Cuando se observe un objeto terrestre muy distante, x y x' son nulos, y como las refracciones serán iguales, se tendrá:

$$g_o = \tfrac{1}{2}(g + g') + \tfrac{1}{2}(n - n')$$

Una vez bien determinada esta constante por cualquiera de los métodos que preceden, no habrá inconveniente en usar el instrumento en una sola posición.

CAPITULO XIX.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

273.—La eliminación inmediata de los errores angulares, que acaso son los que más directamente influyen en las observaciones de latitud, se consigue observando dos estrellas en el momento en que adquieren la misma distancia zenital aparente. Conviene escogerlas de tal manera que el promedio de sus declinaciones sea próximamente igual á la latitud que se busca, y además, que no difieran mucho en ascensión recta; porque de ese modo pueden observarse cerca del meridiano para no temer la influencia de algún pequeño error en la hora, y para terminar toda la operación en poco tiempo.

Una vez hecha la elección conveniente, se dirige el telescopio del instrumento á la que culmine primero, ya sea la del Norte ó la del Sur, y luego que se tiene en la intersección de los hilos, si el telescopio tiene retícula, ó que se confunden las dos imágenes si se emplea el sextante ó cualquier otro instrumento de reflexión, se anota la hora y se deja el instrumento fijo en la posición que tenía, á fin de esperar el instante en que la otra estrella adquiere la misma altura para anotar la hora correspondiente. Siendo estas horas los únicos datos que debe recoger el observador, es innecesario apuntar la indicación del instrumento angular, á no ser por pura precaución para conocer algún cambio accidental que pudiera sufrir en el tiempo que transcurre de una observación á otra.

Siendo t y t' las horas anotadas y Δt y $\Delta t'$ las correspondientes correcciones del cronómetro, las horas exactas serán: $T = t + \Delta t$ y $T' = t' + \Delta t'$. Entonces las fórmulas (6) del número 191 no contendrán más incógnitas que φ, y recordando que $\omega = \varepsilon + \psi$, podrán calcularse en el orden siguiente para determinar la latitud, introduciendo en ella las horas exactas:

$$\left.\begin{array}{l}
\theta = \frac{1}{2}(T - T') + \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \\
\varepsilon = \frac{1}{2}(T - T') - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') \\
\tan.\psi = \tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cot.\theta \\
\tan.\varphi = \dfrac{\mathrm{sen.}(\varepsilon + \psi)\,\mathrm{sen.}\,\theta}{\tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos.\psi} = \dfrac{\mathrm{sen.}(\varepsilon + \psi)\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos.\theta}{\mathrm{sen.}\,\psi}
\end{array}\right\} \ldots\ldots(1)$$

Si es solar el cronómetro de que se sirve el observador, se convierten en siderales la duración $(T - T')$ y la hora media $\frac{1}{2}(T + T')$.

Ejemplo.—Apliquemos las fórmulas á las siguientes observaciones que, entre otras, hice en San Luis Potosí el 27 de Abril de 1867, con sextante y un cronómetro solar cuyo adelanto á las 9^h de la noche era de $10^m\,7^s.64$, y su variación diaria de -3^s87. Esta marcha es bastante pequeña para que pueda suponerse nula sin error de importancia en intervalos cortos, al menos en esta clase de observaciones en que la lentitud del movimiento ascensional de las estrellas, por estar cerca del meridiano, da lugar á una incertidumbre en las horas de las observaciones, evidentemente superior al error que se cometería desechando la corrección por la marcha del cronómetro. Sin embargo, llevaré en cuenta la variación á fin de presentar un tipo de cálculo más general y completo.

α *Ursæ maj.* al N.	Sextante.	α *Virginis* al S.
$9^h\ 1^m\ 43^s.0$	$99°\ 10'$	$9^h\ 28^m\ 9^s.5$
„ 7 22 .0	99 00	„ 27 33 .0
„ 18 35 .5	98 30	„ 25 53 .0

Las posiciones de las estrellas eran:

α *Ursæ majoris*...... $\alpha = 10^h\,55^m\,31^s.12$.......... $\delta = +62°\,28'\,9''.2$

α *Virginis*............ $\alpha' = 13\ 18\ 13.49$.......... $\delta' = -10\ 28\ 7.1$

Habiéndose observado tres alturas iguales de cada estrella, obtendremos otras tantas determinaciones de la latitud. Apliquemos el cálculo á los datos de la primera, que corresponde á la graduación 99° 10′ del sextante:

$$\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = 36°\,28'\,8''.1 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 26°\,00'\,1''.0$$

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
\frac{1}{2}(t - t') = & 0^h\,13^m\,13^s.25 & \frac{1}{2}(t + t') = & 9^h\,14^m\,56^s.25 \\
\text{Marcha} = & 0.03 & \text{Corrección} = & -\ 10\ \ 7.64 \\
\text{Acel.} = & 2.17 & & \\
 & & \text{Hora media} = & 9^h\ 4^m\,48^s.61 \\
\frac{1}{2}(T - T') = & -\ 0^h\,13^m\,15^s.39 & \text{Ascen. recta} = & 2\ 21\ \ 7.17 \\
\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = & 1\ 11\ 21.18 & \text{Acel.} = & 1\ 29.50 \\
\theta = & \begin{cases} 0^h\,58^m\ 5^s.79 \\ 14°\,31'\,26''.8 \end{cases} & \frac{1}{2}(T + T') = & 11^h\,27^m\,25^s.28 \\
 & & \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = & 12\ \ 6\ 52.30 \\
 & & \varepsilon = & \begin{cases} -0^h\,39^m\,27^s.02 \\ -9°\,51'\,45''.3 \end{cases}
\end{array}$$

tan. $\frac{1}{2}(\delta - \delta')$..........	9.8687160	sen. $(\varepsilon + \psi)$..........	9.8451605
tan. $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$..........	9.6881871	....	9.6881871
cot. θ......................	0.5865886	cos. θ......................	9.9858943
tan. ψ......................	0.1434917		9.5192419
		sen. ψ..................	-9.9095880
$\psi =$	$54°\,17'\,51''.6$		
$\varepsilon =$	$-\ 9\ 51\ 45.3$	tan. φ..................	9.6096539
$\omega = \varepsilon + \psi =$	$44°\,26'\ 6''.3$		$\varphi = 22°\,8'\,56''.6$

Haciendo el cálculo con los datos de la segunda observación, se obtiene $\varphi = 22°8'54''.4$, y con los referentes á la tercera $\varphi = 22°9'4''.2$. El promedio de los tres resultados, será, pues: $\varphi = 22°\,8'\,58''.4$.

En la página 105 y siguientes de los *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse la corrección que es preciso hacer á las horas cuando se desea hallar desde luego la latitud valiéndose del promedio de una serie de observaciones, en vez de determinarla por cada una de ellas, como se ha hecho en el ejemplo anterior. Sirviéndose de los promedios, es acaso un poco más breve el cálculo; pero ofrece en cambio el inconveniente de que, no conociéndose los resultados individuales, tampoco se puede juzgar acerca de su concordancia; y fácilmente se comprende que basta que sea defectuosa una sola de las observaciones para que vicie todo el resultado, lo cual no sucede cuando se calculan una á una, puesto que al tomar su término medio, se desechan de la combinación aquel ó aquellos resultados que, respecto de los demás, presenten una discordancia que se crea superior al error posible de observación. Por otra parte, el cálculo individual de las observaciones no es tan dilatado como parece á primera vista, en atención á que son constantes todas aquellas cantidades que dependen de la posición de las dos estrellas. Por todas estas razones no he creído de gran utilidad la exposición del método de cálculo basado en el uso de los promedios de las horas, con el fin de hacerlo correspondiente al de las distancias zenitales observadas.

En el hecho de ser las fórmulas (1) independientes de la indicación del instrumento angular, se concibe que también el resultado lo será del error del elemento z; y que se evita el uso de los instrumentos meteológicos por no necesitarse el conocimiento de la refracción atmosférica, al menos si no transcurre mucho tiempo entre las observaciones de las dos estrellas y sus distancias zenitales no son muy considerables. Todas estas ventajas del método son muy importantes para un viajero, que á veces no puede disponer de todos los elementos indispensables para la aplicación de otros procedimientos.

Como puede suceder que á consecuencia del estado de los niveles del instrumento, de la diferencia de refracción cuando entre las observaciones transcurre un tiempo considerable, ó por cualquiera otra causa, las alturas de las dos estrellas no sean exactamente iguales, se hará en tales casos una pequeña corrección á una de las horas. Sea Δz la diferencia de distancias zenitales, en la cual supongo incluídas todas las cantidades que la producen, y x la corrección correspondiente. Siendo Δz siempre muy pequeña, lo será también x, y tendremos:

$$x = \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,z}\,\Delta z$$

Sustituyendo el valor de $\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,z}$, (número 177), y expresando en segundo de tiempo el de x, resulta:

$$x = \frac{\text{sen.}\,z\,\Delta z}{15\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}\,h} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

En esta corrección se introducen valores aproximativos de φ y de z; teniendo cuidado con el juego de los signos. Así, por ejemplo, si la segunda estrella se observa á una altura demasiado grande, Δz será positiva para esa estrella, de modo que si está al Oeste, siendo entonces también h positivo, lo será x, y la hora correspondiente á la igualdad de alturas es $T+x$, que es la que debe emplearse en el cálculo de la latitud.

274.—Cuando se conozca la latitud aproximativa de la estación, puede hacerse el cálculo de este otro modo. Determinando á θ, ε y ψ por las tres primeras fórmulas, se tendrá: $\omega = \varepsilon + \psi$. Sea ahora φ la latitud aproximativa y $\Delta\varphi$ su corrección: si con φ se calcula el valor de ω, se tendrá un resultado inexacto ω' por la ecuación:

$$\text{sen.}\,\omega' = \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\varphi\cos.\psi}{\text{sen.}\,\theta} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

y la diferencia $\omega - \omega'$ será debida únicamente al error que tenga la latitud supuesta, el cual se ha designado por $\Delta\varphi$. Haciendo.......... $\omega - \omega' = \Delta\omega$, se tendrá:

$$\Delta\varphi = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,\omega'}\,\Delta\omega$$

y diferenciando el valor de sen. ω' con relación á φ, resulta:

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,\omega'} = \frac{\text{sen.}\,2\,\varphi}{2\tan.\,\omega'},$$

por lo cual se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\varphi = \dfrac{\text{sen.}\,2\,\varphi}{2\tan.\,\omega'}(\omega - \omega') \\[2ex] \text{Latitud correcta} = \varphi + \Delta\varphi \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

En nuestro ejemplo hallamos: $\omega = 44°\,26'\,6''.3$. Si suponiendo $\varphi = 22°\,10'$ calculamos el valor de ω', se tiene:

tan. $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$.........	9.8687160	$\frac{1}{2}$........................	9.69897
tan. φ....................	9.6100359	sen. 2φ................	9.84437
cos. ψ....................	9.7660961	$\omega-\omega'$................	2.25050−
sen. θ....................	−9.3993057	tan. ω'.................	−9.99219
sen. ω'..................	9.8455423	$\Delta\varphi$......................	1.80165−
$\omega'=44^\circ\,29'\,\,4''.2$		$\Delta\varphi=-\quad 1'\,\,3''.3$	
$\omega=44\,\,\,26\,\,\,6\,.3$		$\varphi=22^\circ\,10'\,00''.0$	
$\omega-\omega'=-\quad 2'\,57''.9=-177''.9$		Latitud $=22^\circ\,\,\,8'\,56''.7$	

Si por haber sido muy errónea la latitud supuesta, resulta muy considerable el valor de su corrección $\Delta\varphi$, debe repetirse la operación tomando por φ el resultado del primer cálculo.

275.—Digamos para terminar, que luego que se haya obtenido el valor definitivo de la latitud del lugar, puede aplicarse el método del número 195 para determinar la corrección ΔG que corresponde á los puntos de la graduación que sirvieron en las observaciones, si es que se tuvo ocasión de anotar las indicaciones del barómetro y del termómetro para calcular la refracción. El método es aun más conveniente en este caso, en atención á que en las observaciones ejecutadas á poca distancia del meridiano, tiene menos influencia un pequeño error en la hora que cuando el astro está cerca del primer vertical. Aplicando el procedimiento á las alturas del 27 de Abril que han servido de ejemplo, y habiendo sido de 0.614 la presión atmosférica, de 20°.5 la temperatura del aire, de 22°.0 la del barómetro, y de $1'\,50''$ el error inicial del sextante, resulta la refracción $r=38''.7$, y en término medio $\Delta G=-45''$. Esta corrección puede suponerse que es la que corresponde á la graduación 99° próximamente del sextante.

CAPITULO XX.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE BESSEL.

276.—En el Capítulo que precede hemos dado un procedimiento para hallar la latitud sin necesidad de conocer la distancia zenital de la estrella, eliminando así esta magnitud angular y, por consiguiente, todos los errores que podrían afectarla. La misma ventaja se consigue con la aplicación del método trazado por el astrónomo Bessel, que elimina igualmente el elemento angular, sustituyéndolo con un elemento de tiempo.

Consiste este procedimiento en observar el doble paso de una estrella por el primer vertical del lugar, habiendo fijado de antemano, en la dirección de Oriente á Poniente, un telescopio de tránsitos, ó el de un altazimut, cuyo eje de rotación, perfectamente horizontal, quedará así establecido en coincidencia con el meridiano.

Para dar al telescopio la posición conveniente, el mejor medio consiste en calcular la hora del paso de una estrella por el primer vertical, y en hacer coincidir con ella, en ese instante, el hilo vertical del centro de la retícula, cuyo pequeño error de colimación suponemos muy bien conocido, si es que no se ha podido nulificar completamente. Esta hora se determina con facilidad, pues si en la ecuación fundamental del número 125 se supone $a=90^\circ$, resulta $\cos.\varphi\tan.\delta-\text{sen.}\,\varphi\cos.h=0$, de donde:

$$\cos.h=\frac{\tan.\delta}{\tan.\varphi}$$