', los pesos y v_1', v_1'', v_1''',......... las correciones que corresponden á cada dirección, como el círculo horizontal se va cambiando cada vez el ángulo α hasta tener $\frac{360}{\alpha} = G$ posiciones, tendremos las siguientes notaciones:

Posición	Lecturas del círculo					Pesos correspondientes á cada dirección					Corrección de las direcciones					Angulos de la línea 00' con la visual al punto (l)
1	l_1'	l_1''	l_1'''	....	l_1^s	p_1'	p_1''	p_1'''	....	p_1^s	v_1'	v_1''	v_1'''	....	v_1^s	z_1
2	l_2'	l_2''	l_2'''	....	l_2^s	p_2'	p_2''	p_2'''	....	p_2^s	v_2'	v_2''	v_2'''	....	v_2^s	z_2
3	l_3'	l_3''	l_3'''	....	l_3^s	p_3'	p_3''	p_3'''	....	p_3^s	v_3'	v_3''	v_3'''	....	v_3^s	z_3
G	l_G'	l_G''	l_G'''	....		p_G'	p_G''	p_G'''	....	p_G^s	v_G'	v_G''	v_G'''	....	v_G^s	z_G

Siempre se suponen los pesos iguales á uno, pero es cómodo conservarlos, pues no siendo siempre posible visar todos los puntos, para suprimir la visual, basta hacer su peso correspondiente igual á cero.

En la práctica es más conveniente reunir las observaciones en grupos que contengan los puntos que se han visado el mismo número de veces, pues esto simplifica las fórmulas como veremos adelante.

Según las notaciones anteriores, tendremos para una dirección cualquiera la siguiente ecuación:

$$l_2''' + v_2''' = z_2 + x''' \ ; \text{ ó } v_2''' = z_2 + x''' - l_2''' \ ;$$

y para cada posición las siguientes:

Posición 1	Posición 2	Posición 3
$v'_1 = z_1 - l'_1$	$v'_2 = z_2 - l'_2$	$v'_3 = z_3 - l'_3$
$v''_1 = z_1 + x'' - l''_1$	$v''_2 = z_2 + x'' - l''_2$	$v''_3 = z_3 + x'' - l''_3$
$v'''_1 = z_1 + x''' - l'''_1$	$v'''_2 = z_2 + x''' - l'''_2$	$v'''_3 = z_3 + x''' - l'''_3$

...(1)

su forma general siendo:

$$v = a' z_1 + b' z_2 + c' z_3 + \ldots\ldots + a\, x'' + b\, x''' + c\, x^{IV} + \ldots\ldots + l,$$

deduciéndose cada una de las parciales muy fácilmente conforme al siguiente esquema:

Número de puntos visados	Posición ó serie	Puntos visados	a_1 a′	a_2 b′	a_3 c′	x″ a	x‴ b	x^{IV} c	l	p
		1	+1						$-l'_1$	p'_1
N°=s	1	2	+1			+1			$-l''_1$	p''_1
		3	+1				+1		$-l'''_1$	p'''_1
N°=	2	1		+1					$-l'_2$	p'_2
		2		+1		+1			$-l''_2$	p''_2
		3		+1			+1		$-l'''_2$	p'''_2
		1			+1				$-l'_3$	p'_3
		2			+1	+1			$-l''_3$	p''_3
N°=	3	3			+1		+1		$-l'''_3$	p'''_3
N°=R, total de observacs.	N°=G		N° = G			N° = s −			1	(p)=R =núm. total de observac.

La suma de los cuadrados de los errores de observación, llevando en cuenta los pesos para mayor generalidad es:

$$p'_1(z_1-l'_1)^2+p''_1(z_1+x''-l''_1)^2+p'''_1(z_1+x'''-l'''_1)^2$$
$$+p'_2(z_2-l'_2)^2+p''_2(z_2+x''-l''_2)^2+p'''_2(z_2+x'''-l'''_2)^2+\ldots\ldots\ldots$$
$$+p'_3(z_3-l'_3)^2+p''_3(z_3+x''-l''_3)^2+p'''_3(z_3+x'''-l'''_3)^2+\ldots\ldots\ldots;$$

y como debe ser un mínimo, igualando separadamente á cero los coeficientes diferenciales de esta suma relativos á z_1, z_2, z_3..............x'', x''', x^{IV},.............. se tendrán las siguientes ecuaciones:

$$(p'_1+p''_1+p'''_1+\ldots\ldots)\, z_1+p''_1\, x''+p'''_1\, x'''+\ldots\ldots-$$
$$-(p'_1\, l'_1+p''_1\, l''_1+p'''_1\, l'''_1+\ldots\ldots)=0$$

$$(p'_2+p''_2+p'''_2+\ldots\ldots)\, z_2+p''_2\, x''+p'''_2\, x'''+\ldots\ldots-$$
$$-(p'_2\, l'_2+p''_2\, l''_2+p'''_2\, l'''_2+\ldots\ldots)=0$$

$$(p'_3+p''_3+p'''_3+\ldots\ldots)\, z_3+p''_3\, x''+p'''_3\, x'''+\ldots\ldots-$$
$$-(p'_3\, l'_3+p''_3\, l''_3+p'''_3\, l'''_3+\ldots\ldots)=0$$

$$p''_1\, z_1+p''_2\, z_2+p''_3\, z_3+\ldots\ldots + (p''_1+p''_2+p''_3+\ldots\ldots)\, x''-$$
$$-(p''_1\, l''_1+p''_2\, l''_2+p''_3\, l''_3+\ldots\ldots)=0$$

$$p'''_1\, z_1+p'''_2\, z_2+p'''_3\, z_3+\ldots\ldots+(p'''_1+p'''_2+p'''_3+\ldots\ldots)\, x'''-$$
$$-(p'''_1\, l'''_1+p'''_2\, l'''_2+p'''_3\, l'''_3+\ldots\ldots)=0$$

Según la notación de Gauss, las anteriores ecuaciones podemos escribirlas como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} [p_1]\, z_1+p''_1\, x''+p'''_1\, x'''+\ldots\ldots[p_1\, l_1]=0 \\ [p_2]\, z_2+p''_2\, x''+p'''_2\, x'''+\ldots\ldots[p_2\, l_2]=0 \\ [p_3]\, z_3+p''_3\, x''+p'''_3\, x'''+\ldots\ldots[p_3\, l_3]=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

$$\left.\begin{array}{l} p''_1\, z_1+p''_2\, z_2+p''_3\, z_3+\ldots\ldots+[p'']\, x''-(p''\, l'')=0 \\ p'''_1\, z_1+p'''_2\, z_2+p'''_3\, z_3+\ldots\ldots+(p''')\, x'''-(p'''\, l''')=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(3).$$

Sacando de las ecuaciones (2) los valores z_1, z_2, z_3......y substituyéndolos en la (3), tendremos:

$$\left\{[p''] - \frac{p_1''}{[p_1]} p_1'' - \frac{p_2''}{[p_2]} p_2'' - \dots\dots\right\} x'' +$$

$$+ \left\{-\frac{p_1''}{[p_1]} p_1''' - \frac{p_2''}{[p_2]} p_2''' - \frac{p_3''}{[p_3]} p_3''' - \dots\dots\right\} x''' + \dots =$$

$$= [p'' l''] - \frac{p_1''}{[p_1]} [p_1 l_1] - \frac{p_2''}{[p_2]} [p_2 l_2] - \dots\dots$$

$$\left\{-\frac{p_1''}{[p_1]} p_2''' - \frac{p_2''}{[p_2]} p_2''' - \frac{p_3''}{[p_3]} p_3''' - \right\} x'' +$$

$$+ \left\{[p'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]} p_1''' - \frac{p_2'''}{[p_2]} p_2''' - \dots\right\} x''' + \dots =$$

$$= [p''' l'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]} [p_1 l_1] - \frac{p_2'''}{[p_2]} [p_2 l_2] -$$

Si pues por comodidad representamos por símbolos los anteriores coeficientes, tendremos las siguientes ecuaciones normales:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\, x'' + [ab]\, x''' + \dots\dots = [al] \\ [ab]\, x'' + [bb]\, x''' + \dots\dots = [bl] \end{array}\right\} \dots\dots\dots (4)$$

los valores de los símbolos siendo:

$$[aa] = [p''] - \frac{p_1''}{(p_1)} p_1'' - \frac{p_1''}{(p_2)} p_2'' - \frac{p_3''}{(p_3)} p_3'' - \dots\dots$$

$$[ab] = -\frac{p_1''}{(p_1)} p_1''' - \frac{p_2''}{(p_2)} p_2''' - \frac{p_3''}{(p_3)} p_3''' - \dots\dots$$

$$[ac] = -\frac{p_1''}{(p_1)} p_1^{IV} - \frac{p_2''}{(p_2)} p_2^{IV} - \frac{p_3''}{(p_3)} p_3^{IV} - \dots\dots$$

$$[bb] = [p'''] - \frac{p_1'''}{(p_1)} p_1''' - \frac{p_2'''}{(p_2)} p_2''' - \frac{p_3'''}{(p_3)} p_3''' - \dots\dots$$

$$[bc] = -\frac{p_1'''}{(p_1)} p_1^{IV} - \frac{p_2'''}{(p_2)} p_2^{IV} - \frac{p_3'''}{(p_3)} p_3^{IV} - \dots\dots$$

$$[cc] = [p^{IV}] - \frac{p_1^{IV}}{(p_1)} p_1^{IV} - \frac{p_2^{IV}}{(p_2)} p_2^{IV} - \frac{p_3^{IV}}{(p_3)} p_3 - \dots\dots$$

$$[cd] = -\frac{p_1^{IV}}{(p_1)} p_1^{V} - \frac{p_2^{IV}}{(p_2)} p_2^{V} - \frac{p_3^{IV}}{(p_3)} p_3^{V} - \dots\dots$$

$$[al] = [p'' l''] - \frac{p_1''}{(p_1)} [p_1 l_1] - \frac{p_2''}{(p_2)} [p_2 l_2] -$$

$$- \frac{p_3''}{(p_3)} [p_3 l_3] \dots\dots\dots\dots$$

$$[bl] = [p''' l'''] - \frac{p_1'''}{(p_1)} [p_1 l_1] - \frac{p_2'''}{(p_2)} [p_2 l_2] -$$

$$- \frac{p_3'''}{(p_3)} [p_3 l_3] \dots\dots\dots\dots$$

$$[cl] = [p^{IV} l^{IV}] - \frac{p_1^{IV}}{(p_1)} [p_1 l_1] - \frac{p_2^{IV}}{(p_2)} [p_2 l_2] -$$

$$- \frac{p_3^{IV}}{(p_3)} [p_3 l_3] \dots\dots\dots\dots$$