CAPITULO XXIII.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS LUNARES.

288.—El principio general en que se funda la determinación de la longitud geográfica se ha expuesto en el número 127, y consiste en comparar las horas locales que se cuentan en dos estaciones, en el momento en que se produce un fenómeno instantáneo, como es aquel en que un astro adquiere cierta posición en la esfera celeste. Por lo regular la hora del primer meridiano, ó sea del meridiano de las Efemérides, es susceptible de calcularse de antemano, y la observación directa es la que da á conocer, en otra estación cualquiera, la hora que corresponde al fenómeno en cuestión.

Se comprende desde luego la importancia de que el astro cuya posición debe servir para la medida de la longitud, tenga un movimiento rápido sobre la esfera; porque debiéndose suponer siempre algún error en la observación, es claro que influirá en el resultado, tanto más cuanto más pequeña sea la variación que sufra la posición del astro con relación al tiempo. De todos los astros, la luna es la que por su proximidad á la tierra, se mueve aparentemente con más rapidez respecto de las estrellas fijas, y es, por lo mismo, la que sirve para la determinación de las longitudes. La variación de su ascensión recta excede generalmente poco de 2^m por hora; pero aun suponiéndola de 144^s en una hora media, sería $\frac{1}{25}$ del tiempo, y en consecuencia, cada segundo de error que se cometiera al determinar su ascensión recta por la observación, produciría otro de 25^s en la

longitud deducida. Como es tan irregular el movimiento de la luna, hay veces que sólo llega á unos 100^s por hora, en cuyo caso el error *e* de la medida directa originaria es de 36 *e* en el resultado. Adoptando la variación media de la luna en ascensión recta para hacer las consideraciones que preceden, resulta próximamente 27.5 por coeficiente medio del error de observación.

Estos guarismos indican la gran trascendencia que tiene aquel error, y ponen de manifiesto la dificultad de determinar exactamente la longitud por observaciones celestes, aun sirviéndose del astro cuyas circunstancias son más favorables al problema. Es cierto que en una operación delicada no es de creerse que el error de observación llegue á 1^s, pues acaso siempre sea posible reducirlo á menos de $0^s.2$; pero también hay que tomar en cuenta el hecho de que las Tablas de la luna tienen á veces errores que exceden de $0^s.5$, y que éstos producen el mismo efecto que los de observación. Los errores tabulares pueden, sin embargo, eliminarse haciendo uso de las observaciones directas ejecutadas en el primer meridiano, ó en otro cuya longitud se conozca exactamente, en lugar de servirse de las posiciones de la luna tomadas de las Efemérides; pero este medio de corrección, de que presentaré algún ejemplo en los Capítulos siguientes, no siempre puede aplicarse, por falta de observaciones correspondientes á la que se desee comparar con ellas.

Todas estas generalidades son aplicables á cualquiera de los procedimientos en que se observa la luna para determinar una longitud geográfica; y á ellas debe añadirse la de que siempre se supone conocido un valor aproximativo de la misma longitud, de manera que por lo regular el problema se reduce á calcular la corrección que necesita el primer supuesto. La longitud aproximativa se llama *estima*, y para que se comprenda la necesidad de su conocimiento, basta indicar que como, en una estación cualquiera, la medida de la posición de la luna no puede ser por lo general directa, sino calculada con ayuda de otros varios elementos, que son los que suministra directamente la observación, es preciso tomar ciertos datos de las Efemérides para la hora del primer meridiano que corresponde al mismo instante físico en que se practicó aquélla, y para esto es indispensable la estima. Podría creerse, á primera vista, que el error de ésta, influyendo necesariamente en los elementos calculados por interpolación, y suministrando, en consecuencia, sólo sus valores aproximativos, debería originar en las operaciones de cálculo otro error de importancia; pero tal conclusión deja de admitirse luego que se reflexiona en las pequeñas variaciones que tienen todos ó la mayor parte de los elementos tabulares, respecto del tiempo. Un error de 1^m, por ejemplo, en la estima respecto del valor de la verdadera longitud, es bastante considerable, pues generalmente se conoce aquélla con más aproximación; pero aun en ese caso se tendría con el mismo error la hora del meridiano de las Efemérides, y en tan corto tiempo casi no tienen variación apreciable muchos de sus elementos. Suponiendo, sin embargo, que éstos resultasen sensiblemente erróneos, si se procura que sea pequeña su influencia en la combinación que de ellos debe hacerse, eligiendo convenientemente las condiciones de la observación, es claro que por su medio se hallará un valor de la longitud más exacto que la estima supuesta al principio; y que si aún queda algún error en el resultado, se hará desaparecer repitiendo los cálculos con la nueva estima que se deduzca de los primeros. En resumen, la determinación de la longitud, considerada bajo este punto de vista, no viene á ser más que una aplicación del método de aproximaciones sucesivas, en la cual el error originado por cada supuesto inexacto, decrece con tal rapidez, que hace generalmente innecesaria la repetición del cálculo, al menos cuando una simple observación preliminar haya dado á conocer la estima con aproximación de unos cuantos segundos de tiempo.

289.—Concretémonos ahora al método que forma el objeto de este Capítulo. Los Almanaques Náuticos traen en las últimas páginas correspondientes á cada mes, las distancias angulares del centro de la luna al del sol, al de varios planetas y á algunas de las principales estrellas fijas. Estas distancias están calculadas de 3^h en 3^h del meridiano de Greenwich, y son geocéntricas ó tales como se verían desde el centro de la tierra. Si, pues, un observador mide, en una estación cualquiera, la distancia angular entre la luna y alguno de aquellos astros, anotando la hora media correspondiente, y reduce su obser-

vación á lo que sería vista desde el centro de la tierra, podrá hallar en seguida, por interpolación, á qué hora de Greenwich tenía lugar aquella distancia, sirviéndose al efecto de las que constan en las Efemérides. La comparación de esta hora con la local de la observación, le dará por diferencia la longitud de su estación respecto del meridiano de aquel Observatorio, puesto que ambas corresponden al instante físico en que tuvo la luna determinada posición en el cielo.

Siendo α y α', δ y δ' las ascensiones rectas y las declinaciones de la luna y del otro astro respectivamente, las distancias lunares de las Efemérides están calculadas por la ecuación:

$$\cos. d = \text{sen.}\,\delta\,\text{sen.}\,\delta' + \cos.\delta\cos.\delta'\cos.(\alpha - \alpha') \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

puesto que en el triángulo formado por el polo y los centros de ambos astros se conocen dos lados y el ángulo comprendido $\alpha - \alpha'$.

La observación se hace comunmente con sextante ó cualquier otro instrumento de reflexión, por ser los que mejor se prestan á colocarse en el plano de los objetos; y como sólo es visible el borde iluminado de la luna, lo que se mide directamente es la distancia de este limbo al otro astro. Para más generalidad, supondré que el observador tome el ángulo comprendido entre los bordes de los dos astros, y así, siendo D' la distancia que obtenga, la comprendida entre sus centros será:

$$D = D' \pm S \pm s \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

representando S el semidiámetro aparente ó aumentado de la luna (núm. 144), s el del otro astro, y debiéndose tomar los signos superiores cuando el ángulo medido sea entre los bordes más inmediatos. Siempre que se observe la distancia lunar respecto de una estrella fija, se tendrá $s = o$.

Como la refracción y la paralaje alteran las posiciones de los astros, el valor de D es la distancia aparente tal como se ve desde la superficie de la tierra; y es la que debe reducirse en seguida al centro para hacerla comparable con los datos de las Efemérides. Sea L (fig. 51ª) la posición geocéntrica de la luna y A la del otro astro; puesto que es tan considerable el valor de la paralaje de la luna, su efecto que es el de hacerla parecer más baja, excede al efecto contrario de la refracción que la hace parecer más elevada, de manera que desde la superficie de la tierra se verá en L'. En el otro astro el efecto de la refracción será superior al de su pequeña paralaje, y así es que lo veremos en A'. En consecuencia, el ángulo obtenido por la observación será........ $D = A'L'$, mientras que el que se trata de hallar es el geocéntrico $d = AL$. Con el fin de tener los datos necesarios para la reducción, supongamos conocidas las distancias zenitales aparentes $ZL' = Z'$ y $Z'A = z'$, así como las verdaderas $ZL = Z$ y $ZA = z$, que no difieren de las anteriores más que por el efecto combinado de la refracción y de la paralaje de altura. El triángulo aparente $L'ZA'$ da la ecuación siguiente, en la cual M representa la diferencia de azimutes $L'ZA'$:

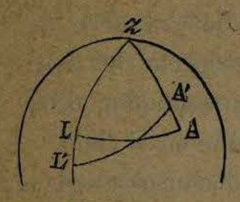

FIG. 51A

$$\cos. D = \cos. Z' \cos. z' + \text{sen.} Z' \text{sen.} z' \cos. M$$

En el triángulo verdadero LZA es el mismo el ángulo M, y por consiguiente se tendrá:

$$\cos. d = \cos. Z \cos. z + \text{sen.} Z \text{sen.} z \cos. M$$

Eliminando á cos. M entre las dos ecuaciones, resulta:

$$\frac{\cos. D - \cos. Z' \cos. z'}{\text{sen.} Z' \text{sen.} z'} = \frac{\cos. d - \cos. Z \cos. z}{\text{sen.} Z \text{sen.} z}$$

Añadiendo la unidad á cada miembro de esta ecuación y reduciendo, se halla:

$$\frac{\cos. D - \cos. (Z' + z')}{\text{sen.} Z' \text{sen.} z'} = \frac{\cos. d - \cos. (Z + z)}{\text{sen.} Z \text{sen.} z}$$

que también puede escribirse de este modo:

$$\frac{\text{sen.} \frac{1}{2}(Z' + z' + D) \text{sen.} \frac{1}{2}(Z' + z' - D)}{\text{sen.} Z' \text{sen.} z'} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(Z + z) - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} d}{\text{sen.} Z \text{sen.} z}$$

de la cual se obtiene, haciendo $m = \frac{1}{2}(Z' + z' + D)$:

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} d = \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}(Z + z) - \frac{\text{sen.} Z \text{sen.} z}{\text{sen.} Z' \text{sen.} z'} \text{sen.} m \, \text{sen.} (m - D)$$

Para hacer esta ecuación fácilmente calculable por logaritmos hagamos uso de un ángulo subsidiario N, sujeto á la condición:

$$\text{sen.}^2 N = \frac{\text{sen.} Z \text{sen.} z}{\text{sen.} Z' \text{sen.} z'} \cdot \frac{\text{sen.} m \, \text{sen.} (m - D)}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(Z + z)} \text{ ....} \quad (3)$$

y se tendrá sustituyendo:

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2} d = \text{sen.} \tfrac{1}{2}(Z + z) \cos. N \text{ ....} \quad (4)$$

fórmula que da la distancia reducida.

290.—Las distancias zenitales aparentes y verdaderas de los dos astros se obtienen, ó por la medida directa, ó por el cálculo. En el primer caso se toman las alturas ó las distancias zenitales aparentes al mismo tiempo que se mide la distancia D, lo cual demanda el concurso de tres observadores trabajando simultáneamente, ó bien la repetición de la medida de Z' y z' por un sólo observador, á fin de hallar por interpolación sus valores correspondientes al instante en que se haya medido el arco D. Si hay tres observadores, mientras uno de ellos toma la distancia del astro á la luna, los otros dos miden sus dobles alturas con horizontes artificiales, manteniendo las imágenes en contacto por medio del tornillo de aproximación, hasta que el primer observador les indica que paralicen el movimiento, cuando con su sextante haya establecido el contacto de los bordes de ambos astros. Apuntada la hora cronométrica que corresponde á ese instante, los tres observadores leen las indicaciones de sus respectivos instrumentos, dos de las cuales dan las dobles alturas y la tercera la distancia aparente de los astros, después de corregidas por los errores de los sextantes.

Si una sola persona ha de practicar toda la observación, debe comenzar por medir la altura del sol, del planeta ó de la estrella, anotando la hora correspondiente; y en seguida la de la luna, apuntando también la hora cronométrica. Hecho esto, mide la distancia angular de los dos astros con su hora respectiva; y por último, vuelve á tomar las alturas, comenzando por la luna en esta segunda vez. Como todas estas operaciones no duran mucho, se supone proporcional al tiempo el movimiento ascensional de los dos astros, y puesto que se tienen dos alturas de cada uno y las horas cronométricas correspondientes, podrá hallarse por una simple proporción el valor de las alturas para el instante de la medida de la distancia, comparando la diferencia de aquellas con el tiempo transcurrido. La hipótesis de proporcionalidad entre el ascenso ó descenso y el tiempo, es sensiblemente exacta, excepto cuando alguno de los astros esté muy inmediato al meridiano; pero aun en este caso, se sigue el mismo procedimiento, por no ser indispensable mucha precisión en los datos Z' y z', y lo único que debe hacerse es procurar invertir poco tiempo en toda la operación. Las distancias zenitales aparentes, corregidas por refracción y paralaje, suministran las verdaderas Z y z. En caso de observarse una estrella fija, sólo se corrige z' por la refracción, puesto que su paralaje es nula.

Finalmente, puede prescindir el observador de la medida directa de Z' y z', y calcular las distancias zenitales verdaderas Z y z para la hora de la observación por las fórmulas (3) del número 124, interpolando al efecto, para el mismo instante, la ascensión recta y la declinación de la luna con ayuda de la estima ó longitud aproximativa, por medio de las fórmulas (3) del número 158. Designando en seguida por R, r y P, p las refracciones y paralajes de altura de la luna y el astro respectivamente, se tendrá: $Z' = Z - R + P$ y...... $z' = z - r + p$, puesto que las correcciones deben aplicarse con signo contrario á las distancias zenitales verdaderas, para obtener las aparentes. Aquí conviene advertir que como las Tablas de refracción tienen la distancia zenital aparente por argumento, deberá hacerse uso del valor aproximativo $Z' = Z - \rho + P$ para calcular el de R, determinando á P por la fórmula (4) del número 142. Se ve que la operación de gabinete es más laboriosa cuando se calculan las distancias zenitales verdaderas, en vez de medirse directamente las aparentes; pero muchas veces es preferible este procedimiento por ser quizá más exacto cuando haya poco error en la estima.

Al tomar la distancia D, deben tenerse presentes las reglas para

el manejo del sextante expuestas en el Capítulo VI, especialmente las que se refieren á la intensidad de las imágenes. Por lo común se dirige el telescopio al astro menos luminoso, á fin de que el más brillante sea el que sufra la doble reflexión; así es que cuando se observe la luna con el sol, se visará la primera directamente, y si se observa otro astro cualquiera con la luna, aquel será el que se vise. Si á pesar de haber alejado el telescopio del limbo, con el fin de dar la misma intensidad á las imágenes, fuese la luz de la luna demasiado fuerte respecto de la del planeta ó de la estrella, se pondrá uno de los vidrios menos obscuros delante del espejo mayor. Tratándose del sol, se hará uso de la combinación de helioscopios que se juzgue más conveniente.

Importa también cerciorarse de la exactitud de la distancia D' de los bordes, haciendo oscilar ligeramente el sextante al derredor del eje del telescopio, á fin de que la imagen refleja se mueva hacia un lado y otro de la directa. Con el tornillo de aproximación deben irse haciendo las correcciones, hasta que en ese leve movimiento, el borde de la luna toque solamente al del sol ó del planeta, ó bien á la estrella en su caso. Para encontrar pronto las imágenes de los dos astros en el campo del telescopio, puede ponerse de antemano la alidada en la distancia lunar aproximativa que indiquen las Efemérides para aquella hora, pues aunque ésta es geocéntrica, nunca difiere mucho de la aparente, y se evita también de este modo el peligro de tomar equivocadamente el ángulo de la luna con otra estrella. Diré, por último, que siguiendo la regla general de visar directamente el astro menos luminoso, hay necesidad á veces de tener el sextante con la graduación hacia abajo.

291.—Antes de presentar una aplicación numérica de la determinación de la longitud por el método de distancias lunares, indiquemos dos pequeñas correcciones que generalmente no pueden omitirse sin error. Cuando los astros están poco elevados sobre el horizonte, la diversa refracción que obra en sus bordes superior é inferior, da al disco una apariencia elíptica, contrayendo sensiblemente el diámetro vertical. Resulta de aquí que el semidiámetro tabular sólo corresponde al horizontal del astro, y como por lo regular el arco medido D' está en un plano inclinado, deberán introducirse en la ecuación (2) los semidiámetros que convienen al punto de los discos por donde pasa aquel plano. Las contracciones que les corresponden se calculan fácilmente en función de los ángulos $Q = Z L' A'$ y $q = Z A' L'$, cuyos valores no se necesitan con mucha exactitud. En el número 8 hemos visto que la expresión del radio de una elipse en función del semi-eje mayor a, es $a(1 - \frac{1}{2} e^2 \text{ sen.}^2 \varphi)$; y atendiendo á que $\frac{1}{2} e^2$ es casi igual á $\frac{a-b}{a}$ (número 3), el valor precedente equivale á este otro: $a - (a-b) \text{ sen.}^2 \varphi$. Puede tomarse por φ el ángulo formado por el radio con el eje a, y como este ángulo es complementario de los que ahora designo por q y Q, si llamamos C y c las contracciones de los semidiámetros verticales, deberán emplearse en la fórmula (2) los siguientes en lugar de S y s:

$$S - C \cos.^2 Q \qquad s - c \cos.^2 q \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Los ángulos Q y q se calculan con la aproximación suficiente por las ecuaciones que siguen, haciendo uso del valor de D suministrado por la fórmula (2) y empleando logaritmos de cuatro ó cinco cifras:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen.}\, \tfrac{1}{2} Q &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\, \frac{1}{2}(z' + D - Z')\, \text{sen.}\, \frac{1}{2}(z' + Z' - D)}{\text{sen.}\, D\, \text{sen.}\, Z'}} \\ \text{sen.}\, \tfrac{1}{2} q &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\, \frac{1}{2}(Z' + D - z')\, \text{sen.}\, \frac{1}{2}(Z' + z' - D)}{\text{sen.}\, D\, \text{sen.}\, z'}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

En cuanto á las contracciones C y c, se determinan calculando las refracciones que corresponden á la distancia zenital del centro del astro, más el semidiámetro, y á la misma distancia zenital, menos el semidiámetro. La diferencia de ambas refracciones da la contracción del diámetro vertical, y, por consiguiente, la semidiferencia será la que corresponde al semidiámetro. Por lo general, no hay inconveniente en servirse sólo de las refracciones medias ρ, cuyos logaritmos constan en la Tabla I del fin. Cuando las distancias zenitales de los astros no exceden de 45° ó 50°, son sensiblemente nulos los valores de las contracciones.

La segunda corrección proviene de que referidas las distancias zenitales de la luna al zenit verdadero y no al geocéntrico, también la

paralaje, por cuyo medio se convierte Z' en Z, debe reducirse al extremo de la normal terrestre (número 150). Según esto, la fórmula (4) da la distancia lunar tal como se vería desde este último punto, y, en consecuencia, es preciso hacerle una pequeñísima corrección para reducirla al centro de la tierra. Sea P (fig. 52ª) el polo de la esfera celeste, L' el lugar que ocupa la luna vista desde el extremo de la normal y L la posición en que se ve desde el centro, siendo $u = L L'$ la diferencia de declinaciones geocéntrica y reducida al extremo de la normal. El valor de u consta en el número 150, fórmula (22), á saber: $u = A \text{ sen.}\, \varphi$.

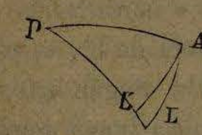

FIG. 52A

El arco $A L'$ es el que he designado por d, puesto que el otro astro, á causa de su gran distancia, se ve en A, ya sea que se suponga observado desde el centro de la tierra ó desde el punto en que la normal corta al eje polar. El arco $A L = d'$ será, pues, la distancia lunar geocéntrica que tratamos de calcular. Llamando δ y δ' las declinaciones geocéntricas de la luna y del otro astro respectivamente, se tiene: $PL = 90° - \delta$, $PA = 90° - \delta'$ y el triángulo $A P L$ da:

$$\text{sen.}\, \delta' = \text{sen.}\, \delta \cos.\, d' + \cos.\, \delta\, \text{sen.}\, d' \cos.\, L$$

En el triángulo $A L L'$ se tendrá igualmente:

$$\cos.\, d = \cos.\, d' \cos.\, u + \text{sen.}\, d'\, \text{sen.}\, u \cos.\, L$$

Eliminando á cos. L y tomando la unidad por el coseno, y el arco por el seno del pequeño ángulo u, resulta:

$$\cos.\, d - \cos.\, d' = \frac{u}{\cos.\, \delta} (\text{sen.}\, \delta' - \text{sen.}\, \delta \cos.\, d')$$

Como d y d' difieren muy poco, pueden tomarse una por otra en el segundo miembro, así como $(d' - d)$ sen. d en lugar del primero, con lo cual se obtiene:

$$d' - d = \frac{u}{\cos.\, \delta} \left(\frac{\text{sen.}\, \delta'}{\text{sen.}\, d} - \frac{\text{sen.}\, \delta}{\text{tan.}\, d} \right)$$

y sustituyendo el valor de u se halla finalmente:

$$d' = d + \frac{A\,\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\delta}\left(\frac{\text{sen.}\,\delta'}{\text{sen.}\,d} - \frac{\text{sen.}\,\delta}{\tan.\,d}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

292.—Teniendo ya la distancia geocéntrica d', no queda más que compararla con las de las Efemérides para obtener la hora correspondiente del primer meridiano. A este fin, llamando d_1 la que más se aproxime á d', τ la hora que le corresponde y v la variación de distancia que dan las Tablas por el tiempo constante de 3^h, se tendrá $x = \frac{10800^s}{v}(d' - d_1)$ por corrección de la hora τ. Según esto, la hora del primer meridiano en que era d' la distancia lunar, tendrá por expresión:

$$T' = \tau + \frac{10800^s}{v}(d' - d_1) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

y llamando T la hora local de la observación, la longitud del lugar será:

$$L = T' - T \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Cono el valor de v es algo variable, conviene calcularlo para un instante intermedio entre τ y T', lo que exigiría la determinación aproximativa de esta última hora. Sin embargo, las Efemérides dan los logaritmos de $\frac{10800}{v}$ con el título de *Log. proporcional de la diferencia*, los cuales constan al lado de cada una de las distancias; de manera que lo que puede hacerse es calcular la fórmula (8) con el logaritmo que den las Tablas, y en seguida corregir el primer resultado interpolando aquel logaritmo para el instante intermedio de que hemos hablado, si es que se cree de alguna importancia tal corrección. En lugar de proceder de esta manera, sería más exacto calcular la hora T' atendiendo á las diferencias segundas por medio de la fórmula (4) del número 159, en la que $y - a$ representa la diferencia que ahora he designado por $d' - d_1$.

Ejemplo.—El 21 de Diciembre de 1861 tomé cerca de la ciudad de Mexico una serie de cuatro distancias de Aldebarán (*α Tauri*) al limbo más lejano de la luna. El promedio, corregido por los errores del sextante, fué $D' = 79° 42' 20''$, y la hora media correspondiente,

$T = 10^h 30^m 54^s.8$. La latitud del lugar era $\varphi = 19° 25' 53''$ y la estima $L = 6^h 36^m 23^s$. No habiendo medido las distancias zenitales aparentes, calculé las verdaderas por las fórmulas (3) del número 124, tomando los datos para la hora $T + L$ de Greenwich, y reduciendo la declinación de la luna al extremo de la normal. De este modo obtuve:

$$Z = 76° 53' 46'' \qquad\qquad z = 3° 29' 24''$$

La paralaje horizontal de la luna, corregida por latitud y altura [número 150 fórmula (21)] fué $\pi = 56' 59''.6$, y el semidiámetro aparente (número 144), $S = 15' 36''.6$. Calculando la paralaje de altura por la fórmula (4), número 142, hallé $P = 55' 42''.7$. Para determinar la refracción se tenía: presión $0^m.590$ á 0° de temperatura, é indicación del termómetro libre, 5°. Calculando el valor de R con estos datos y $Z + P = 77° 49'.5$ resultó $209''$, y repitiendo el cálculo con $Z + P - R = 77° 46'$ encontré $207''.7$, por lo que la distancia zenital aparente será: $Z' = 77° 46' 1''$. De una manera análoga resulta para la estrella $z' = 3° 29' 21''$.

Con Z', z' y $D = D' - S = 79° 26' 43''$, la primera de las fórmulas (6), calculada con logaritmos de cuatro decimales, produce...... $Q = 3° 7' 16''$ próximamente; y calculando la refracción para $Z' + S$ y $Z' - S$, se halla $212''.2$ y $203''.5$, de donde se infiere que la contracción del semidiámetro vertical de la luna es $C = 4''.3$. Con C y Q la primera de las fórmulas (5) da $15' 32''$ por semidiámetro corregido, y así la distancia lunar aparente es $D = 79° 26' 48''$. Calculemos ahora las ecuaciones (3) y (4) recordando que $m = \frac{1}{2}(Z' + z' + D)$.

$D = 79° 26' 48''$	sen. Z.........	9.9885413			
$Z' = 77\ \ 46\ \ \ 1$	sen. z..........	8.7844342			
$z' = \ \ 3\ \ 29\ \ 21$	sen. m........	9.9938127			
	sen. $(m-D)$.	8.1983746			
$m = 80° 21' \ 5''$	sen. Z'.........	-9.9900252			
$m - D = \ 0\ \ 54\ \ 17$	sen. z'.........	-8.7843306			
	sen.$^2 \frac{1}{2}(Z+z)$.	-9.6196108		cos. N.........	9.9917555
				sen. $\frac{1}{2}(Z+z)$.	9.8098054
	sen.$^2 N$........	8.5711962			
				sen. $\frac{1}{2} d$........	9.8015609
	sen. N.........	9.2855981			
				$\frac{1}{2} d = 39° 17' 19''$	
	$N = 11° 7' 44''$			$d = 78\ \ 34\ \ 38$	

Para calcular la reducción al centro de la tierra, se tienen los datos:

$$\delta = +8^\circ 38' 46''.8 \qquad \pi = 57' \qquad \delta' = +16^\circ 13' 48''.2$$

Con los dos primeros se halla log. $A = 1.354$ en la Tabla del número 150, y así:

A..................	1.354				
sen. φ............	9.522				
cos. δ............	-9.995			Primer término.....	2″.2
				Segundo „	-0 .2
	0.881	....	0.881		
sen. δ'............	9.446	sen. δ..........	9.177	$d' - d =$	$+$ 2″.0
tan. d............	-9.991	tan. d..........	-0.695	$d =$	78° 34′ 38 .0
	0.336		9.363	$d' =$	78° 34′ 40″

Refiriéndonos ahora al Almanaque americano, hallamos que el 21 de Diciembre de 1861, á 15^h y á 18^h de Greenwich las distancias geocéntricas de α *Tauri* al centro de la luna, eran:

A 15^h .... $d_1 = 77^\circ 25' 41''$

„ 18 .... $d_1 = 79 \quad 2 \ 56$

La que más se aproxima á la observada d' es la segunda, y así tomaremos $\tau = 18^h$, $d_1 = 79^\circ.2' 56''$ y $v = 1^\circ 37' 15'' = 5835''$ para obtener:

$d' = 78^\circ 34' 40''$		
$d_1 = 79 \quad 2 \ 56$		
	10800ˢ......	4.0334238
$d' - d_1 = -\ 28' 16'' = -1696''$	....	3.2294258−
$v = 1 \ 37 \ 15 = 5835$	....	−3.7660409
		3.4968087−
		$-\ 3139^s.1 = -\ 0^h 52^m 19^s.1$
	$\tau =$	18 00 00 .0
Hora media de Greenwich...............	$T' =$	$17^h \ 7^m 40^s.9$
„ „ local...........................	$T =$	10 30 54 .8
Longitud....................................	$L =$	$6^h 36^m 46^s.1$

Entre 18^h y 21^h de Greenwich la variación de la distancia es 14″ mayor, á saber, $v = 5849''$. Para proceder con la posible exactitud debería hacerse uso del valor de v correspondiente al instante medio $17^h.6$ entre τ y T'; y como el empleado en el cálculo puede suponerse que corresponde á $16^h.5$, variando á razón de 14″ por 3^h, hallaremos proporcionalmente $v = 5840''$ para $17^h.6$ Repitiendo el cálculo con este valor se encuentra $L = 6^h 36^m 48^s.8$ por longitud según esta observación.

293.—El resultado excede en más de 20^s á la estima ó longitud supuesta al principio, y como ésta es casi exacta, debe atribuirse la diferencia al efecto combinado de los pequeños errores de observación y de los que pueden existir en la posición tabular de la luna. Los primeros, obrando directamente sobre d', producen en la hora T' de Greenwich, y por consiguiente en la longitud, el efecto...... $\frac{10800^s}{v} \Delta G$, según lo manifiesta la fórmula (8), siendo ΔG la corrección que necesite la graduación del instrumento en el punto en que se haya hecho la lectura angular. Los segundos dan por resultado un valor inexacto de la distancia tabular d_1, calculada por la ecuación (1). Determinemos los coeficientes de estos errores, suponiendo que $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ son las correcciones que necesitan la ascensión recta y la declinación de la luna que constan en las Efemérides. Diferenciando la ecuación (1) respecto de α y de δ sucesivamente, hallaremos:

$$\frac{\mathrm{d}\,d_1}{\mathrm{d}\,\alpha} = \frac{\cos.\delta \cos.\delta' \operatorname{sen.}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen.} d_1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,d_1}{\mathrm{d}\,\delta} = \frac{\operatorname{sen.}\delta \cos.\delta' \cos.(\alpha - \alpha') - \cos.\delta \operatorname{sen.}\delta'}{\operatorname{sen.} d_1}$$

Multiplicando por 15 el primer coeficiente diferencial, con el objeto de poder introducir á $\Delta\alpha$ en segundos de tiempo, la corrección de la distancia tabular será:

$$\Delta d_1 = \frac{15 \cos.\delta \cos.\delta' \operatorname{sen.}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen.} d_1} \Delta\alpha$$

$$+ \frac{\operatorname{sen.}\delta \cos.\delta' \cos.(\alpha - \alpha') - \cos.\delta \operatorname{sen.}\delta'}{\operatorname{sen.} d_1} \Delta\delta$$

y como según lo manifiesta la ecuación (8), esta corrección debe quedar multiplicada por $\frac{10800^s}{v}$, produciendo el efecto de disminuir, cuando es positiva, la hora T' y por tanto la longitud, hallaremos que la corrección de L por los errores del instrumento y de las coordenadas de la luna, tiene por expresión:

$$\left.\begin{aligned} \Delta L = \frac{10800}{v}\,\Delta G - \frac{162000}{v}\cdot\frac{\cos.\delta\cos.\delta'\,\mathrm{sen.}\,(a-a')}{\mathrm{sen.}\,d_I}\,\Delta a \\ + \frac{10800}{v}\cdot\frac{\cos.\delta\,\mathrm{sen.}\,\delta' - \mathrm{sen.}\,\delta\cos.\delta'\cos.\,(a-a')}{\mathrm{sen.}\,d_I}\,\Delta\delta \end{aligned}\right\}\dots (10)$$

En nuestro ejemplo, á la hora de la observación se tenía:

Luna.............	$a = 9^h\,50^m\,11^s.15$	$\delta = +\ 8°\,38'\,46''.8$
a *Tauri*.........	$a' = 4\ 28\ \ 2.69$	$\delta' = +16\ 13\ 48\ .2$

Calculando con estos elementos los coeficientes de los errores, para lo cual bastan logaritmos de tres ó cuatro decimales, se halla:

$$\Delta L = 1.8\,\Delta G - 26.5\,\Delta a + 0.5\,\Delta\delta$$

ecuación que permite corregir el primer resultado luego que se conocen las correcciones de graduación y posición tabular de la luna. En nuestro caso, habiéndose corregido desde un principio la lectura angular por los errores del instrumento, tendremos $\Delta G = 0$. Con el fin de aplicar esta fórmula. y á falta de observaciones correspondientes de la luna, tomaré por posición correcta el término medio de las que le asignan los Almanaques inglés y americano el día de la observación, á saber:

A 17^h de Greenwich (Almanaque amer.)....	$a = 9^h\,49^m\,56^s.50$	$\delta = 8°40'18''.5$
„ „ (Almanaque inglés)...	$a = 9\ 49\ \ 57\ .37$	$\delta = 8\ 40\,12\ .5$
Promedios...............	$a = 9^h\,49^m\,56^s.93$	$\delta = 8°40'15''.5$

Habiendo tomado del primero todos los datos del cálculo, sus correcciones respecto de los promedios serán: $\Delta a = +\,0^s.43$ y......... $\Delta\delta = -\,3''.0$. Sustituyendo resultará:

$$\Delta L = -11^s.4 - 1^s.5 = -12^s.9$$

y la longitud correcta será: $L + \Delta L = 6^h\,36^m\,35^s.9$.

En la práctica el método de distancias lunares no corresponde generalmente á su rigor teórico, á causa de la dificultad de medir exactamente los arcos celestes con instrumentos de reflexión, cuyo poder óptico es siempre pequeño; pues aunque por su medio se obtienen las lecturas angulares con aproximación de $5''$, es evidente que en la apreciación de los contactos puede cometerse un error más considerable, y cada segundo de error en el ángulo produce otro de 2^s en la longitud con poca diferencia. En cuanto á los errores instrumentales de excentricidad, etc., se eliminarán en su mayor parte observando distancias de estrellas situadas tanto al Este como al Oeste de la luna, porque aquellos errores producirán efectos contrarios, y en consecuencia, un promedio independiente de los mismos, sobre todo si las distancias medidas son poco diferentes. No obstante estos defectos, el método de distancias lunares es casi el único que pueden aplicar los marinos, de modo que bajo este punto de vista es de la mayor importancia, suministrando siempre la longitud con la aproximación bastante para las necesidades usuales de la navegación. Para evitarse trabajo de gabinete, en lugar de calcular las distancias zenitales verdaderas, toman por lo regular los marinos las alturas aparentes, sirviéndose del horizonte del mar y corrigiéndolas por la depresión (Tomo I, número 262). Con esto y con el auxilio de varias Tablas preparadas al efecto, que constan en todos los tratados de navegación, se abrevia el cálculo notablemente. El Profesor norteamericano Mr. Chauvenet en su *Manual of spherical and practical Astronomy*, presenta un método abreviado para reducir las distancias lunares, que á la exactitud práctica necesaria reune mucha facilidad para la ejecución de los cálculos.
