

Resumiendo podemos decir:

Si se busca rapidez y economía, debe elegirse la simple cadena de triángulos; si se trata de abarcar gran superficie, los exágonos son más convenientes; pero si se busca más que todo, precisión, los cuadriláteros son los más ventajosos, y desde este punto de vista los exágonos son superiores á la simple cadena de triángulos, siendo también, los exágonos, bastante recomendables.

Hemos ya visto qué figuras son las más convenientes por aceptar en una cadena; pero como la configuración del terreno jamás se presta á la elección de figuras regulares, necesitamos entrar en algunas consideraciones á este respecto.

El error probable de un lado deducido de una serie de triángulos, es:

$$p^2 = \frac{4}{3} \varepsilon^2 \frac{N_d - N_c}{N_d} \sum (\delta A^2 + \delta A \delta B + \delta B^2),$$

p siendo el error probable del lado calculado,  $\varepsilon$  el error probable de observación de una dirección,  $N_d$  el número de direcciones observadas,  $N_c$  el número de ecuaciones de condición,  $\delta A$  y  $\delta B$  las diferencias logarítmicas por 1" correspondientes á los ángulos A y B, siendo el primero el ángulo opuesto al lado que se calcula y B el opuesto al que sirve de base. El valor de p, como se ve en la fórmula anterior, depende de los valores de  $\varepsilon$  y del producto de los factores

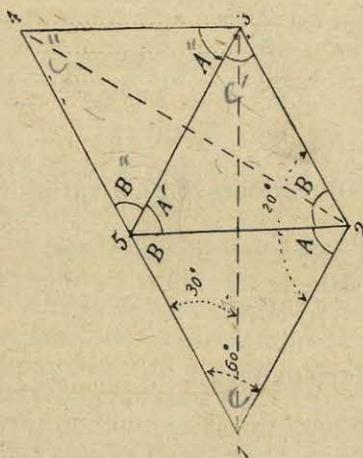
$$\frac{N_d - N_c}{N_d} \text{ y } \sum (\delta A^2 + \delta A \delta B + \delta B^2);$$

el valor de  $\varepsilon$  depende de la precisión con que se observe, y el promedio deducido en la triangulación sobre el paralelo 39°, de 1,660 direcciones es de  $\pm 0''.44$ , el valor mínimo habiendo sido 0''.23 y el máximo 0''.82. (Transcontinental triangulación, 1900—Schott).

El factor  $\frac{N_d - N_c}{N_d}$  será tanto menor para un número dado de direcciones observadas, cuanto mayor sea  $N_c$  ó el número de ecuaciones de condición á que da lugar la figura, el factor  $\sum (\delta A^2 + \delta A \delta B + \delta B^2)$  depende de la buena forma de los triángulos, pues  $\delta A$  y  $\delta B$  dependen de la magnitud de los ángulos A y B; pero de todas maneras estos dos factores son independientes de la precisión con que se observe, y peculiares de la figura; su producto mide pues, por su valor, lo que podría llamarse la eficacia de la figura para dar una línea calculada con determinada precisión independiente del error de observación; luego el cálculo de estos factores en un

proyecto, pondrá al ingeniero en condiciones de prever la precisión de las líneas que por intermedio de las figuras van á calcularse; y como no siempre es fácil, ni posible, que los triángulos queden configurados como se desea, los mismos valores indicarán en cada caso, la necesidad de limitar el número de figuras intermedias para obtener en las líneas calculadas una precisión deseada; es decir, que el conocimiento de tales factores, es el único criterio seguro para poder repartir en una triangulación convenientemente las bases, siempre que éstas tegan por supuesto, una precisión conveniente.

Pongamos un ejemplo que aclare lo anterior. (Fig. 3).



Partiendo del lado (1.2) como base, queremos calcular el lado (4.3); y vamos á suponer los casos siguientes:  
1º Los lados (1.2) y (4.3) están ligados por tres triángulos equiláteros.

Número de líneas = 7  
Número de vértices = 5  
Ecuaciones de ángulo =  $7 - 5 + 1 = 3$   
Ecuaciones de lado =  $7 - 2 \times 5 + 3 = 0$ .

Número total de direcciones si se observa en todos los vértices:

En el (1) las visuales son .....	2
" " 2 " " " .....	3
" " 3 " " " .....	3
" " 4 " " " .....	2
" " 5 " " " .....	4

Total =  $N_d = \dots 14$

Si se considera (1.2) como base fija, sin cambiar las direcciones  $N_d = 14 - 12$ ; como  $N_c = 3$ .

$$\frac{N_d - N_c}{N_d} = \frac{12 - 3}{12} = \frac{3}{4}$$

En unidades del 6º orden  $\delta A = \delta B = 1.2$  y por consiguiente:  $\delta A^2 + \delta A \delta B + \delta B^2 = 4$ , para cada triángulo, y para los tres:

$$\sum (\delta A^2 + \delta A \delta B + \delta B^2) = 12; \text{ luego:}$$

$$\frac{N_d - N_c}{N_d} \sum (\delta A^2 + \delta A \delta B + \delta B^2) = \frac{3}{4} \times 12 = 9.$$

2º Supongamos que la base (1.2) está ligada al lado (3.4) por el cuadrilátero 1.2 3.4; y consideremos los triángulos 1.2.3. y 1.3.4. para calcular 4.3 en función de (1.2).

Número de líneas	= 6	
" " vértices	= 4	
Ecuaciones de ángulo	= 6 - 4 = 2 = 3	
" " lado	= 6 - 2 × 4 = 3 = 1	
<hr/>		
Número total de ecuación =	.....	4
Direcciones observadas en el vértice	1.....	3
" " " "	2.....	3
" " " "	3.....	3
" " " "	3.....	3
<hr/>		
Total =	.....	12

$N_d = 12 - 2 = 10$ , suponiendo las direcciones (1.2), invariables  
 $N_c = 4$ , luego

$$\frac{N_d - N_c}{N_d} = \frac{10 - 4}{10} = \frac{3}{5}$$

$\delta A = -1.2$  y  $\delta B = 3.7$  en el triángulo 1.2.3.

$$\left. \begin{array}{l} \delta A = 1.44 \\ \delta B = 13.69 \\ \delta A \delta B = -4.44 \end{array} \right\} \delta A + \delta A \delta B + \delta B = 11;$$

$$\frac{10.69}{10.69}$$

y en el triángulo 1.3.4

$\delta A = 3.7$  y  $\delta B = 1.2$ , luego:

$$\delta A + \delta A \delta B + \delta B = 20; \text{ por consiguiente:}$$

$$\frac{N_d - N_c}{N_d} \sum (\delta A + \delta A \delta B + \delta B) = \frac{3}{5} \cdot 31 = 18$$

Si, pues, el error de observación es igual en los dos casos habría ventaja en aceptar el primer proyecto; notándose notablemente la influencia de la buena configuración de la cadena de triángulos.

3º Supongamos que sólo se tengan los dos triángulos 1.2.3. y 1.3.4. sin que se haya formado el cuadrilátero.

Direcciones en el vértice	1.....	3
	2.....	2
	3.....	3
	4.....	2
<hr/>		
Total =	.....	10

$$N_d = 10 - 2 = 8$$

$$N_c = 2$$

$$\frac{N_d - N_c}{N_d} = \frac{8 - 2}{8} = \frac{3}{4}; \text{ y}$$

$$\frac{N_d - N_c}{N_d} \sum (\delta A + \delta A \delta B + \delta B) = \frac{3}{4} \times 31 = 24;$$

notándose la influencia del factor  $\frac{N_d - N_c}{N_d}$ , pues el 2º no cambió.

Lo anterior da clara idea del partido que puede sacarse juzgando un proyecto con el criterio propuesto.

*Altura de las señales.*—La cuestión de intervisibilidad de las estaciones, casi siempre se resuelve en el terreno mismo, ocupando todos los vértices, y en comarcas montañosas es relativamente fácil su elección; mas no pasa lo mismo en la región de llanuras, siendo aquí indispensable calcular la altura de las señales para contrarrestar la curvatura de la Tierra.

Sean C y C' (Fig. 4) dos estaciones que deseamos hacer

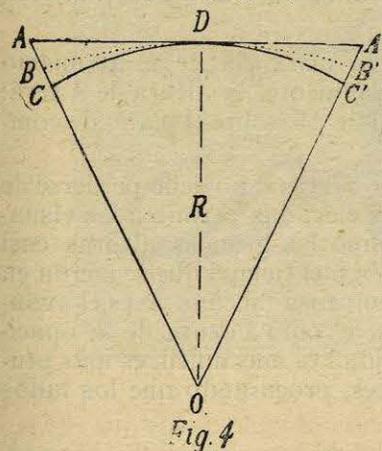


Fig. 4

visibles por la elección de señales de altura conveniente. En la sección vertical que supone la figura (4), AA' es la tangente en el punto D, BB' la línea de visibilidad, cóncava hacia abajo á causa de la refracción; si á las distancias AD y DA' las llamamos S y S', respectivamente, á las alturas BC y B'C', h y h' y R al radio terrestre, tendremos:

$$S^2 = Ac(2R + Ac) \text{ ó } Ac = \frac{S^2}{2R}$$

Si llamamos K el coeficiente de refracción, entre los ángulos ADB y AOD existe, como veremos después, al hablar de la refracción geodésica, la relación:

$$ADB = K AOD; \text{ pero } AOD = 2 ADC, \text{ luego:}$$

$$ADB = 2 K ADC; \text{ y puesto que los ángulos son pequeños:}$$

$$AB = 2K AC.$$

$$BC = h = AC - AB = \frac{S^2}{2R} - 2K \frac{S^2}{2R} = \frac{S^2}{2R} (1 - 2K).$$

Podemos aceptar como un promedio  $K=0.07$  y  $R=6377$  kilóm.; si pues expresamos S en kilómetros y h en metros, tendremos:

$$\frac{h}{1000} = \frac{S^2}{12754} 0.86; \text{ ó: } \begin{cases} S^2 = 14.83 h \\ h = 0.0674 S^2 \end{cases} \dots\dots\dots (1).$$

*Ejemplo.*—Tenemos dos vértices A y B á una distancia de 25 kilómetros, cuyas cotas son, con relación á un plano de comparación, 4 y 7 metros, respectivamente.

En B se ha montado una señal de 6 metros y se desea saber la altura de la señal en A para ver los 2 metros superiores de la señal en B.

El punto más bajo en B, que debe verse de A, tendrá por cota:  $6+7-2=11$  m. y por altura sobre A,  $11-4=7$ .

Para una altura de 7, la distancia de B al punto de tangencia será, según (1):

$K = \sqrt{14.83 \times 7} = 10^k 0$ , y la distancia de A al mismo punto,  $25 - 10 = 15^k$ ; por consiguiente, la altura de A será:  $h = 0.0674 (15)^2 = 15$  metros ó de 19 sobre el plano de comparación.

Al hacer la elección de los vértices, no debe perderse de vista que si bien las montañas elevadas permiten las visuales más largas, en cambio, como las grandes alturas casi siempre están cubiertas de nubes, el tiempo que se pierda en esperar que se descubran, no compensa muchas veces el avance que con su elección se logra; y como á causa de la opacidad de la atmósfera, la visibilidad es más difícil, es más prudente la elección de los vértices, procurando que los lados tengan dimensiones medias.

El reconocimiento debe hacerse con aparato ligero, provisto de brújula, procurando que el anteojo tenga buen poder amplificador; es bastante tomar las alturas con un aneroides,

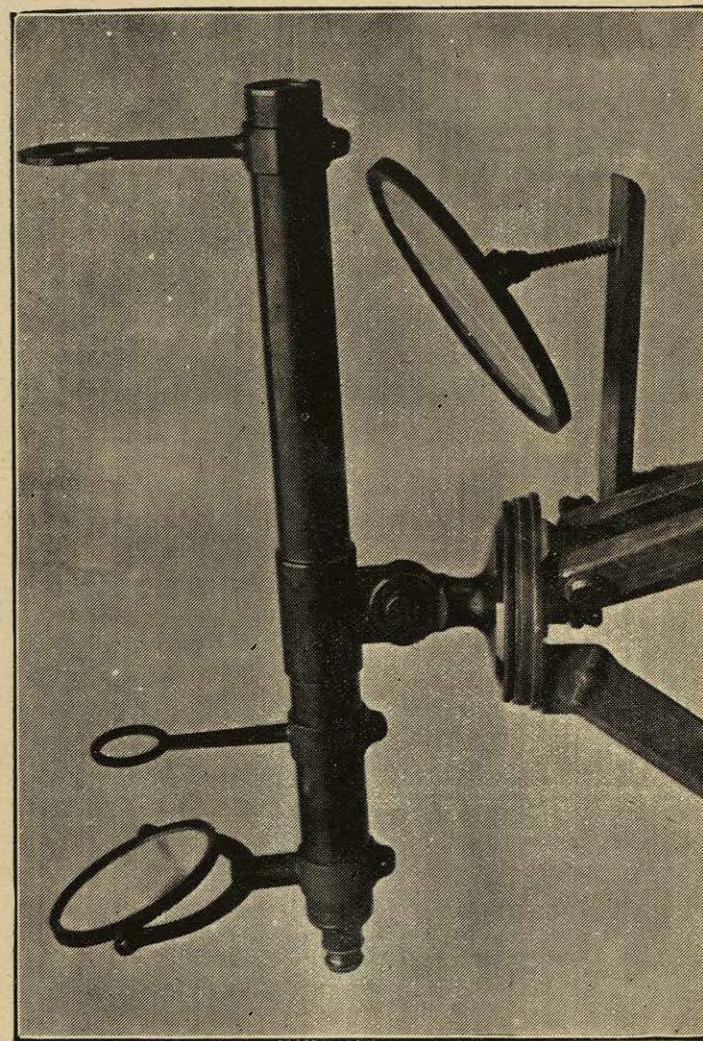
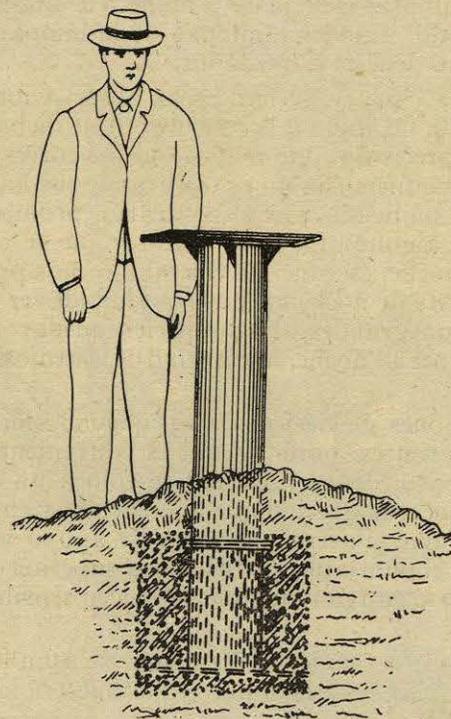


Lámina I.

y si se lleva una cámara telefotográfica, se facilitará mucho el trabajo, de suyo penoso, y cuyo éxito es debido principalmente á la habilidad y buen juicio del ingeniero.

En la región de llanuras, el reconocimiento se hace más difícil; no habiendo puntos bien definidos, deben improvisarse señales, y el observador tiene que hacer uso de escaleras sostenidas por tirantes, para elevarse á la altura conveniente que le permita dominar el vasto horizonte.

Las señales comunmente usadas en los trabajos geodésicos, son tablas de sección rectangular, pintadas de blanco y negro ó de un solo color, que se orientan normalmente á la dirección en que deben visarse. Estas señales dan buenos resultados para distancias que no pasen de 25 á 30 kilómetros, siendo fácil confundirlas en las regiones boscosas.



POSTE DE FUNDICIÓN DE FIERRO EMPLEADO EN LOS VÉRTICES DE LA TRIANGULACIÓN.

Para mayores distancias es indispensable hacer uso de heliotropos, tal como el que se ve en la fotografía adjunta. Para que la imagen del Sol reflejada por el espejo del he-

liotropo se viera bajo un ángulo de 32' á la distancia de 40 kilómetros, el espejo debería tener una dimensión de.....  
 $40000 \times 32' \times \text{sen } 1' = 400 \text{ mts.}$  próximamente; mas como la dimensión del espejo es de 0.<sup>m</sup>1, el ángulo bajo el cual se ve la imagen será de:

$\frac{0.1}{400}$  del diámetro del Sol; ó sea de:

$$\frac{1920''}{4000} = 0.''4$$

La imágen aparecerá en el campo del anteojo como un punto luminoso.

Los trabajos geodésicos pueden hacerse de noche eligiendo señales luminosas especiales, á manera de linternas mágicas, modificando el poder luminoso de la lámpara según la distancia á que debe enviarse la luz.

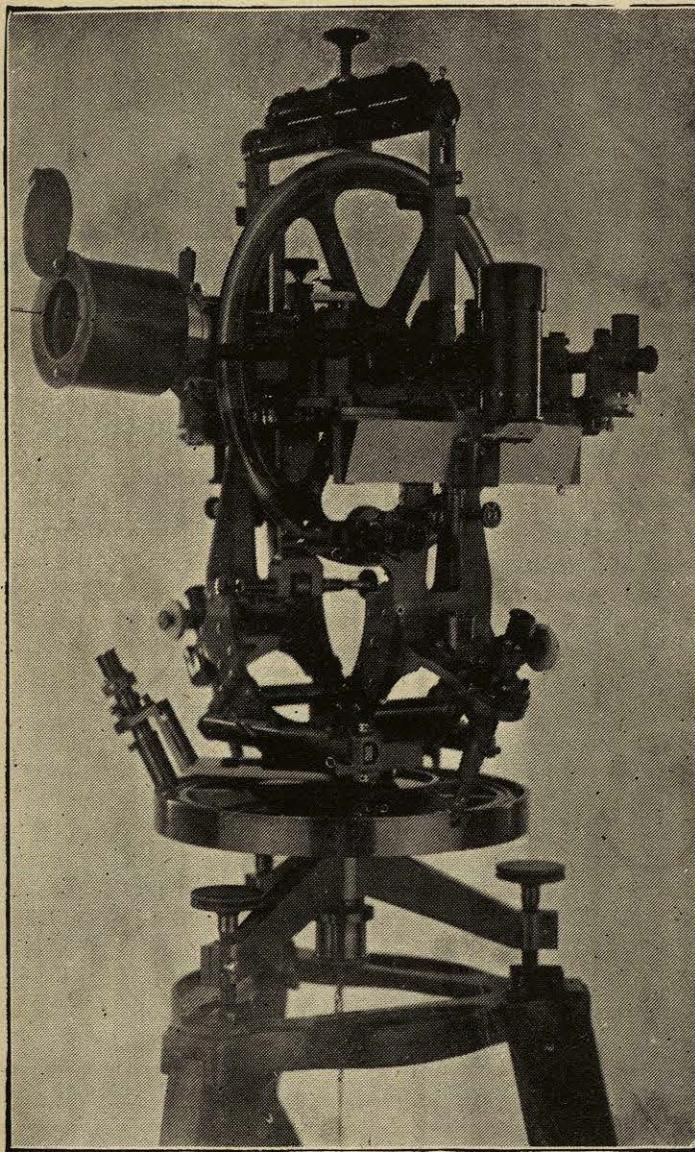
En el Coast Survey, se han hecho observaciones nocturnas desde 1879, llegando á la conclusión que dichas observaciones son de precisión algo mayor que las correspondientes diurnas; pero la diferencia no es tan grande que haga preferir unas á otras, pudiendo, por el contrario, promediarlas sin inconveniente alguno. La gran ventaja que se obtiene observando de noche, es concluir el trabajo más pronto, pues casi nunca existe de noche la causa que impide ver las señales de día, pues aun grandes alturas suelen quedar despojadas de nubes durante la noche, la claridad de la atmósfera siendo mucho mayor.

Las estaciones geodésicas deben quedar señaladas con marcas permanentes, para lo cual es conveniente hacer un pequeño cimientó, dentro del cual se coloca un cilindro de bronce con una cruz que indique la estación, y en el exterior se construye una pilastra que sirva de apoyo al aparato, trasportando el punto interior á la cara superior de la pilastra, por medio de direcciones que se crucen sensiblemente en ángulo recto.

En la Comisión Geodésica Mexicana, se usan hace varios años con éxito, las señales de fierro que muestra la figura adjunta.

Son hechas de tubo de fierro con dos placas remachadas en sus extremidades, la mayor, sirviendo de sostén al aparato, y la menor, empotrándose en un cimientó de concreto, de 0<sup>m</sup>60 de profundidad.

Lámina 2.



**Instrumentos.**

Los instrumentos empleados en los trabajos geodésicos y astronómicos han recibido el nombre de altazimutes, siendo á propósito tanto para operaciones terrestres como astronómicas. Los de grandes dimensiones se leen con microscopios y los de pequeñas con nonios.

Un modelo de la casa Troughton and Simms se ve en la fotografía adjunta. El diámetro del círculo tiene 0<sup>m</sup>30 estando su limbo dividido de 5 en 5 minutos, y como en los microscopios micrométricos, por medio de los cuales se hace la lectura, el tambor efectúa 5 revoluciones, mientras que los dos hilos paralelos, móviles, van de una división á la inmediata, cada revolución vale un minuto; mas como el tambor está dividido en 60 partes, cada una vale un segundo, pudiendo apreciarse estimativamente el décimo.

La bisección se efectúa haciendo que la división del círculo quede en medio de los hilos paralelos como se ve en la figura, y aunque según las experiencias del Prof. Forster, relatadas por Jordan (Handbuch der Vermeso, Vol. II) la menor distancia b perceptible debe tener 2 $\mu$ 5 medidas sobre la retina, ó subtender un ángulo de 33'' á la distancia de la división distinta, se trata, con toda evidencia, de la distancia mínima perceptible, los constructores no contando, con razón, sino con un ángulo de 90''.



En un círculo de radio R la extensión lineal de b será:  $\frac{R b}{206265}$ ; y si aceptamos 200 milímetros para la distancia de la división normal, la extensión anterior deberá ser igual á:

$$\frac{90 \times 200}{206265}; \text{ ó}$$

R b=18000; mas si el poder amplificador del microscopio es M, se tendrá:

M R b=18000.....(2). estando R expresado en milímetros.

Tal es la expresión sencilla que liga el radio del círculo, el poder amplificador del microscopio y la aproximación angular pretendida.

Para un círculo que tenga por radio 150 mm, como el modelo grande de Troughton, y que pretenda una aproximación efectiva de 2'', deberá ser el poder amplificador del microscopio de:

$$M = \frac{18000}{150 \times 2} = 60$$

Los errores de graduación de un círculo son de dos clases: periódicos y accidentales. Están dados los primeros por la serie de Fourier.

$$E_{\theta} = a_1 \text{ sen } (\theta + b_1) + a_2 \text{ sen } (2\theta + b_2) + a_3 \text{ sen } (3\theta + b_3) + \dots$$

E siendo el error de graduación correspondiente á la lectura  $\theta$  del círculo.

El error de excentricidad puede contarse como un error de graduación expresado por el primer término de la serie anterior, pues si la figura 5 nos representa el círculo cuyo centro geométrico sea C y el real C'; llamando e la excentricidad, u la lectura del círculo en la dirección C u y a la lectura que corresponde á la línea de los centros, tendremos:

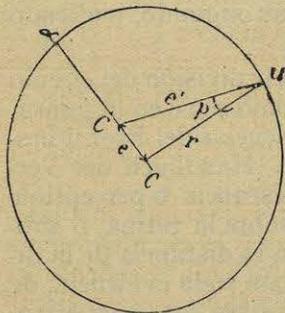


Figura 5.

$$\text{sen } p = \frac{e}{r} \text{ sen } (u - a);$$

ó expresando p en segundos y poniendo r en lugar de r' dado que difieren poco,

$$p = 206265 \frac{e}{r} \text{ sen } (u - a)$$

Un juego de  $\frac{1}{10000}$  de r ó de  $\frac{15}{1000}$  de milímetro daría para p un valor de:

$$p = 206265 \times \frac{0.0015}{150} = 20'' \text{ para } u - a = 90^\circ$$

El error de excentricidad es en general grande, pero la lectura de los microscopios colocados á 180° lo elimina, pues para un microscopio la lectura correcta será:

$$u + 206265 \frac{e}{r} \text{ sen } (u - a), \text{ y para el otro}$$

$$u' + 206265 \frac{e}{r} \text{ sen } (u' - a); \text{ mas como}$$

sensiblemente  $u' = u + 180$ , sustituyendo tendremos:

$$u' - 206265 \frac{e}{r} \text{ sen } (u - a), \text{ quedando el promedio}$$

$\frac{u + u'}{2}$  exento de dicho error.

En cuanto á los errores periódicos expresados por la serie de Fourier, su eliminación está fundada en el teorema siguiente:

“Cuando un círculo se lee con i microscopios equidistantes, la expresión del error que afecta al promedio de las i lecturas se limita á los términos que contienen  $i\theta$  y los múltiplos de  $i\theta$ .”

En el caso de tres microscopios colocados á 120°, si llamamos sus lecturas  $E_{\theta}$ ,  $E_{\theta+120}$  y  $E_{\theta+240}$ , el error del promedio de las lecturas será:

$$\frac{1}{3} (E_{\theta} + E_{\theta+120} + E_{\theta+240}) = a_3 \text{ sen } (3\theta + b_3)$$

suponiendo la serie limitada en el término con  $a_5$ .

La casa Saegmuller garantiza que las divisiones de sus círculos son correctas al segundo, lo cual demuestra la precisión que se ha logrado alcanzar.

Como á pesar del cuidado que se tenga en ajustar un altazimut, quedan siempre pequeños errores, vamos á valuar los efectos que producirán en la medida de los ángulos. De una vez por todas diremos que el eje polar del limbo se llama eje azimutal y que el eje normal á la línea de colimación del anteojo se llama eje de alturas.

En un altazimut instalado para observar, el círculo llamado horizontal debería realmente serlo, pero el plano de este círculo formará siempre con el horizonte un pequeño ángulo, que llamaremos  $\gamma$ , figura 7; en otros términos si V es el polo del círculo del instrumento y Z el zenit ó polo del horizonte, el arco V Z medirá el ángulo  $\gamma$ .

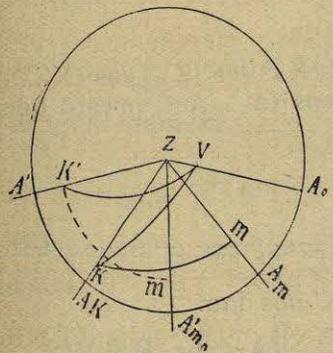


Figura 7.

El telescopio gira al derredor del eje de alturas que debe ser horizontal; pero en general este eje formará un ángulo  $\gamma_1$  con el plano del círculo horizontal, y llamemos K el punto en que este eje prolongado del lado del círculo corta la esfera celeste, y b la altura de este punto sobre el horizonte verdadero.

Estas tres cantidades  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ , b, son muy pequeñas en un instrumento bien arreglado, y vamos á ver cómo influyen en la medida de los azimutes y de las alturas.