CAPITULO XVIII.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE LITTROW.

271.—Si se mide la distancia zenital z de una estrella circumpolar en un punto cualquiera del círculo que describe al derredor del polo, este valor de z diferirá de la colatitud de la estación tanto menos cuanto más pequeña sea la distancia polar $d = 90° - \delta$ de la estrella. Se comprende fácilmente este principio, recordando que la colatitud no es otra cosa más que la distancia zenital del mismo polo. Según esto, llamando x la diferencia que existe entre la colatitud y la distancia zenital z de una circumpolar, podremos establecer la ecuación: $z + x = 90° - \varphi$, ó bien:

$$\varphi = 90° - (z + x) \quad \text{.........................} \quad (1)$$

Por otra parte, siendo d la distancia polar y h el ángulo horario de la estrella en el instante de la observación, se tendrá:

$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi \cos. d + \cos. \varphi\, \text{sen.}\, d \cos. h$$

y sustituyendo el valor (1) de φ, y desarrollando, resulta:

$$1 = (\text{sen.}\, d \cos. h - \cos. d \tan. z)\, \text{sen.}\, x + (\cos. d + \text{sen.}\, d \cos. h \tan. z) \cos. x \quad \text{......} \quad (2)$$

Si d fuese nulo, lo sería también x, de manera que podremos considerar que esta última cantidad es una función de la primera, de la forma:

$$x = A d + B d^2 + C d^3 \quad \text{.........................} \quad (3)$$

Suponiendo ahora que se trate de una esIrella muy inmediata al polo, tal como α ó δ *Ursæ minoris*, el valor de x será siempre muy pequeño, y así limitándonos á los términos de tercer orden en el desarrollo de su seno y de su coseno, hallaremos:

$$\begin{aligned} \text{sen.}\, x &= x - \tfrac{1}{6} x^3 = A d + B d^2 + (C - \tfrac{1}{6} A^3) d^3 \\ \cos. x &= 1 - \tfrac{1}{2} x^2 = 1 - \tfrac{1}{2} A^2 d^2 - A B d^3 \end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (2) y desarrollando el seno y el coseno de d, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} &[(d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos. h - (1 - \tfrac{1}{2} d^2) \tan. z]\,[A d + B d^2 + (C - \tfrac{1}{6} A^3) d^3] \\ &+ [1 - \tfrac{1}{2} d^2 + (d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos. h \tan. z]\,[1 - \tfrac{1}{2} A^2 d^2 - A B d^3] \end{aligned}\right\} = 1$$

Ejecutando las multiplicaciones hasta los términos de tercer orden, reduciendo y ordenando respecto de las potencias de d, resulta:

$$\left.\begin{aligned} &(\cos. h \tan. z - A \tan. z)\, d \\ &+ (A \cos. h - B \tan. z - \tfrac{1}{2} A^2 - \tfrac{1}{2})\, d^2 \\ &+ \begin{pmatrix} B \cos. h + \tfrac{1}{2} A \tan. z - \tfrac{1}{6} \cos. h \tan. z - \tfrac{1}{2} A^2 \cos. h \tan. z \\ - A B + \tfrac{1}{6} A^3 \tan. z - C \tan. z \end{pmatrix} d^3 \end{aligned}\right\} = 0$$

Según la forma de esta ecuación, es indispensable que sean nulos separadamente los coeficientes de las diversas potencias de d, por lo que tendremos las siguientes relaciones para la determinación de A, B y C:

$$\begin{aligned} &\cos. h - A = 0 \\ &A (\cos. h - \tfrac{1}{2} A) - \tfrac{1}{2} - B \tan. z = 0 \\ &\tfrac{1}{2} A (1 - A \cos. h + \tfrac{1}{3} A^2) \tan. z + B \cos. h - \tfrac{1}{6} \cos. h \tan. z - A B - C \tan. z = 0 \end{aligned}$$

De la primera resulta:

$$A = \cos. h$$

y este valor introducido en la segunda produce:

$$B = -\tfrac{1}{2}\, \text{sen.}^2 h \cot. z$$

Por último, sustituyendo ambos valores en la tercera, se obtiene:

$$C = \tfrac{1}{3} \cos. h\, \text{sen.}^2 h$$

En consecuencia, la expresión (3) será, expresando en segundos los pequeños arcos d y x:

$$x = d \cos. h - \tfrac{1}{2} d^2 \operatorname{sen.}^2 h \cot. z \operatorname{sen.} 1'' + \tfrac{1}{3} d^3 \cos. h \operatorname{sen.}^2 h \operatorname{sen.}^2 1''$$

Sustituído el valor de x en la ecuación (1), dará finalmente por expresión de la latitud:

$$\varphi = 90° - z - d \cos. h + \tfrac{1}{2}(d \operatorname{sen.} h)^2 \cot. z \operatorname{sen.} 1'' - \tfrac{1}{3}(d \cos. h)(d \operatorname{sen.} h)^2 \operatorname{sen.}^2 1'' \ldots (4)$$

Esta serie se debe á Mr. Littrow, Director del Observatorio de Viena, y constituye uno de los mejores procedimientos para determinar la latitud por observaciones de estrellas circumpolares muy próximas al polo. Sus principales ventajas consisten en que puede aplicarse en un instante cualquiera; en que no demanda el conocimiento previo de la latitud aproximativa, y en que llena siempre las condiciones favorables á la observación que resultan de las investigaciones del Capítulo XV. Según dije al principio, las estrellas que se emplean generalmente en este método son la polar y la δ *Ursæ minoris*, por ser aquellas cuya distancia al polo es bastante pequeña para que la serie sea muy convergente, y ser también fácilmente observables con instrumentos portátiles.

Cuando se observa alguna de estas estrellas en las inmediaciones de sus mayores elongaciones, no hay inconveniente en repetir por algún tiempo las medidas de z, pues en tales circunstancias, el movimiento ascensional varía proporcionalmente á las duraciones transcurridas; pero en otra posición, con especialidad cerca de sus tránsitos, importa no invertir mucho tiempo, porque no existe esa proporcionalidad; y así es que deberán agruparse las observaciones en series parciales, como se indicó en el número 250.

Ejemplo.—Calculemos por medio de la fórmula de Littrow las observaciones de la polar que constan en el número 251, y cuyos datos son:

$$z = 71° 52' 31''.0 \qquad h = -148° 55' 57''.6 \qquad d = 1° 27' 18''.5$$

Expresando en segundos la distancia polar, tendremos $d = 5238''.5$, y el cálculo será, en consecuencia:

		$\frac{1}{2}$ sen. 1″......	4.38454	$\frac{1}{3}$ sen.² 1″......	8.8940
d.....	3.7192069	....	3.71921	d cos. h.........	3.6520—
cos. h.....	9.9327586—	sen. h.........	9.71269—	(d sen. h)²......	6.8638
	3.6519655—	d sen. h.......	3.43190—		9.4098—
		cot. z..........	9.51498		
	—4487.″1		0.76332		—0″.2
			+5″.8		

$90° - z =$		18° 7′ 29″.0
Primer término	= +	1 14 47 .1
Segundo „	= +	5 .8
Tercer „	= +	0 .2
$\varphi =$		19° 22′ 22″.1

Por esta aplicación se ve la pequeñez del tercer término de la serie, que puede omitirse en aquellos casos en que no se crea indispensable la mayor precisión, ó bien cuando el instrumento que haya servido para medir á z no corresponda á ese grado de exactitud, como sucede con el sextante.

El método de Littrow, empleado exclusivamente para la determinación de una latitud, ofrecería á veces el inconveniente de no prestarse á la eliminación de los errores angulares, por ser sólo aplicable á las circumpolares; pero puede usarse combinado con el más general de distancias zenitales circunmeridianas, procurando que estas últimas se refieran á estrellas australes que culminen casi á la misma altura que aquéllas, Por otra parte, haciendo uso de un altazimut, y en general, de un buen instrumento cuyas correcciones se hayan determinado con anterioridad, puede decirse que no hay que temer aquel inconveniente.

272.—Cuando se conoce el valor aproximativo de la latitud, lo cual se consigue después de las primeras observaciones, hallo muy conveniente el método de cálculo que sigue, y que he aplicado con el mejor éxito, no sólo á la Polar, sino á todas las circumpolares, aun cuando sus distancias al polo excedan de 10° á 12°. Consiste en reducir las distancias zenitales que comprenda cada serie, á un instante común, escogido propiamente; y de esa manera todos los resultados son inmediatamente comparables, aun antes de proceder al cálculo de la latitud. El mismo método se presta á la determinación de la indicación zenital ó á la de la horizontal del círculo, cuando éste se haya empleado en dos posiciones inversas.

Sea T la hora sideral á la que deben reducirse todas las observaciones, y llamemos respectivamente ξ y θ la distancia zenital y el ángulo horario de la estrella en ese instante. Si designamos, además, por t la hora sideral de una observación cualquiera, y por z y h la distancia zenital y el ángulo horario en este momento, tendremos las dos ecuaciones:

$$\cos.\xi = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi\cos.\delta\cos.\theta$$
$$\cos.z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi\cos.\delta\cos.h$$

de cuya substracción resulta la que sigue, siendo $x = \xi - z$ la reducción al instante T.

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\theta+h)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\theta-h)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\xi+z)} \quad \text{........} \quad (5)$$

Esta reducción es, en muchos casos, bastante pequeña para que pueda tomarse el arco en segundos por su seno, y entonces:

$$x = \frac{2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\theta+h)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\theta-h)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\xi+z)\,\text{sen.}1''} \quad \text{..........} \quad (6)$$

Debe notarse que en ambas fórmulas entra el valor de ξ; pero indicaremos el modo de calcularlo con la aproximación suficiente en los diversos casos que vamos á considerar.

Si por T se toma el instante del paso de la estrella por el meridiano, se tendrá $\theta = 0°$, y por tanto:

$$x = -\frac{2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\xi+z)\,\text{sen.}1''}$$

que da "la reducción al meridiano" (número 256), aunque con la ventaja de quedar expresada por un solo término. En este caso deberá emplearse:

$\xi = \delta - \varphi$........ .... al Norte del zenit
$\xi = \varphi - \delta$.................. al Sur del zenit

La misma fórmula puede aplicarse á los tránsitos inferiores ó subpolares, con tal de que se cuente h desde el meridiano inferior y de que cambie el signo de x; pero si se cuentan siempre los ángulos horarios desde la culminación superior, se tiene $\theta = 180°$, y entonces:

$$x = +\frac{2\cos.\varphi\cos.\delta\cos.^2\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\xi+z)\,\text{sen.}1''}$$

siendo $\xi = 180° - (\varphi + \delta)$ para los tránsitos subpolares.

Apliquemos este método á la observación de la polar, que se ha calculado por la serie de Littrow en el párrafo precedente; y tomemos por latitud aproximativa $\varphi = 19° 22' 00''$, esto es: supongámosle intencionalmente un error de más de $20''$.

	2..........	0.301030	$x = +0° 12' 25''.4$
$\varphi = 19° 22' 00''.0$	cos. φ.....	9.974703	$z = 71\ 52\ 31\ .0$
$\delta = 88\ 32\ 41\ .5$	cos. δ......	8.404736	$z + x = 72°\ 4' 56''.4$
$\varphi + \delta = 107° 54' 41''.5$	cos. $\frac{1}{2}h$....	9.427818	$\delta = 88\ 32\ 41\ .5$
$\xi = 72\ \ 5\ 18\ .5$	„	9.427818	$180° - \varphi = 160° 37' 27''.9$
$z = 71\ 52\ 31\ .0$		7.536105	$\varphi = 19\ 22\ 22\ .1$
$\frac{1}{2}(\xi + z) = 71° 58' 54''.7$	...sen.........	-9.978161	
	sen. $1''$....	-4.685575	
	x.....	2.872369	

Vemos que este resultado concuerda con el del párrafo anterior, ó que el valor correcto $\xi = z + x$ se ha obtenido exacto, no obstante el error de $22''$ que tenía el aproximativo.

En vez de tomar por instante común T el de la culminación de la estrella, tomemos ahora el de su mayor digresión. En este caso se calcularán θ y ξ por las ecuaciones:

$$\cos.\theta = \frac{\tan.\varphi}{\tan.\delta} \qquad \cos.\xi = \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta}$$

que suministrarán ambos elementos con suficiente exactitud, aun cuando haya un pequeño error en la latitud supuesta. Con ellos procederemos al cálculo de x, y una vez hallado el valor correcto $\xi = z + x$, se obtendrá la verdadera latitud por la segunda de estas ecuaciones, á saber:

$$\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}\,\delta \cos.(z + x)$$

También puede calcularse la corrección de la latitud por la fórmula:

$$\Delta\varphi = -\tan.\varphi \tan.\xi \,.\, \Delta\xi$$

que proviene de la diferenciación de $\cos.\xi$, siendo $\Delta\xi = z + x - \xi$, ó bien la diferencia entre los valores correcto y supuesto de ξ. La latitud correcta será $\varphi + \Delta\varphi$.

Apliquemos al mismo ejemplo, suponiendo siempre $\varphi = 19°\,22'$, y dando á θ el signo negativo por hallarse la estrella al Este del meridiano.

$\tan.\varphi$............	9.545928	$\text{sen.}\,\varphi$.......	9.520631	$2\cos.\varphi\cos.\delta$	8.680469
$\tan.\delta$.............	1.595125	$\text{sen.}\,\delta$.......	9.999861	$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\theta+h)$	9.940931−
$\cos.\theta$.............	7.950803	$\cos.\xi$.......	9.520770	$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\theta-h)$	9.695302
$\theta = -$	$89°29'18''.2$	$\xi =$	$70°36'36''.7$		8.316702−
$h = -$	$148\ 55\ 57\ .6$	$z =$	$71\ 52\ 31\ .0$	$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\xi+z)$	−9.976321
$\tfrac{1}{2}(\theta+h) = -$	$119°12'37''.9$	$\tfrac{1}{2}(\xi+z) =$	$71°15'\ 3''.8$	$\text{sen.}\,1''$......	−4.685575
$\tfrac{1}{2}(\theta-h) = +$	$29\ 43\ 19\ .7$			x........	3.654806−

$x = -$	$1°15'16''.5$				
$z =$	$71\ 52\ 31\ .0$	$\tan.\varphi$....	9.5459		
$z + x =$	$70°37'14''.5$	$\tan.\xi$.....	0.4539		
$\Delta\xi =$	$-\ 22\ .2$..........		1.3463−	$\varphi =$	$19°22'00''.00$
		$\Delta\varphi$......	1.3461−	$\Delta\varphi =$	$+\ 22\ .18$
				$\varphi + \Delta\varphi =$	$19°22'22''.2$

Si tomamos por instante común aquel en que la altura de la estrella es igual á la latitud, instante que no difiere mucho del de la máxima digresión, su distancia zenital será entonces $90° - \varphi$, y tendremos:

$$\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi\cos.\delta\cos.\theta$$

de donde resulta:

$$\cos.\theta = \tan.\varphi\,\frac{1 - \text{sen.}\,\delta}{\cos.\delta} = \tan.\varphi\tan.(45° - \tfrac{1}{2}\delta)$$

Con este valor de θ, que se obtiene también con la exactitud necesaria aun cuando la latitud supuesta contenga un pequeño error, y el valor de $\xi = 90° - \varphi$, se procede al cálculo de x, determinándose en seguida la latitud correcta por la relación $\varphi = 90° - (z + x)$, puesto que $z + x$ expresa entonces la verdadera colatitud.

Por este nuevo método, y tomando siempre $\varphi = 19°\,22'$, nuestro ejemplo dará:

$\theta = -$	$89°\,44'\,39''.3$	$\xi =$	$70°\,38'\,00''.0$
$h = -$	$148\ \ 55\ \ 57\ .6$	$z =$	$71\ \ 52\ \ 31\ .0$
$\tfrac{1}{2}(\theta + h) = -$	$119°\,20'\,18''.4$	$\tfrac{1}{2}(\xi + z) =$	$71°\,15'\,15''.5$
$\tfrac{1}{2}(\theta - h) = +$	$29\ \ 35\ \ 39\ .1$		

Con estos datos el cálculo, semejante al anterior, produce:

$x = -$	$1°\,14'\,53''.1$
$z =$	$71\ \ 52\ \ 31\ .0$
$90° - \varphi =$	$70°\,37'\,37''.9$
$\varphi =$	$19\ \ 22\ \ 22\ .1$

Se habrá notado sin duda que este último caso equivale, en cierta manera, al cálculo de la serie de Littrow, puesto que ésta reduce las observaciones al polo mismo, que es un punto cuya altura es también igual á la latitud. La única diferencia consiste en que nuestro método las reduce al punto del círculo de declinación de la estrella que se halla en el almicantarat que pasa por el polo.

También se habrá notado en los dos últimos casos, sobre todo para las circumpolares muy inmediatas al polo, que los valores de θ difieren poco de $90°$. Por lo mismo, en tales circunstancias, pueden calcularse esos ángulos expresando en segundos las respectivas ecuaciones, á saber:

$$\theta = 90° - \frac{\tan.\varphi \cot.\delta}{\text{sen.}1''} \qquad \theta = 90° - \frac{\tan.\varphi \tan.(45° - \frac{1}{2}\delta)}{\text{sen.}1''}$$

Sin embargo, cuando las distancias polares pasen de 5° ó 6°, es preferible servirse de las fórmulas primitivas, y aun de la (5) en vez de la (6) para calcular la reducción x.

Adoptemos, finalmente, por momento T aquel en que θ es de 90°. La distancia zenital y el valor de x se obtendrán, en tal caso, por las ecuaciones:

$$\cos.\xi = \text{sen.}\varphi\,\text{sen.}\delta \qquad x = \frac{\cos.\varphi \cos.\delta \cos.h}{\text{sen.}\frac{1}{2}(\xi + z)\,\text{sen.}1''}$$

que, aplicadas á nuestro ejemplo, dan:

$\xi =$	70° 38′ 23″.2	$\cos.\varphi \cos.\delta$..........	8.379439
$z =$	71 52 31 .0	$\cos.h$.................	9.932759−
$\frac{1}{2}(\xi + z) =$	71° 15′ 27″.1......	sen.....................	−9.976337
		sen. 1″................	−4.685575
$x =$	− 1 14 29 .8	x.......................	3.650286−
$z + x =$	70 38 1 .2		

Hallado así el valor correcto $z + x$, la primera de las ecuaciones anteriores, ó la diferenciación de la misma, suministran el valor de φ ó de su corrección, esto es:

$$\text{sen.}\varphi = \frac{\cos.(z + x)}{\text{sen.}\delta} \qquad \Delta\varphi = -\tan.\varphi \tan.\xi\,.\,\Delta\xi$$

Siendo, en nuestro caso, $\Delta\xi = z + x - \xi = -22''.0$, esta misma cantidad, con signo contrario, será la corrección de φ, pues el coeficiente $\tan.\varphi \tan.\xi$ casi siempre difiere muy poco de la unidad. Se tendrá, pues, 19° 22′ 22″ por latitud correcta.

La elección del instante T es casi indiferente cuando se trata de estrellas muy próximas al polo, y cualquiera es aceptable con tal de que se puedan determinar fácilmente los valores simultáneos de θ y ξ; pero, en general, y para que x resulte pequeña, debe seguirse la regla de

reducir de preferencia al meridiano siempre que el ángulo horario h, correspondiente al instante t de la observación, y contado desde el tránsito más inmediato, no exceda de 4^h, ó sea de 60°. Desde 4^h hasta 6^h es más pequeña la reducción á la hora de la máxima digresión, á la del tránsito por el almicantarat polar, ó la que corresponde á $\theta = 90°$.

Dijimos que cuando se hayan hecho diversas observaciones, su reducción á un solo instante común, no sólo permite la comparación de todos los valores de $z + x$, que deben resultar sensiblemente iguales, sino que se presta, además, á la determinación del punto de partida de la graduación vertical del instrumento, si éste se ha empleado en sus dos posiciones. Aunque en el número 260 indicamos ya el modo de determinar así la colimación de un altazimut graduado por cuadrantes, expongamos ahora el de hallar la lectura zenital de un círculo numerado de 0° á 360°, quiere decir, la lectura g_o que se obtendría cuando el telescopio, invariablemente unido al círculo, estuviese dirigido exactamente hacia el zenit. Siendo:

g y g' las lecturas del círculo en las dos posiciones,
n y n' „ nivel „
r y r' las refracciones,
x y x' las reducciones al instante común, se tendrá en la primera y segunda posiciones respectivamente.

$$\xi = g - g_o + n + r + x$$
$$\xi = g_o - g' + n' + r' + x'$$

ecuaciones que, combinadas por adición y substracción, suministrarán los valores de ξ y g_o, á saber:

$$\xi = \tfrac{1}{2}(g - g') + \tfrac{1}{2}(n + n') + \tfrac{1}{2}(r + r') + \tfrac{1}{2}(x + x')$$
$$g_o = \tfrac{1}{2}(g + g') + \tfrac{1}{2}(n - n') + \tfrac{1}{2}(r - r') + \tfrac{1}{2}(x - x')$$

Las cantidades x y x' deben emplearse con el signo que les corresponda, según lo hemos visto en los ejemplos que anteceden. De esta manera cada par de observaciones, ejecutadas en dos posiciones inversas del círculo, debe darse el mismo valor de g_o, al menos mientras no se toquen los nonius ó los micrómetros, de cuya posición dependen las lecturas.

Cuando se observe un objeto terrestre muy distante, x y x' son nulos, y como las refracciones serán iguales, se tendrá:

$$g_0 = \tfrac{1}{2}(g + g') + \tfrac{1}{2}(n - n')$$

Una vez bien determinada esta constante por cualquiera de los métodos que preceden, no habrá inconveniente en usar el instrumento en una sola posición.

CAPITULO XIX.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

273.—La eliminación inmediata de los errores angulares, que acaso son los que más directamente influyen en las observaciones de latitud, se consigue observando dos estrellas en el momento en que adquieren la misma distancia zenital aparente. Conviene escogerlas de tal manera que el promedio de sus declinaciones sea próximamente igual á la latitud que se busca, y además, que no difieran mucho en ascensión recta; porque de ese modo pueden observarse cerca del meridiano para no temer la influencia de algún pequeño error en la hora, y para terminar toda la operación en poco tiempo.

Una vez hecha la elección conveniente, se dirige el telescopio del instrumento á la que culmine primero, ya sea la del Norte ó la del Sur, y luego que se tiene en la intersección de los hilos, si el telescopio tiene retícula, ó que se confunden las dos imágenes si se emplea el sextante ó cualquier otro instrumento de reflexión, se anota la hora y se deja el instrumento fijo en la posición que tenía, á fin de esperar el instante en que la otra estrella adquiere la misma altura para anotar la hora correspondiente. Siendo estas horas los únicos datos que debe recoger el observador, es innecesario apuntar la indicación del instrumento angular, á no ser por pura precaución para conocer algún cambio accidental que pudiera sufrir en el tiempo que transcurre de una observación á otra.