En cuanto al pequeño azimut del eje horizontal, se obtiene por la ecuación (1), que casi siempre puede aplicarse bajo la forma $u=\varepsilon$ sen. φ . En nuestro ejemplo, con el valor medio de ε , resulta u=-2'21''.6.

279.—El método de Bessel ha hallado muy buena acogida entre los astrónomos, y da, en efecto, excelentes resultados en las altas latitudes de Europa. Por mi propia experiencia juzgo, sin embargo, que en nuestros países intertropicales es menos favorable, á causa de la notable incertidumbre con que se observan los tránsitos por el primer vertical cuando, como sucede en las bajas latitudes, la senda aparente de las estrellas tiene muy poca inclinación respecto de aquel plano. Sucede entonces que el movimiento vertical es tan rápido y el azimutal tan lento, que la estrella parece moverse durante varios segundos en la dirección misma de los hilos, lo cual hace necesariamente incierta la apreciación de los instantes precisos en que los atraviesa, instantes de los que depende el valor de θ . En el ejemplo precedente podrá notarse que aunque me había yo servido de hilos, colocados expresamente para esta observación, á muy corta distancia del central, los intervalos de tiempo son casi de dos minutos; y que difieren algo entre sí los correspondientes á los mismos hilos. El efecto de la incertidumbre se nota también en los valores de e, á consecuencia de que los de $\frac{1}{2}(T+T')$ no resultan sensiblemente iguales, como deberían resultar si los tránsitos hubieran sido más instantáneos. Creo, por lo expuesto, que este método, tan perfecto en teoría y no obstante la sencillez de las operaciones que demanda, no es de recomendarse en latitudes inferiores á 20° ó 25°.

CAPITULO XXI.

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE LA LATITUD Y DE LA HORA.

280.—Cuando no se reflexiona detenidamente acerca de la influencia relativa de los elementos que contribuyen á la determinación de una cantidad cualquiera, parece indispensable la completa exactitud de aquéllos para que resulte la incógnita con el mismo grado de precisión. Esta condición es ciertamente necesaria en teoría; pero como, por una parte, en la práctica todas nuestras apreciaciones tienen inevitablemente un límite más allá del cual es inútil pretender llevar la exactitud, y por otra, la combinación de los datos que han de producir la cantidad que se busca, es generalmente de tal naturaleza ó de tal forma, que hace muy variables las influencias de los elementos conocidos, se infiere desde luego que modificando convenientemente y hasta donde sea posible aquella combinación, somos dueños, hasta cierto punto, de eliminar el efecto de un elemento inexacto. Así, por ejemplo, hemos visto en el número 179, que por la simple elección de la figura del triángulo astronómico, se destruye casi del todo la influencia de un pequeño error de la latitud, pudiéndose obtener la hora con suficiente exactitud práctica, aunque este último elemento no se conozca más que aproximadamente, con sólo observar el astro cerca del primer vertical de la estación. De una manera análoga vimos en el número 249 que puede determinarse, con la misma exactitud práctica, la latitud de un lugar sin que influya un pequeño

error de la hora, con sólo ejecutar la observación en los momentos del tránsito del astro.

Con estos ejemplos se comprenderá toda la importancia de las investigaciones dirigidas á estudiar la influencia relativa de los datos de un problema. Precisamente en el caso que he citado, dependiendo la hora de la latitud y ésta de aquélla, parecería imposible la determinación exacta de ambos elementos sin el estudio previo del efecto que cada uno de ellos ejerce en la resolución de los dos problemas; pero habiéndose expuesto ampliamente en los Capítulos VII, VIII, IX y X la pequeña influencia de la latitud en la determinación de la hora, y en los que preceden á éste, desde el XV inclusive, el efecto igualmente insignificante que tiene en la latitud un pequeño error de la hora, se comprenderá sin dificultad que sujetándose á las prescripciones que resultan de aquel estudio, es posible hallar ambas cantidades partiendo de datos puramente aproximativos.

Lo que precede es quizá suficiente para que el observador guíe en todos casos sus operaciones de la manera más eficaz para la determinación de los dos importantes elementos, hora y latitud; pero no me parece inútil trazarle una marcha sistemática que le dé brevemente el mismo resultado, pues al ocupar por la primera vez una estación para emprender una serie de trabajos astronómicos, hay veces que se ignora del todo el valor aproximativo de aquellas cantidades. El método que me parece más sencillo para determinarlas con el grado de aproximación bastante para que en seguida se pueda proceder á su corrección definitiva, consiste en medir las distancias zenitales de dos estrellas, situada la una cerca del meridiano, y la otra tan inmediata al primer vertical como sea posible, anotando las horas cronométricas correspondientes. Para estimar la dirección de ambos planos basta el conocimiento de algunas constelaciones, con especialidad de las próximas al polo, y sobre todo el de la estrella polar, cuyo azimut nunca llega á 2º en nuestras regiones.

La estrella observada cerca del meridiano dará una distancia zenital que difiera muy poco, acaso sólo algunos segundos, de su distancia zenital meridiana, por ser tan lento el movimiento ascensional de los astros en los momentos de sus tránsitos. En consecuencia,

las fórmulas del número 253 suministran un valor de la latitud suficientemente exacto para que pueda emplearse sin inconveniente alguno en la determinación de la hora, sirviéndose al efecto de la distancia zenital de la estrella observada cerca del primer vertical y aplicando el método del Capítulo VII. La poca influencia que entonces tiene el error de la latitud, da por resultado que se hallará la hora casi con entera exactitud.

Los dos elementos así determinados bastarán generalmente para aplicar en seguida cualquier otro procedimiento con el fin de corregir la latitud; pero cuando no se tiene oportunidad de practicar nuevas observaciones, como sucede al hacer una rápida exploración, importa sacar el mejor partido posible de las únicas que hayan podido ejecutarse. En tal caso, la hora hallada se emplea en reducir al meridiano la distancia zenital de la primera estrella, aplicando el método del Capítulo XVI, ó bien en determinar con más precisión la latitud por el procedimiento del Capítulo XV, pues en cualquiera de los dos no tiene casi influencia alguna el pequeñísimo error que pudiera existir en el estado del cronómetro, en virtud de haberse empleado un valor inexacto de la latitud al calcular la hora por la segunda estrella. Por otra parte, la comparación del resultado más exacto, con el valor de φ supuesto al principio, da á conocer si la diferencia es de tal importancia que exija la repetición del cálculo de la hora, en cuyo caso se procede á hacer una nueva corrección siguiendo el mismo método, aunque raras veces es necesario. De esta manera he podido determinar con mucha aproximación, y viajando con rapidez, las latitudes de varios lugares, cuando apenas contaba con unas cuantas horas de permanencia en ellos. Es claro que la precisión de los resultados depende en gran parte del grado de exactitud con que puedan medirse las distancias zenitales, é importa, por lo mismo, emplear un instrumento bien conocido, así como barómetro y termómetro para calcular la refracción. Por lo general, en mis exploraciones me he servido de un hipsómetro en vez del primero de aquellos instrumentos, pues por su medio es fácil determinar la presión atmosférica (Tomo I, número 288). También siempre que ha sido posible, he determinado la hora por alturas iguales (Capítulos VIII

y IX) con el fin de eliminar el elemento angular y sus correcciones.

281.—Cuando se conocen aproximadamente la latitud y el estado del cronómetro, pueden formarse ecuaciones de condición para corregir los valores aproximativos, sirviéndose al efecto de las observaciones de dos ó más estrellas. Las ecuaciones se forman de este modo: sea z la distancia zenital de cualquiera de las estrellas, y φ la latitud supuesta; si con estos elementos y la declinación se calcula el ángulo horario de la estrella, se obtendrá, en general, un valor de h erróneo, á causa del error que tenga q. Por otra parte, la hora de la observación, combinada con la corrección que se supone al cronómetro y con la ascensión recta de la estrella, suministrará otro valor de h también aproximativo, puesto que no se sabe con precisión cuál sea el verdadero estado del cronómetro. Los dos valores de h, obtenidos por uno y otro medio, resultarán más ó menos discordes, y entonces estableceremos algebraicamente la condición de que, tomando en cuenta las correcciones de todos los elementos de que dependen uno y otro valor de h, deben éstos resultar iguales.

Con φ , z y δ se calcula h por la ecuación:

$$\operatorname{sen.} \frac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\operatorname{sen.} \frac{1}{2} (z + \varphi - \delta) \operatorname{sen.} \frac{1}{2} (z - \varphi + \delta)}{\operatorname{cos.} \varphi \operatorname{cos.} \delta}} \dots (1)$$

Sea ahora $\Delta \varphi$ la corrección que demanda el valor de φ , y Δh la correspondiente al ángulo horario. Se tendrá:

$$\Delta h = \frac{\mathrm{d} h}{\mathrm{d} \varphi} \Delta \varphi \ ,$$

y calculando el coeficiente diferencial por medio de la ecuación..... $\cos z = \sec \theta \sec \delta + \cos \theta \cos \delta \cos h$, se halla sin dificultad:

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,\varphi} = \frac{\tan.\,\delta}{\mathrm{sen}.h} - \frac{\tan.\,\varphi}{\tan.\,h}$$

Expresando á Δh en segundos de tiempo, y haciendo para abreviar:

$$B = \frac{1}{15} \left(\frac{\tan \theta}{\sin h} - \frac{\tan \theta}{\tan h} \right) \dots (2)$$

La expresión correcta del valor de h deducido del cálculo es:

$$h + B \Delta \varphi$$

Para hallar otro valor, deducido de la observación, sea c la corrección supuesta al cronómetro á una hora cualquiera T, y llamemos v su variación en la unidad de tiempo. En cualquier otro instante t, que supongo ser su indicación al medir z, se tendrá:

$$\Delta t = c + \Delta c + v(t - T)$$

siendo de la corrección que necesita e. La expresión del ángulo horario será, pues:

$$t+c+\Delta c+v(t-T)-a$$

Igualando este valor con el precedente, y haciendo:

$$\tau = (a+h) - [t+c+v(t-T)].....(3)$$

la ecuación de condición será:

$$B \Delta \phi - \Delta c + \tau = 0$$
(4)

Para cada una de las estrellas se calculan las fórmulas (1), (2), (3) y (4), y en seguida se resuelven las ecuaciones de condición resultantes. Como las incógnitas son únicamente $\Delta \varphi$ y Δc , bastan las observaciones de dos estrellas para determinarlas; pero si se han observado en mayor número, pueden combinarse todas las ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados (nota del número 34).

Ejemplo.—El 13 de Mayo de 1867, entre otras observaciones, hice las siguientes con sextante. La indicación común del instrumento fué 114° 00′, y el cronómetro solar de que me servía atrasaba 0°.2 por hora.

Estrellas.	Cronómetro.	Ascen. rectas.	Declinaciones.
a Leonis al 0	8 ^h 58 ^m 24 ^s .74	10h 1m 18s.14	+12° 36′ 48″.0
a Virginis al S	9 41 16 .50	13 18 13 .47	-10 28 7.1

Tomemos $\varphi = 22^{\circ}$ 9' por latitud aproximativa, y admitamos, atendiendo al estado del cronómetro en los días anteriores y á su marcha conocida, que en el instante de la observación de a Leonis su co-

rrección fuese $c=-9^{m}50^{s}.00$. Las dos estrellas se observaron á la misma distancia zenital, que corregida por los errores instrumentales y por la refracción fué $z=33^{\circ}1'30''$. Como el cálculo, si bien muy sencillo, es largo, sólo desarrollaré el que se refiere á a Virginis para que sirva de tipo.

El ángulo horario se ha tomado negativo, porque la estrella todavía no pasaba por el meridiano cuando se observó; y por ser solar el cronómetro, se convirtió t+c+v(t-T) en hora sideral. La hora T á que se refiere la corrección supuesta al cronómetro, puede ser un instante cualquiera, y por comodidad he tomado por T la hora de la observación de la primera estrella. La ecuación de condición para a Virginis será, en consecuencia:

$$+0.429 \, 4\varphi - 4c - 2^{\circ}.95 = 0$$

Haciendo un cálculo semejante para a Leonis, se obtendrá la ecuación que le corresponde y es la primera que va en seguida, de modo que se combinarán las dos siguientes:

$$-0.014 \, \varDelta \varphi - \varDelta c - 1^{\circ}.68 = 0$$

+ $0.429 \, \varDelta \varphi - \varDelta c - 2.95 = 0$

Restando una de otra se tiene: $0.443 \, \varDelta \varphi = 1.27$, de donde resulta: $\varDelta \varphi = + 2''.9$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones de condición, se obtendrá: $\varDelta c = -1^{\circ}.72$, de manera que la latitud y la corrección del cronómetro verdaderas que se deducen de estas observaciones, son:

$$\varphi + \Delta \varphi = 22^{\circ} 9' 00'' + 2''.9 = 22^{\circ} 9' 2''.9$$

 $c + \Delta c = -9^{\circ} 50^{\circ} - 1^{\circ}.72 = -9^{\circ}.51^{\circ}.72$

La pequeñez de las correcciones indica que, en este ejemplo, los supuestos fueron casi exactos; pero no hay inconveniente en adoptarlos más distantes de la verdad. Lo que siempre debe procurarse es observar una de las estrellas cerca del meridiano y la otra cerca del primer vertical, á fin de que difieran bastante los dos coeficientes de $\Delta \varphi$. En la Sec. II, Cap. III de los Nuevos Métodos Astronómicos puede verse el método semejante que conviene seguir para determinar la corrección del instrumento angular, á la vez que la de la latitud y la del estado del cronómetro, lo cual supone la observación de tres estrellas, por lo menos, á la misma altura. Esta última circunstancia no es indispensable en el procedimiento que acabo de exponer, aunque sí lo es el conocimiento exacto de las dos distancias zenitales.

282.—Otro método que no exige el conocimiento aproximativo de la latitud ni de la hora, y que es al mismo tiempo independiente del elemento angular z, consiste en observar tres estrellas diferentes á la misma altura, aplicando en seguida las ecuaciones (1) del Capítulo precedente. Para evitar equivocaciones, convengamos en designar sin acento las cantidades que se refieren á la estrella más occidental; con un acento las que corresponden á la estrella intermedia; y con dos acentos los relativos á la más oriental, que es aquella que tiene

mayor ascensión recta. Siendo, además, Δt la corrección incógnita del cronómetro á la hora t, y v su variación horaria, las que corresponden á las horas t' y t'' son:

$$\Delta t' = \Delta t + v(t'-t)$$
 $\Delta t'' = \Delta t + v(t''-t)$

Establecido esto, la combinación sucesiva de la estrella occidental con las otras dos, dará dos valores de θ y de ϕ , que serán:

$$\theta = \frac{1}{2}(t - t') + \frac{1}{2}v(t - t') + \frac{1}{2}(a' - a)$$

$$\theta' = \frac{1}{2}(t - t'') + \frac{1}{2}v(t - t'') + \frac{1}{2}(a'' - a)$$

$$\tan \phi = \tan \frac{1}{2}(\delta - \delta') \tan \frac{1}{2}(\delta + \delta') \cot \theta$$

$$\tan \phi' = \tan \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \tan \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \cot \theta'$$
(5)

Como no puede conocerse el valor de $\omega = \varepsilon + \phi$, en atención á que ε es función de las correcciones del cronómetro, se tendrán dos incógnitas en la ecuación

$$\tan \varphi = \frac{\mathrm{sen.}(\varepsilon + \psi)\tan \frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos \theta}{\mathrm{sen.}\psi},$$

por lo cual no puede calcularse directamente bajo esa forma sino del modo siguiente.

El ángulo horario de la primera estrella sería $h = \varepsilon + \theta$, de donde resulta: $\varepsilon = h - \theta$, ó bien $\varepsilon + \psi = h - \theta + \psi$. Si hacemos $Q = \theta - \psi$, y además

$$q = \frac{\tan \frac{1}{2} (\delta + \delta') \cos \theta}{\sin \theta},$$

se tendrá: $\tan \varphi = q \operatorname{sen.}(h - Q)$. Una combinación semejante de la primera y tercera estrellas daría ecuaciones de la misma forma, de modo que para determinar las dos incógnitas h y φ , se tiene:

$$\tan \varphi = q \operatorname{sen.}(h - Q)$$
 $\tan \varphi = q' \operatorname{sen.}(h - Q')$

La eliminación de tan. φ y el desarrollo de la ecuación resultante producen la siguiente, que determina á h:

$$\tan h = \frac{q \text{ sen. } Q - q' \text{ sen. } Q'}{q \cos Q - q' \cos Q'}$$

Conociendo el valor de h cualquiera de las ecuaciones anteriores suministra el de φ , siendo también fácil calcular el de Δt , puesto que se tiene la relación: $h = t + \Delta t - \alpha$.

En resumen, después de calculados los valores de θ , θ' , ψ y ψ' por las fórmulas (5), se calculan las que siguen:

$$q = \frac{\tan \frac{1}{2} (\delta + \delta') \cos \theta}{\sec \theta} \qquad q' = \frac{\tan \frac{1}{2} (\delta + \delta'') \cos \theta'}{\sec \theta}$$

$$Q = \theta - \phi \qquad Q' = \theta' - \phi'$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \cos \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \cos \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \cos \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \cos \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{q \sec \theta - q' \sec \theta'}{q \cos \theta - q' \csc \theta'}$$

Ejemplo.—El 9 de Mayo de 1867 hice las siguientes observaciones sirviéndome de un cronómetro solar, cuya variación era casi insensible en intervalos cortos, por lo que supondré v=o. La indicación común del sextante fué $G=113^{\circ}15'$.

a Leonis..... $t = 9^{h} 15^{m} 58^{s}.3$ $a = 10^{h} 1^{m} 18^{s}.19$ $\delta = +12^{\circ} 36' 47''.7$ γ Ursa maj. t' = 9 32 23.0 a' = 11 46 50.65 $\delta' = +54$ 26 7.0 a Bootis..... t'' = 8 46 42.1 a'' = 14 9 37.62 $\delta'' = +19$ 52 31.9

No desarrollo todo el cálculo por ser tan semejante á otros que se han detallado en los Capítulos precedentes, y sólo indicaré los principales resultados para que, al desarrollarlo el lector, encuentre puntos de rectificación.

Topograffa, T. II.-36.

El resto del cálculo es como sigue:

Num Den	0.6599751 0.8369062
$\tan h = +33^{\circ} 38' 20'' \cdot 2 \cdot \dots$	THE DEVELOPMENT OF THE PARTY OF
$Q = + 63 \cdot 13 \cdot 30 \cdot .4$ $h - Q = -29^{\circ} 37' 38''.2$	$h - Q' = -2^{\circ}35'57''.7$
q	q 0.9530755— sen. $(h-Q)$ 8.6565950—
$ \tan \varphi \dots \frac{9.6096634}{\varphi = 22^{\circ} 8' 58''.2} $	$ \tan \varphi \dots 9.6096705 $ $ \varphi = 22^{\circ} 8' 59''.4 $

La pequeña diferencia de los dos valores de φ proviene de los ligeros errores inevitables de la aproximación logarítmica, y el promedio $\varphi=22^\circ$ 8' 58".8 es el que, en general, convendrá adoptar. Para la corrección del cronómetro tendremos:

$$h = + 2^{h} 14^{m} 33^{s}.35$$
 $a = 10 1 18.19$

Hora sideral = $12^{h} 15^{m} 51^{s}.54$
Asc. recta = $3 8 25.78$
 $9^{h} 7^{m} 25^{s}.76$

Reduc. = $- 1 29.68$

Hora media = $9^{h} 5^{m} 56^{s}.08$
 $t = 9 15 58.30$
 $4t = - 10^{m} 2.22$

Una vez hallada la hora y la latitud, podría determinarse la corrección del sextante aplicando el método expuesto en el número 195, sin más elementos adicionales que el error inicial y la refracción.

CAPITULO XXII.

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE LA LATITUD Y DE LA HORA. — MÉTODO MEXICANO.

283.—Varias veces he indicado la dificultad de medir con toda exactitud los ángulos verticales. Hay, en efecto, tantas circunstancias diferentes que tienden á alterar la precisión de esas medidas, como son la flexión de los telescopios, la incertidumbre de las refracciones, la deformación de los círculos verticales de los instrumentos por la acción de la pesantez, etc., que cuando se desea determinar la latitud con toda la exactitud que en muchos casos es necesaria, se prefiere á veces recurrir á procedimientos más ó menos independientes de las distancias zenitales.

Consideraciones de este género son las que me condujeron á imaginar el nuevo método que forma el objeto de este Capítulo, y que tiene por base la sustitución de un ángulo horizontal, en lugar del vertical que generalmente se emplea en los demás procedimientos. Suponiendo que se observe una estrella con el altazimut, ó cualquier otro instrumento que permita la medida de ángulos horizontales, sean h y a su ángulo horario y su azimut respectivamente. La ecuación general del número 125 dará:

$$\cos \varphi \tan \vartheta - \sin \varphi \cos h = \cot \alpha \sin h \dots (1)$$

que puede calcularse fácilmente por logaritmos, por medio de un án gulo subsidiario M á saber:

tan.
$$M = \frac{\tan \delta}{\cos h}$$
 sen. $(M - \varphi) = \cos M \tan h \cot \alpha$ (2)