$\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')$.........	9.8687160	$\frac{1}{2}$.........................	9.69897
$\tan.\varphi$....................	9.6100359	$\text{sen}.\,2\varphi$.................	9.84437
$\cos.\psi$....................	9.7660961	$\omega-\omega'$..................	2.25050−
$\text{sen}.\,\theta$....................	−9.3993057	$\tan.\omega'$..................	−9.99219
$\text{sen}.\,\omega'$..................	9.8455423	$\Delta\varphi$......................	1.80165−
$\omega'=44°\,29'\,4''.2$		$\Delta\varphi=-\;\;1'\;3''.3$	
$\omega=44\;\;26\;\;6\,.3$		$\varphi=22°\,10'\,00''.0$	
$\omega-\omega'=-\;\;2'\,57''.9=-177''.9$		Latitud $=22°\;\;8'\,56''.7$	

Si por haber sido muy errónea la latitud supuesta, resulta muy considerable el valor de su corrección $\Delta\varphi$, debe repetirse la operación tomando por φ el resultado del primer cálculo.

275.—Digamos para terminar, que luego que se haya obtenido el valor definitivo de la latitud del lugar, puede aplicarse el método del número 195 para determinar la corrección ΔG que corresponde á los puntos de la graduación que sirvieron en las observaciones, si es que se tuvo ocasión de anotar las indicaciones del barómetro y del termómetro para calcular la refracción. El método es aun más conveniente en este caso, en atención á que en las observaciones ejecutadas á poca distancia del meridiano, tiene menos influencia un pequeño error en la hora que cuando el astro está cerca del primer vertical. Aplicando el procedimiento á las alturas del 27 de Abril que han servido de ejemplo, y habiendo sido de 0.614 la presión atmosférica, de 20°.5 la temperatura del aire, de 22°.0 la del barómetro, y de $1'\,50''$ el error inicial del sextante, resulta la refracción $r=38''.7$, y en término medio $\Delta G=-45''$. Esta corrección puede suponerse que es la que corresponde á la graduación 99° próximamente del sextante.

CAPITULO XX.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE BESSEL.

276.—En el Capítulo que precede hemos dado un procedimiento para hallar la latitud sin necesidad de conocer la distancia zenital de la estrella, eliminando así esta magnitud angular y, por consiguiente, todos los errores que podrían afectarla. La misma ventaja se consigue con la aplicación del método trazado por el astrónomo Bessel, que elimina igualmente el elemento angular, sustituyéndolo con un elemento de tiempo.

Consiste este procedimiento en observar el doble paso de una estrella por el primer vertical del lugar, habiendo fijado de antemano, en la dirección de Oriente á Poniente, un telescopio de tránsitos, ó el de un altazimut, cuyo eje de rotación, perfectamente horizontal, quedará así establecido en coincidencia con el meridiano.

Para dar al telescopio la posición conveniente, el mejor medio consiste en calcular la hora del paso de una estrella por el primer vertical, y en hacer coincidir con ella, en ese instante, el hilo vertical del centro de la retícula, cuyo pequeño error de colimación suponemos muy bien conocido, si es que no se ha podido nulificar completamente. Esta hora se determina con facilidad, pues si en la ecuación fundamental del número 125 se supone $a=90°$, resulta $\cos.\varphi\tan.\delta-\text{sen}.\,\varphi\cos.h=0$, de donde:

$$\cos.h=\frac{\tan.\delta}{\tan.\varphi}$$

obteniéndose también la distancia zenital de la estrella en ese instante por la ecuación:

$$\cos. z = \frac{\operatorname{sen}. \delta}{\operatorname{sen}. \varphi}$$

En ambas fórmulas se usa un valor aproximativo de la latitud, y una vez conocido el de h, las horas siderales correspondientes serán: $\tau = \alpha \pm h$, siendo α la ascensión recta de la estrella. De estos instantes de los tránsitos por el primer vertical, al Este y al Oeste respectivamente, se deducen las horas cronométricas á las cuales debe hacerse coincidir el hilo central con la estrella; de modo que si se conoce con suficiente aproximación el estado del cronómetro, se habrá logrado establecer así el telescopio muy cerca del primer vertical, sobre todo si por comodidad se ha escogido una estrella cuya declinación sea de 5° á 6°, por lo menos, menor que la latitud, á fin de que su tránsito por aquel círculo no tenga lugar á mucha altura respecto del horizonte.

Admitamos ahora por un momento que, mediante esta operación preliminar, sea exactamente de 90° el azimut del telescopio; y que bien fijo y bien nivelado el eje de rotación, á fin de que el eje óptico describa exactamente, en su movimiento, el primer vertical, se hayan observado en seguida las horas siderales T' y T á las cuales otra estrella pasa por el hilo vertical del centro al Este y al Oeste del meridiano respectivamente. El intervalo $T - T'$ será doble de su ángulo horario en cualquiera de esos instantes; y siendo, por consiguiente, $h = \frac{1}{2}(T - T')$, se expresará esta cantidad en arco, y nuestra primera ecuación dará la latitud, á saber:

$$\tan. \varphi = \frac{\tan. \delta}{\cos. h}$$

Tanto con el fin de terminar en poco tiempo toda la operación, como con el de disminuir el efecto de cualquier pequeño error en las horas, conviene elegir una estrella cuya declinación sea muy poco menor que la latitud, algunos minutos solamente si es posible. De ese modo h es poco considerable, y lo son igualmente las variaciones de su coseno, de suerte que casi no tendrán influencia alguna los pequeños errores de observación.

277.—Tal es el método de Bessel en toda su sencillez; pero como por lo común no puede establecerse desde luego el instrumento con la perfección que he supuesto, voy á indicar la manera de proceder cuando el eje óptico no describa con toda precisión el primer vertical, sino que, dirigido hacia el Oeste, tenga un azimut $a = 90° - u$, muy poco diferente de un cuadrante, lo que equivale á decir que el extremo septentrional del eje de rotación, en lugar de coincidir con el meridiano, se desvía hacia el Este la pequeña cantidad u, que supongo sólo de unos cuantos minutos.

En tales condiciones los dos tránsitos observados no han tenido lugar en el primero, sino en otro plano vertical muy poco distante de él, y nuestra ecuación del número 125 dará respectivamente al Este y al Oeste:

$$\cos. \varphi \tan. \delta - \operatorname{sen}. \varphi \cos. h' = \tan. u \operatorname{sen}. h'$$
$$\cos. \varphi \tan. \delta - \operatorname{sen}. \varphi \cos. h = \tan. u \operatorname{sen}. h$$

de donde se obtiene por substracción la que sigue, siendo $\varepsilon = \frac{1}{2}(h + h')$:

$$\tan. u = \operatorname{sen}. \varphi \tan. \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Esta fórmula da á conocer el verdadero azimut del instrumento, puesto que teniéndose $h' = T' - \alpha$ y $h = T - \alpha$, resulta en tiempo:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(h + h') &= \varepsilon = \tfrac{1}{2}(T + T') - \alpha \\ \tfrac{1}{2}(h - h') &= \theta = \tfrac{1}{2}(T - T') \end{aligned}\right\} \text{ ó bien: } \begin{aligned} h &= \varepsilon + \theta \\ h' &= \varepsilon - \theta \end{aligned}$$

Si se sustituye el valor de $\tan. u$ en la segunda de las ecuaciones que anteceden, hallaremos: $\cot. \varphi \tan. \delta = \cos. h + \operatorname{sen}. h \tan. \varepsilon$, ó bien: $\cot. \varphi \tan. \delta \cos. \varepsilon = \cos. \theta$, y por último:

$$\tan. \varphi = \frac{\cos. \varepsilon}{\cos. \theta} \tan. \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ecuación que determina la latitud.

278.—Por lo general no se limita la observación al paso por el hilo central, sino que se observa el tránsito oblicuo de la estrella por todos los hilos verticales de la retícula, anotando las horas correspondientes. En tal caso se reducen al hilo del centro, ó con más generalidad al eje óptico del telescopio, las observaciones hechas en los laterales, ó bien se calcula por separado la observación de cada hilo. Indicaré este último procedimiento, que me parece menos laborioso que el primero.[1]

A fin de tomar en cuenta todas las circunstancias más frecuentes, supondremos que el hilo del centro tiene un pequeño error c de colimación, de suerte que siendo i el intervalo ecuatorial de cualquier otro hilo respecto del central, será $c+i$ su distancia angular al eje óptico. Admitamos, además, que el nivel montante, el cual debe consultarse inmediatamente después de terminadas las observaciones, tanto al Este como al Oeste, indique que el eje de rotación tiene la pequeña inclinación b, que supondré positiva cuando el extremo Norte del eje sea el más elevado. Por b debe tomarse el promedio de las indicaciones que dé el nivel.

Establecido esto, reflexionemos que si b y u fuesen nulos, la prolongación del eje de rotación iría á encontrar la esfera celeste exactamente en el punto Norte del horizonte, que es el polo del primer vertical. Como este punto se halla en la intersección del meridiano con el horizonte, es comparable á la posición de una estrella cuyo ángulo horario, contado desde el meridiano superior, fuese de 180°, y cuya distancia polar fuese igual á la latitud φ. En la misma hipótesis sería nulo el valor de ε, pues esta cantidad no es más que la pequeña diferencia entre $\frac{1}{2}(T+T')$ y a, esto es: entre la hora del tránsito por el plano horario que pasa por el eje de rotación y la hora del tránsito por el meridiano. Existiendo, pues, los errores b y u, la prolongación del eje encontrará á la esfera en un punto que será el polo del círculo que describe realmente el eje óptico del telescopio, y este punto tendrá $180°+\varepsilon$, por ángulo horario y sensiblemente $\varphi-b$ por distancia polar. El plano horario que lo contiene es el que forma el ángulo θ con los de la estrella en los instantes de las observaciones, ó el que divide en dos partes iguales el espacio comprendido entre ellos.

Sin necesidad de recurrir á una figura, designemos por N' este

1 La reducción al hilo central puede verse en la página 150 de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*.

punto, por P el polo del mundo y por E la posición de la estrella en el momento en que pasa por un hilo cuya distancia al eje óptico sea $c+i$. En el triángulo PEN' tendremos, pues:

$$N'E=90°+(c+i),\qquad N'P=\varphi-b,\qquad PE=90°-\delta$$

y el ángulo en P suplemento del que hemos llamado θ refiriéndonos al hilo central; pero que distinguiremos con un acento para referirlo al hilo lateral que ahora consideramos. Se tendrá, en consecuencia:

$$-\text{sen.}(c+i)=\cos.(\varphi-b)\,\text{sen.}\,\delta-\text{sen.}(\varphi-b)\cos.\delta\cos.\theta'$$

Si designamos por φ' la latitud aproximativa que se obtiene con θ' por la ecuación (2), hallaremos:

$$\tan.\varphi'=\frac{\cos.\varepsilon}{\cos.\theta'}\tan.\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

y sustituyendo el valor de $\cos.\theta'$ en la anterior y multiplicando por $\text{sen.}\,\varphi'$, resultará:

$$\text{sen.}(c+i)\,\text{sen.}\,\varphi'=[\text{sen.}(\varphi-b)\cos.\varphi'\cos.\varepsilon-\cos.(\varphi-b)\,\text{sen.}\,\varphi']\,\text{sen.}\,\delta$$

Como el ángulo ε es muy pequeño siempre que se haya establecido el instrumento conforme lo hemos indicado, se tendrá sensiblemente $\cos.\varepsilon=1$, y entonces:

$$\text{sen.}(c+i)\frac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\delta}=\text{sen.}(\varphi-b-\varphi')$$

ó bien en segundos á causa de la pequeñez de los arcos:

$$\varphi=\varphi'+b+(c+i)\frac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Así, pues, la fórmula (3) dará la latitud aproximativa, que se corrige en seguida por la (4).

Los valores de i deben tomarse con signo contrario para los hilos que queden hacia el Sur del eje óptico, y que en virtud de la inversión de imágenes que produce el telescopio, serán los que atraviese la estrella *antes* del central en la observación del Este, y *después* en la del Oeste. Para el hilo del centro se tiene $i = 0$, y c será positivo ó negativo según que este hilo quede al Norte ó al Sur del eje óptico.

Tomemos, por ejemplo, las siguientes observaciones de δ *Arietis* que hice en Tacubaya, en un lugar cuya latitud es próximamente de $19° 24' 10''$.

	HILOS.			NIVEL.	
	I.	II.	III.	*Norte.*	*Sur.*
Paso oriental...	$9^h 24^m 18^s.0$	$9^h 26^m 7^s.0$	$9^h 28^m 00^s.5$	65 64	64 65
„ occidental.	10 37 35 .0	10 35 43 .5	10 33 48 .0	66 67	66 65

El cronómetro, de tiempo medio, tenía un adelanto de $4^m 23^s.18$ en el instante de la culminación de la estrella, y una marcha casi nula en poco más de una hora que duró la observación. Esta tuvo lugar en tres hilos de un altazimut, de los cuales el central tenía $c = -2''$ por colimación, y sus distancias al primero y al tercero eran $76''$ y $84''$ respectivamente. Cada división del nivel valía $1''$, de modo que el valor medio de sus indicaciones será: $b = +0''.25$. Se tiene según esto:

Para el primer hilo.................. $c + i = -78''$
„ „ segundo „ .... „ $= -2$
„ „ tercer „ .... „ $= +82$

La posición de la estrella era:

$$\alpha = 3^h 3^m 35^s.65 \qquad \delta = +19° 11' 38''.2$$

Preparemos detalladamente los elementos ε y θ sólo para el primer hilo:

$$\tfrac{1}{2}(t + t') = 10^h 00^m 56^s.50 \qquad \tfrac{1}{2}(t - t') = 0^h 36^m 38^s.50$$
$$\Delta t_0 = -4\ 23.18 \qquad \text{Aceleración} = 6.02$$

$$\text{Hora media} = 9^h 56^m 33.32$$
$$\text{Tiempo sideral} = 17\ 4\ 57.08$$
$$\text{Aceleración} = 1\ 38.01$$

$$\theta' = \begin{cases} 0^h 36^m 44^s.52 \\ 9° 11'\ 7''.8 \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}(T + T') = 3\ 3\ 8.41$$
$$\alpha = 3\ 3\ 35.65$$

$$\varepsilon = \begin{cases} -0^m 27^s.24 \\ -6'\ 48''.6 \end{cases}$$

Haciendo los mismos cálculos para los demás hilos, se hallarán los siguientes resultados por cada uno de ellos.

ε..............................	$-6' 48''.6$	$-7'\ 7''.5$	$-7' 22''.6$
θ'..............................	9 11 7 .8	8° 43 29 .5	8° 14 47 .2
φ'..............................	$19° 25' 28''.81$	$19° 24'\ 6''.89$	$19° 22' 46''.40$
b..............................	+0 .25	+0 .25	+0 .25
$(c+i)\dfrac{\text{sen.}\varphi'}{\text{sen.}\delta}$	−1 18 .91	−2 .02	+1 22 .76
φ..............................	$19° 24' 10''.1$	$19° 24'\ 5''.1$	$19° 24'\ 9''.4$

Los errores que pudieran cometerse en la medida de los intervalos de los hilos, en la colimación, así como la pequeña desigualdad que puede existir en los muñones del eje horizontal, y que influiría en el valor de b, se eliminan observando dos noches diferentes en posiciones inversas del telescopio, ó bien haciendo la inversión en la misma noche de la manera que vamos á explicar. Después de observado el paso oriental por los hilos que preceden al del centro, se invierte rápida y cuidadosamente el instrumento para proseguir la observación en los mismos hilos en la nueva posición que ocupan. Se deja en ella el telescopio para observar el paso occidental por los primeros hilos, y se vuelve á invertir para seguir observándolo en los mismos así restablecidos en su posición primitiva. El valor de b que debe emplearse es el promedio de las cuatro indicaciones que, de dos en dos, se obtienen antes y después de cada uno de los tránsitos oriental y occidental.

En cuanto al pequeño azimut del eje horizontal, se obtiene por la ecuación (1), que casi siempre puede aplicarse bajo la forma $u = \varepsilon$ sen. φ. En nuestro ejemplo, con el valor medio de ε, resulta $u = -2' 21''.6$.

279.—El método de Bessel ha hallado muy buena acogida entre los astrónomos, y da, en efecto, excelentes resultados en las altas latitudes de Europa. Por mi propia experiencia juzgo, sin embargo, que en nuestros países intertropicales es menos favorable, á causa de la notable incertidumbre con que se observan los tránsitos por el primer vertical cuando, como sucede en las bajas latitudes, la senda aparente de las estrellas tiene muy poca inclinación respecto de aquel plano. Sucede entonces que el movimiento vertical es tan rápido y el azimutal tan lento, que la estrella parece moverse durante varios segundos en la dirección misma de los hilos, lo cual hace necesariamente incierta la apreciación de los instantes precisos en que los atraviesa, instantes de los que depende el valor de θ. En el ejemplo precedente podrá notarse que aunque me había yo servido de hilos, colocados expresamente para esta observación, á muy corta distancia del central, los intervalos de tiempo son casi de dos minutos; y que difieren algo entre sí los correspondientes á los mismos hilos. El efecto de la incertidumbre se nota también en los valores de ε, á consecuencia de que los de $\frac{1}{2}(T + T')$ no resultan sensiblemente iguales, como deberían resultar si los tránsitos hubieran sido más instantáneos. Creo, por lo expuesto, que este método, tan perfecto en teoría y no obstante la sencillez de las operaciones que demanda, no es de recomendarse en latitudes inferiores á 20° ó 25°.

CAPITULO XXI.

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE LA LATITUD Y DE LA HORA.

280.—Cuando no se reflexiona detenidamente acerca de la influencia relativa de los elementos que contribuyen á la determinación de una cantidad cualquiera, parece indispensable la completa exactitud de aquéllos para que resulte la incógnita con el mismo grado de precisión. Esta condición es ciertamente necesaria en teoría; pero como, por una parte, en la práctica todas nuestras apreciaciones tienen inevitablemente un límite más allá del cual es inútil pretender llevar la exactitud, y por otra, la combinación de los datos que han de producir la cantidad que se busca, es generalmente de tal naturaleza ó de tal forma, que hace muy variables las influencias de los elementos conocidos, se infiere desde luego que modificando convenientemente y hasta donde sea posible aquella combinación, somos dueños, hasta cierto punto, de eliminar el efecto de un elemento inexacto. Así, por ejemplo, hemos visto en el número 179, que por la simple elección de la figura del triángulo astronómico, se destruye casi del todo la influencia de un pequeño error de la latitud, pudiéndose obtener la hora con suficiente exactitud práctica, aunque este último elemento no se conozca más que aproximadamente, con sólo observar el astro cerca del primer vertical de la estación. De una manera análoga vimos en el número 249 que puede determinarse, con la misma exactitud práctica, la latitud de un lugar sin que influya un pequeño