El resto del cálculo es como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{Num} \ldots\ldots & 0.6599751 \\ \text{Den} \ldots\ldots & -0.8369062 \\ \hline \text{tan.}\, h \ldots\ldots & -9.8230689 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} h = +33^\circ\, 38'\, 20''.2 \ldots\ldots & +33^\circ\, 38'\, 20''.2 \\ Q = +63\;\; 15\;\; 58\;.4 & Q' = +36\;\; 14\;\; 17\;.9 \\ \hline h - Q = -29^\circ\, 37'\, 38''.2 & h - Q' = -\;\; 2^\circ\, 35'\, 57''.7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} q \ldots\ldots\ 9.9156238- & q \ldots\ldots\ 0.9530755- \\ \text{sen.}\,(h-Q) \ldots\ 9.6940396- & \text{sen.}\,(h-Q) \ldots\ 8.6565950- \\ \hline \text{tan.}\,\varphi \ldots\ldots\ 9.6096634 & \text{tan.}\,\varphi \ldots\ldots\ 9.6096705 \\ \varphi = 22^\circ\, 8'\, 58''.2 & \varphi = 22^\circ\, 8'\, 59''.4 \end{array}$$

La pequeña diferencia de los dos valores de φ proviene de los ligeros errores inevitables de la aproximación logarítmica, y el promedio $\varphi = 22^\circ\, 8'\, 58''.8$ es el que, en general, convendrá adoptar. Para la corrección del cronómetro tendremos:

$$\begin{array}{rl} h = + & 2^h\, 14^m\, 33^s.35 \\ a = & 10\;\; 1\;\; 18\;.19 \\ \hline \text{Hora sideral} = & 12^h\, 15^m\, 51^s.54 \\ \text{Asc. recta} = & 3\;\; 8\;\; 25\;.78 \\ \hline & 9^h\;\; 7^m\, 25^s.76 \\ \text{Reduc.} = - & 1\;\; 29\;.68 \\ \hline \text{Hora media} = & 9^h\;\; 5^m\, 56^s.08 \\ t = & 9\;\; 15\;\; 58\;.30 \\ \hline \Delta t = - & 10^m\;\; 2\;.22 \end{array}$$

Una vez hallada la hora y la latitud, podría determinarse la corrección del sextante aplicando el método expuesto en el número 195, sin más elementos adicionales que el error inicial y la refracción.

CAPITULO XXII.

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE LA LATITUD Y DE LA HORA.—MÉTODO MEXICANO.

283.—Varias veces he indicado la dificultad de medir con toda exactitud los ángulos verticales. Hay, en efecto, tantas circunstancias diferentes que tienden á alterar la precisión de esas medidas, como son la flexión de los telescopios, la incertidumbre de las refracciones, la deformación de los círculos verticales de los instrumentos por la acción de la pesantez, etc., que cuando se desea determinar la latitud con toda la exactitud que en muchos casos es necesaria, se prefiere á veces recurrir á procedimientos más ó menos independientes de las distancias zenitales.

Consideraciones de este género son las que me condujeron á imaginar el nuevo método que forma el objeto de este Capítulo, y que tiene por base la sustitución de un ángulo horizontal, en lugar del vertical que generalmente se emplea en los demás procedimientos. Suponiendo que se observe una estrella con el altazimut, ó cualquier otro instrumento que permita la medida de ángulos horizontales, sean h y a su ángulo horario y su azimut respectivamente. La ecuación general del número 125 dará:

$$\cos.\varphi \tan.\delta - \text{sen.}\,\varphi \cos.h = \cot.a\, \text{sen.}\,h \ldots\ldots (1)$$

que puede calcularse fácilmente por logaritmos, por m edio de un ángulo subsidiario M á saber:

$$\tan.M = \frac{\tan.\delta}{\cos.h} \qquad \text{sen.}\,(M-\varphi) = \cos.M \tan.h \cot.a \ldots\ldots (2)$$

Una vez calculados M y $M-\varphi$, su diferencia da la latitud φ que se busca.

Los datos h y a pueden obtenerse por la observación de esta manera: siendo G la lectura del círculo azimutal cuando se corta la estrella con el hilo central del telescopio, y m la lectura meridiana, esto es, su indicación cuando el telescopio está dirigido al punto Norte del horizonte, tendremos: $a=m-G$. Suponemos que la graduación del instrumento esté numerada de izquierda á derecha, y que G esté ya corregido por los errores de los micrómetros, de los niveles, de la colimación, etc. (número 52).

En cuanto al ángulo horario, siendo t la hora cronométrica de la observación, Δt la corrección del cronómetro en el mismo instante y α la ascensión recta de la estrella, sabemos que se tiene en tiempo: $h=t+\Delta t-\alpha$.

284.—Este método, tal como hasta aquí lo he expuesto, presenta el inconveniente de suponer determinados, por medio de observaciones preliminares, los valores de m y Δt. Trazaré en seguida el procedimiento mucho más cómodo, que es independiente de estos datos y aun permite su determinación; pero antes de hacerlo, examinemos brevemente la ecuación fundamental para deducir las condiciones más ventajosas de la observación. Suponiendo, en general, que los tres elementos h, a y δ tengan los pequeños errores Δh, Δa, $\Delta \delta$, el del resultado será de la forma:

$$\Delta \varphi = \frac{d\varphi}{dh}\Delta h + \frac{d\varphi}{da}\Delta a + \frac{d\varphi}{d\delta}\Delta \delta$$

Diferenciando la fórmula (1) con relación á φ, y sucesivamente con relación á h, a y δ, se obtendrá sin dificultad, por simples sustituciones, y siendo z la distancia zenital de la estrella en el momento de la observación:

$$\frac{d\varphi}{dh} = (\text{sen.}\,\varphi \tan.a - \cot.h)\cos.a \tan.z$$

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{\tan.\,z}{\text{sen.}\,a}$$

$$\frac{d\varphi}{d\delta} = \frac{\cos.\,\varphi}{\cos.\,\delta \cos.\,z}$$

Se ve por estas expresiones que el coeficiente del error del ángulo horario se nulifica cuando sea recto el ángulo paraláctico, puesto que se tiene entonces $\text{sen.}\,\varphi = \cot.a \cot.h$; y que el mismo coeficiente será muy pequeño siempre que el azimut de la estrella no difiera mucho de 90°. En las mismas circunstancias será también muy pequeño el coeficiente del error azimutal, sobre todo si la observación tiene lugar no muy lejos del zenit. En cuanto al coeficiente de $\Delta \delta$, será el menor posible, para valores dados de φ y δ, siempre que sea poco considerable la distancia zenital de las estrellas.

El resultado general de este examen indica, pues, la conveniencia de observar estrellas que puedan tener un gran azimut á la vez que una distancia zenital pequeña; y para llenar ambas condiciones deben elegirse aquellas cuyas declinaciones no difieran mucho de la latitud del lugar. Observándolas á poca distancia del meridiano, se obtendrán siempre resultados casi independientes de los pequeños errores de observación.

285.—A fin de dar al instrumento la posición conveniente y de conocer la hora de la observación, se calcula la distancia zenital ó el azimut de la estrella, asignando el valor que se quiera á uno de estos elementos y empleando una latitud aproximativa. Así, con φ, z y δ se tendrá el azimut por las fórmulas:

$$p=\tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta) \qquad q=\tfrac{1}{2}(z+\varphi-\delta) \qquad \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos.p\,\text{sen.}\,q}{\cos.\varphi\,\text{sen.}\,z}}$$

Si se fija a en primer lugar, tendremos con φ y δ:

$$\tan.N=\frac{\tan.\,\varphi}{\cos.\,a} \qquad \text{sen.}\,(N+z)=\frac{\text{sen.}\,N\,\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,\varphi}$$

fórmulas que dan z. Finalmente, para la hora de la observación, se calcula el ángulo horario por la ecuación: $\text{sen.}\,h\cos.\delta=\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,z$, de donde se deduce la hora media ó sideral. Todos estos cálculos, no debiendo ser más que aproximativos, se ejecutan con logaritmos de cuatro ó cinco cifras.

286.—Pasemos ahora á exponer el modo de operar sin conocer ni la lectura meridiana m ni la corrección Δt del cronómetro, lo cual exige la doble observación de la estrella á la misma altura, de ambos lados del meridiano. Admitamos también, para mayor generalidad, que no sean exactamente iguales las dos distancias zenitales; que la columna vertical del instrumento y su eje horizontal tengan pequeños errores indicados por los niveles; y por último, que exista igualmente un pequeño error de colimación en el hilo central de la retícula.

Sea, pues, Δz el número de segundos que la distancia zenital occidental es menor que la oriental; si designamos por g la lectura del círculo vertical, por n la del nivel que le es paralelo, por r la refracción, y si distinguimos con acentos los mismos elementos al Este del meridiano, siendo g_0 la indicación zenital del telescopio, las dos distancias zenitales verdaderas de la estrella serán:

$$z = g' - g_0 + n' + r'$$
$$z - \Delta z = g - g_0 + n + r$$

ecuaciones de las cuales resulta:

$$\Delta z = (g' - g) + (n' - n) + (r' - r) \text{ .... } (3)$$

Las expresiones de n y n' son:

$$n = \tfrac{1}{2}(o - e)v \qquad n' = \tfrac{1}{2}(o' - e')\,v$$

representando o y e respectivamente las indicaciones de los extremos *ocular* y *objetivo* de la burbuja, y v el valor angular de una división de la escala.

Cuando Δz es pequeña, puede suponerse $r = r'$, ó al menos tomar por $r' - r$ la diferencia de las refracciones tabulares, sin atender á las indicaciones de los instrumentos meteorológicos. Si se observa en la posición inversa del telescopio, esto es: en aquella en que g_0 es mayor que g ó g', se tomará $g - g'$ en lugar de $g' - g$.

Los efectos de Δz en la hora t y en la lectura azimutal G correspondientes á la observación occidental, serán (números 178 y 232):

$$\left.\begin{aligned} \Delta h &= \frac{dh}{dz}\,\Delta z = \frac{\Delta z}{15 \cos.\varphi \operatorname{sen}.a} \\ \Delta G &= \frac{da}{dh}\cdot\frac{dh}{dz}\,\Delta z = \frac{\cot.h \cos.a - \operatorname{sen}.\varphi \operatorname{sen}.a}{\cos.\varphi}\,\Delta z \end{aligned}\right\} \text{ ...... } (4)$$

El primero se ha dividido por 15 para que Δh resulte desde luego expresado en tiempo. El segundo puede también reemplazarse por el siguiente (número 239):

$$\Delta G = \frac{da}{dz}\,\Delta z = \left(\cot.a \cot.z - \frac{\tan.\varphi}{\operatorname{sen}.a}\right)\Delta z$$

puesto que sólo se necesita un valor aproximativo de z.

Con estas correcciones, que reducen la observación occidental á la misma altura que la oriental, se tiene al Este y al Oeste del meridiano:

$$-h = t' + \Delta t_0 - u(t_0 - t') - a$$
$$+h = t + \Delta t_0 + u(t - t_0) - a + \Delta h$$

siendo Δt_0 la corrección del cronómetro en el instante medio t_0 de las observaciones, ó sea en el de la culminación de la estrella, y u la marcha del instrumento en la unidad de tiempo. Ambas cantidades son positivas cuando el cronómetro atrase.

De estas ecuaciones se deduce:

$$\left.\begin{aligned} h &= \tfrac{1}{2}(t - t') + \tfrac{1}{2}(t - t')\,u + \tfrac{1}{2}\Delta h \\ \Delta t_0 &= a - \tfrac{1}{2}\Delta h - \tfrac{1}{2}(t + t') \end{aligned}\right\} \text{ .... } (5)$$

relaciones que dan á conocer el ángulo horario de la estrella, expresado en tiempo, y el estado del cronómetro. Si este instrumento señala tiempo medio, debe reducirse á sideral la duración $t - t'$, y hacerse uso de la hora media del tránsito en lugar de la sideral a.

Procediendo de una manera análoga respecto del azimut, siendo b la indicación del nivel montante y c la colimación del hilo vertical del centro, tendremos al Este y al Oeste:

$$-a = m - \left(G' + b' \cot.z + \frac{c}{\operatorname{sen}.z}\right)$$
$$+a = m - \left(G + b \cot.z + \frac{c}{\operatorname{sen}.z} - \Delta G\right)$$

de donde resulta:

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(G' - G) + \tfrac{1}{2}(b' - b)\cot.z + \tfrac{1}{2}\Delta G \\ m &= \tfrac{1}{2}(G + G') + \tfrac{1}{2}(b + b')\cot.z - \tfrac{1}{2}\Delta G + \frac{c}{\operatorname{sen}.z} \end{aligned}\right\} \text{ ...... } (6)$$

Las lecturas b y b' tienen por expresión (número 48):

$$b = \tfrac{1}{4}[(i+i') - (d+d')]\,\omega$$

en la que i é i' representan las indicaciones de la extremidad izquierda de la burbuja en las dos posiciones del nivel, d y d' las de la extremidad derecha y ω el valor angular de las divisiones.

Una vez determinados así los valores correctos de h y a, se calculará la latitud por las fórmulas (2). Debe notarse que estos dos datos principales tienen la ventaja fundamental de estar expresados en función de las *diferencias* de las indicaciones instrumentales, y que, por consiguiente, resultan independientes de los errores constantes de los instrumentos ó del observador. [1]

287.—El modo de practicar la observación es bastante sencillo, y se deduce fácilmente de todo lo que hemos dicho. Se escoge una estrella de posición bien conocida, que culmine cerca del zenit y antes de su paso por el meridiano se le dirige el telescopio, fijado de antemano á la altura que se haya juzgado conveniente. Se establece su coincidencia con el hilo vertical del centro, y se mantiene en ella por medio del tornillo de aproximación del círculo azimutal, cuyo movimiento se suspende en el momento en que la estrella atraviesa el hilo horizontal del centro. Se anota la hora t' de ese instante, la indicación n' del nivel paralelo al círculo vertical, y en seguida la lectura g' de éste, así como la G' del círculo horizontal. Por último, se coloca el nivel montante sobre el eje horizontal, y se apuntan las indicaciones de la burbuja en las dos posiciones de este instrumento, para determinar la inclinación b'. La lectura del círculo vertical no es realmente necesaria más que cuando se hacen varias observaciones de la misma estrella á distintas alturas, á fin de poder colocar el telescopio en las posiciones correspondientes del otro lado del meridiano; pero es útil para dar á conocer desde luego el valor aproximativo de z, que sirve para corregir el azimut por el error de horizontalidad del eje de rotación.

1 Insisto en señalar esta ventaja, porque en una publicación científica de Alemania que hace referencia á mi método, parece indicarse que él demanda la medida de los azimutes absolutos, á la vez que la de las distancias zenitales iguales. Se ve que esta apreciación es inexacta, pues ambos elementos pueden ser bastante desiguales, y la distancia zenital no figura más que en los pequeños términos de corrección.

Cuando, después de su paso por el meridiano, se aproxima la estrella á la altura de la última observación oriental, se procede de la misma manera, habiendo fijado el telescopio en la posición correspondiente á esta altura. Con el tornillo tangencial del círculo azimutal se conserva el hilo vertical en coincidencia con la estrella, hasta el instante en que atraviesa el hilo horizontal del centro. Se apunta la hora t, las lecturas n del nivel g del círculo vertical y G del azimutal; y finalmente, se toma la inclinación b del eje de rotación del telescopio, procediendo conforme se dijo antes.

De una manera idéntica se ejecutan la segunda, la tercera, etc., observaciones al Oeste, que respectivamente corresponden á la penúltima, á la antepenúltima, etc., al Este del meridiano.

En cuanto á los cálculos, para que se comprenda bien su ejecución, expondré un ejemplo completamente detallado, comenzando por escribir en su orden las fórmulas que deben aplicarse:

$$\Delta z = (g'-g) + (n'-n) + (r'-r)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta z}{15 \cos.\varphi \operatorname{sen}.a}$$

$$\Delta G = \frac{\cot.h \cos.a - \operatorname{sen}.\varphi \operatorname{sen}.a}{\cos.\varphi}\,\Delta z$$

$$h = \tfrac{1}{2}(t-t') + \tfrac{1}{2}(t-t')u + \tfrac{1}{2}\Delta h$$

$$a = \tfrac{1}{2}(G'-G) + \tfrac{1}{2}(b'-b)\cot.z + \tfrac{1}{2}\Delta G$$

$$\Delta t_{\circ} = a - \tfrac{1}{2}\Delta h - \tfrac{1}{2}(t+t')$$

$$\tan.M = \frac{\tan.\delta}{\cos.h}$$

$$\operatorname{sen}.(M-\varphi) = \cos.M \tan.h \cot.a$$

La siguiente es la última observación de la estrella ε *Tauri* que hice en la ciudad de México. Las horas son las del péndulo sideral de mi Observatorio privado, y las indicaciones angulares expresan los promedios de todos los micrómetros, tanto del círculo vertical como del horizontal del altazimut.

Al Este del meridiano.

t'	g'	o' e'	G'	i' d'
$4^h\,7^m\,15^s.0$	93° 00′ 6″.0	55 54	102° 7′ 46″.0	59 63
				55 67

Al Oeste del meridiano.

t	g	o e	G	i d
$4^h\,32^m\,15^s.0$	93° 00′ 6″.0	55 55	262° 24′ 13″.7	57 62
				53 68

Se tenía, además, $v = 1'',04$ y $w = 1'',27$. El péndulo tenía un atraso diario de 6^s, ó sea de $0^s.25$ por hora. La posición de la estrella, según el Almanaque Náutico americano, era:

$$\alpha = 4^h\,21^m\,8^s.55 \qquad \text{y} \qquad \delta = +18°\,53'\,41''.0$$

Para calcular las pequeñas correcciones Δh y ΔG, pueden emplearse los valores aproximativos $\varphi = 19°\,26'$, $a = \frac{1}{2}(G' - G) = 99°52'$, $h = \frac{1}{2}(t - t') = 3°\,7'$, y $z = g - g_0 = 3°\,00'$, con los que ordenaremos el cálculo como sigue:

$g' - g =$	00″.00	Δz	9.7160+	$\frac{1}{2}(b' - b)$	9.7781+
$n' - n =$	+ 0 .52	$\frac{1}{15}$ sec. φ ..	8.8494	cot. z	1.2806
$r' - r =$	0″.00	sen. a	−9.9935		1.0587+
$\Delta z =$	+ 0 .52				
		Δh	8.5719+	Nivel =	+ 11″.45
		Δh ... =	$+0^s.04$		

cot. h	1.2640	sen. φ	9.5221	
cos. a	9.2339−	sen. a	9.9935	
	0.0255	sec. φ	0.0255	− 1″.74
	9.7160+	Δz	9.7160+	− 0 .18
	0.2394−		9.2571+	$\Delta G = -$ 1″.92

$\frac{1}{2}(t - t') =$	$0^h\,12^m\,30^s.00$	$\frac{1}{2}(G' - G) =$	99°51′46″.15	$\frac{1}{2}(t + t') =$	$4^h\,19^m\,45^s.00$
Marcha =	+ 0 .05	Nivel =	+ 11 .45	$\frac{1}{2}\Delta h =$	+ 0 .02
$\frac{1}{2}\Delta h =$	+ 0 .02	$\frac{1}{2}\Delta G =$	− 0 .96		$4^h\,19^m\,45^s.02$
$h =$	$0^h\,12^m\,30^s.07$	$a =$	99°51′56″.6	$\alpha =$	4 21 8 .55
	3° 7′ 31″.0			$\Delta t_0 =$	+ $1^m\,23^s.53$

tan. δ	9.5343735	tan. h	8.7371970		
cos. h	9.9993536	cos. M	9.9758761	$M =$	18° 55′ 15″.1
tan. M	9.5350199	cot. a	9.2403284−	$M - \varphi =$	0 30 52 .8−
		sen. $(M - \varphi)$.	7.9534015−	$\varphi =$	19° 26′ 7″.9

Cinco observaciones de esta estrella, hechas en la misma noche, entre 3° y 15° de distancia zenital, me dieron en término medio $\Delta t_0 = 1^m\,23^s.47$ y $\varphi = 19°\,26'\,7''.52$. Por toda la serie, que comprende 22 observaciones de ε *Tauri*, obtuve $\varphi = 19°\,26'\,7''.54$; y otra serie de 18 observaciones de la estrella β *Arietis*, que también culmina cerca del zenit de México, me dió $\varphi = 19°\,26'\,7''.93$ por término medio. La concordancia de estos resultados manifiesta la gran precisión con que es posible obtener, en poco tiempo, la latitud por el método mexicano.