y siendo ζ' la distancia zenital en su paso subpolar, se tendrá igualmente:

$$\varphi = 180^\circ - (\delta' + \zeta')$$

En esta ecuación he representado por δ' la declinación de la estrella, en atención á que puede diferir algo de δ, que era su valor en el paso superior, cuando entre las observaciones transcurra un tiempo considerable. La semisuma de ambos valores de φ produce:

$$\varphi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Esta fórmula manifiesta que, en el resultado medio, sólo figura la semidiferencia de las declinaciones de la estrella, cantidad siempre muy pequeña y que se obtiene exactamente de las Efemérides, aun cuando tengan algún error los valores de δ y δ'.

La observación de los dos tránsitos también suministra la ecuación:

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta)$$

que da á conocer la declinación de la estrella, ó con más propiedad, el promedio de sus valores; pero de éste se deduce:

$$\delta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Las ventajas de servirse de este procedimiento consisten, pues, en hallar la latitud sin necesidad de valerse de las posiciones de las estrellas determinadas en otros Observatorios, y en corregir á la vez las posiciones mismas que constan en las Tablas Astronómicas.

CAPITULO XVI.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES CIRCUNMERIDIANAS.

255.—El inconveniente que presentan las observaciones meridianas tales como antes se han expuesto, es el de no permitir la repetición de la medida de las distancias zenitales, puesto que la única que se obtiene corresponde á un instante determinado, que es el del tránsito del astro. Este inconveniente es más grave al operar con instrumentos portátiles, cuyas lecturas angulares no dan á veces la aproximación necesaria para proporcionar el valor de ζ exacto hasta los segundos en una sola observación. Por esta razón el método de distancias zenitales meridianas se emplea raras veces en las estaciones ú observatorios temporales, prefiriéndose generalmente el llamado de distancias zenitales circunmeridianas, por cuyo medio se deduce el valor de ζ de muchas observaciones del astro, ejecutadas antes y después de su paso por el meridiano. De esta manera, y en virtud del principio de que la repetición de medidas suministra siempre promedios más ó menos independientes de los pequeños errores accidentales, se tiene cierta seguridad de llegar á un valor de ζ suficientemente exacto, aun sirviéndose de instrumentos que sólo aproximen las lecturas á $10''$.

Con el fin de desarrollar el cálculo necesario para la aplicación de este método, notemos que, tratándose de un tránsito superior, la distancia zenital meridiana ζ es menor que cualquiera otra distancia zenital z obtenida fuera del meridiano; y que, por el contrario, en un paso subpolar ζ es mayor que z. Si llamamos, pues, x la diferencia entre la distancia zenital medida z y la meridiana ζ, la primera podrá representarse por $\zeta + x$, y en el instante de la observación se tendrá la ecuación siguiente:

$$\cos.(\zeta + x) = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.h$$

Sustituyendo $1 - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}h$ en vez de $\cos.h$ resulta:

$$\cos.(\zeta + x) = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi\cos.\delta - 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h$$

Los primeros términos del segundo miembro equivalen á $\cos.(\delta - \varphi)$ ó á $\cos.(\varphi - \delta)$, y como ambos arcos representan la distancia zenital meridiana, podremos escribir así la ecuación anterior:

$$\cos.(\zeta + x) = \cos.\zeta - 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h$$

Tratándose de un tránsito inferior, $\cos.h$ será negativo, en cuyo caso los dos términos mencionados equivalen á $-\cos.(\varphi + \delta)$; pero como también se tiene entonces $\zeta = 180° - (\varphi + \delta)$, se infiere que siempre aquellos representan el valor de $\cos.\zeta$. A fin de considerar á la vez los tránsitos superiores y los inferiores, tomaremos por ecuación general:

$$\cos.(\zeta + x) = \cos.\zeta \mp 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h$$

Desarrollando ahora el primer miembro, y teniendo presente que por ser x un ángulo siempre muy pequeño, se podrá hacer uso de los desarrollos de su seno y su coseno, se tendrá hasta los términos de segundo orden:

$$x\,\text{sen.}\,\zeta + \tfrac{1}{2}x^2\cos.\zeta = \pm 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h$$

Resolveremos esta ecuación por el método de aproximaciones sucesivas, de modo que expresando en segundos el arco x se tendrá por primera aproximación:

$$x = \pm \frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta} \cdot \frac{2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

y sustituído este valor, expresado en partes del radio, en el término de segundo orden de la ecuación anterior, resulta el más exacto, convertido en segundos:

$$x = \pm \frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta} \cdot \frac{2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} - \left(\frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta}\right)^2 \cot.\zeta \cdot \frac{2\,\text{sen.}^4\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

256.—Este valor de x, llamado *reducción al meridiano*, suministra toda la precisión necesaria en las observaciones más delicadas. Si por abreviación hacemos:

$$C = \frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta} \qquad m = \frac{2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} \qquad n = \frac{2\,\text{sen.}^4\tfrac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

la reducción al meridiano tiene por expresión.

$$x = \pm Cm - C^2 n \cot.\zeta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

y como supusimos $z = \zeta + x$, el valor de la distancia zenital meridiana será:

$$\zeta = z \mp Cm + C^2 n \cot.\zeta \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

representando z la observada fuera del meridiano, aunque no muy léjos de este plano. El signo $(\mp)$ se toma para los tránsitos $\left(\begin{smallmatrix}\text{superiores.}\\ \text{inferiores.}\end{smallmatrix}\right)$

Debe advertirse que si bien ζ, que es precisamente la incógnita, figura en el valor de C y en el último término de la reducción, se hace uso de un valor puramente aproximativo, deducido de la latitud también aproximativa de la estación, pues se tiene (número 253):

Para los tránsitos al S. del zenit.................. $\zeta = \varphi - \delta$
" " " al N. " .... $\zeta = \delta - \varphi$
" " " subpolares........................ $\zeta = 180° - (\delta + \varphi)$

Casi siempre se conoce la latitud con la aproximación suficiente para obtener de esta manera un valor de ζ que basta para suministrar el de x con toda la exactitud necesaria; y entonces la ecuación (3) da á conocer la verdadera distancia zenital meridiana, por cuyo medio se calcula la latitud, aplicando las fórmulas (2) y (3) del Capítulo precedente, á saber:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{En los pasos al S. del zenit.....................} & \varphi = \delta + \zeta \\ \text{En los pasos al N. del zenit.....................} & \varphi = \delta - \zeta \\ \text{En los pasos inferiores ó sub-polares.......} & \varphi = 180^\circ - (\delta + \zeta)\end{array}\right\}\ldots (4)$$

Si acaso la latitud así obtenida fuere muy diferente de la supuesta al principio del cálculo, se repite éste haciendo uso del valor suministrado por el primero. La repetición, sin embargo, pocas veces es necesaria, por ser bastante raro que el astrónomo no conozca su latitud con 1′ ó 2′ de aproximación.

Los valores de m y de n se han reducido á Tabla, de la cual se toman con el pequeño ángulo h, expresado en tiempo, por argumento. Las Tablas V y VI del fin contienen estos valores.

257.—Por lo común no se hace una sola observación circunmeridiana, sino varias antes y después del tránsito del astro, anotando sus distancias al zenit y las horas cronométricas correspondientes. Estas, comparadas con la hora también cronométrica del paso, da á conocer los pequeños ángulos horarios h, con los cuales se toman los valores de m y n para aplicar las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), según se ha explicado. Procediendo así, se reduce por separado cada una de las observaciones, lo cual tiene la ventaja de poder apreciar su concordancia; pero es más fácil ejecutar el cálculo con los promedios de los valores de z, tomando por m y n los promedios de los valores que corresponden á las diversas observaciones. Este último medio es el único que puede emplearse cuando es repetidor, y se usa como tal el instrumento angular, en atención á que el elemento que suministra es la distancia zenital media. Es claro que el valor de z que figura en nuestras ecuaciones, representa la distancia zenital verdadera, ó sea corregida por los errores instrumentales, por la refracción y por paralaje y semidiámetro (número 145) si estos ángulos son apreciables en el astro observado. En este caso se halla el sol, que es casi el único de los astros que tienen semidiámetro y paralaje apreciables, que se emplea con frecuencia para determinar la latitud por este método. El efecto del semidiámetro se elimina observando alternativamente, é igual número de veces, el borde superior y el inferior.

258.—Deducidos los valores de h de las indicaciones cronométricas, es preciso atender á la marcha del instrumento, así como á la especie de tiempo que señala, á fin de obtener los verdaderos ángulos horarios convenientemente expresados, quiere decir, en tiempo solar si se observa el sol, y en tiempo sideral si se trata de una estrella. Para no verse en la necesidad de corregir uno á uno los ángulos horarios que da el cronómetro, es preferible emplearlos tales como resultan de la comparación de las indicaciones de este instrumento, respecto de la que corresponde al tránsito del astro, y llevar en cuenta la corrección de esta manera. El cronómetro, por la hipótesis, no señalando exactamente 24^h entre dos pasos sucesivos del astro, sea v la cantidad que atrasa en $24^h = 86400^s$, y h el ángulo horario que da. Se tiene, en consecuencia: $86400 - v : 86400 :: h : h'$. De aquí resulta:

$$\frac{h'}{h} = \frac{86400}{86400 - v} = \frac{1}{1 - \frac{v}{86400}} = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)$$

Por consiguiente, el valor que debe entrar en el cálculo es el de h'; pero como por ser siempre pequeños los ángulos horarios, se tiene sensiblemente:

$$\frac{h'}{h} = \frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}h'}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}h},$$

resultará:

$$\frac{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h'}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h} = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)^2$$

y representada por k esta relación, tendremos.

$$k = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)^2 = 1 + 0.000023\,v \qquad \text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h' = k\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h \;\ldots\ldots (5)$$

los logaritmos de k constan en nuestra Tabla VII, y tienen por argumento la variación diaria del cronómetro, desde $v = -30^s$ hasta $v = +30^s$, quiere decir, desde un adelanto de medio minuto hasta un atraso de la misma cantidad en 24^h.

Cuando se observa una estrella empleando cronómetro solar, es necesario considerar que, además de su variación diaria, atrasa......

$3^m 56^s$ en el día sideral; y así designando por i el valor de k correspondiente á $v = 236^s$, se halla: $\log. i = 0.00237$. Recíprocamente, si se observa el sol con cronómetro sideral, además del factor k que corresponda á su marcha, se le considerará un adelanto diario de 236^s respecto del día solar; y así, con $v = -236^s$, se encuentra............ $\log. i = 9.99762$. Además de esto, como el día medio y el día verdadero difieren entre sí tanto como varía diariamente la ecuación del tiempo E, si ΔE es su incremento en 24^h, debemos suponer que $v - \Delta E$ es la marcha diaria del cronómetro respecto del día verdadero; y así el valor de k será:

$$k' = 1 + 0.000023 (v - \Delta E)$$

que se toma de la Tabla con el argumento $v - \Delta E$. En cuanto al signo de E, y por consiguiente de su incremento, véase el número 128. En resumen, siendo

$$C' = \frac{\cos. \varphi \cos. \delta}{\text{sen.} \zeta},$$

el factor de m en la fórmula (3) será:

Para una estrella observada con cronómetro sideral...	$C = \qquad C'k$
„ „ „ „ „ solar.....	$C = (0.00237)\, C'k$
„ el sol observado con cronómetro solar...........	$C = \qquad C'k'$
„ „ „ „ „ „ sideral..........	$C = (9.99762)\, C'k'$

Respecto de δ, que forma parte de las fórmulas (4), cuando se observa un astro que, como el sol, varía sensiblemente de declinación en el tiempo que duran las observaciones, se toma δ igual al promedio de las declinaciones correspondientes á las diversas horas anotadas, ó lo que es lo mismo, δ representa la declinación que corresponde al promedio de las horas de las observaciones.

Ejemplo.—Presentemos el siguiente para que se comprenda bien todo el procedimiento. El 1º de Mayo de 1860 observé la estrella polar (*α Ursæ minoris*) cerca de su tránsito inferior, sirviéndome de un cronómetro solar cuya variación diaria era de $-1^s.4$. El instrumento angular era un altazimut con micrómetros que daban los ángulos con aproximación de $1''$.

CRONÓMETRO.	ALTAZIMUT.	NIVEL. Oc	NIVEL. Ob
$10^h 18^m 57^s$	$b = 72° 00' 10''.5$	69	61
„ 22 11	$a = 18 \quad 3.25.0$	70	60
„ 25 26	$b = 72 \; 00 \; 17.0$	64	67
„ 28 21	$a = 18 \quad 3 \; 17.5$	62	68

Atendiendo al estado del cronómetro, su indicación en el instante del tránsito subpolar de la estrella, era $10^h 28^m 5^s$. Para hallar los valores de h, y por consiguiente los de m y n, dispondremos, pues, los datos como sigue:

	Hora del paso = 10 h. 28 m. 5 s.	h	m (Tabla V)	n (Tabla VI)
Observaciones.........	$10^h 18^m 57$	$-9^m\ 8^s$	$163''.8$	$0''.1$
	„ 22 11	$-5\ 54$	68 .3	0 .0
	„ 25 26	$-2\ 39$	13 .8	0 .0
	„ 28 21	$+0\ 16$	0 .1	0 .0
		Promedios............	$m = 61''.5$	$n = 0''.0$

Como el altazimut daba distancias zenitales en la primera posición y alturas en la segunda, y además, cada división del nivel valía $1''$, las dos primeras y las dos últimas observaciones dan respectivamente por distancia zenital aparente de la estrella:

$$z' = 71° 58' 22''.75 + 4''.50 = 71° 58' 27''.25$$
$$z' = 71 \;\; 58 \; 29 \; .75 - 2 \; .25 = 71 \;\; 58 \; 27 \; .50$$

Adoptemos el término medio $z' = 71° 58' 27''.37$ de los dos resultados, puesto que también tomamos los promedios de los valores de m y n. Según las indicaciones del barómetro y del termómetro, y atendiendo al valor de z', la refracción (número 138) era $r = 2' 16''.37$, por lo cual la distancia zenital verdadera de la estrella será:

$$z = z' + r = 72° 00' 43''.7$$

El lugar de la observación es el extremo occidental de la base del Valle, y tiene por latitud $\varphi = 19° 25' 23''$; pero para que se vea la poca influencia que tiene, en ciertos casos, un error en φ, tomemos

19° 20′ por latitud aproximativa para calcular el valor también aproximativo de ζ, que entra en la fórmula (3). La declinación de la estrella era $\delta = 88° 33' 51''.0$, y puesto que se trata de un tránsito subpolar, tendremos:

$$\begin{array}{rl} \delta = & 88° \; 33' \; 51'' \\ \varphi = & 19 \;\; 20 \;\; 00 \\ \hline \delta + \varphi = & 107° \; 53' \; 51'' \\ & 180 \\ \hline \zeta = & 72° \;\; 6' \;\; 9'' \end{array}$$

Calculemos ahora la reducción al meridiano por la ecuación (2), que se reduce en este caso á su primer término, puesto que $n = 0$; en seguida la distancia zenital meridiana por la (3), y finalmente la latitud por la última de las (4).

Const..................	0.00237	$z =$	72° 00′ 43″.7
k (Tabla VII).........	9.99999	$x =$	+ 1 .5
cos. φ..................	9.97479		
cos. δ..................	8.39894	$\zeta =$	72° 00′ 45″.2
sen. ζ..................	—9.97846	$\delta =$	88 33 51 .0
C..................	8.39763	$\delta + \zeta =$	160° 34′ 36″.2
m..................	1.78887		180°
x..................	0.18650	$\varphi =$	19° 25′ 23″.8

Como el resultado del cálculo difiere más de 5′ de la latitud supuesta al principio, debe repetirse con $\varphi = 19°25'20''$ y $\zeta = 72°00'50''$ próximamente; pero en el caso actual, sin embargo, se obtendría el mismo resultado que antes, á causa de la pequeñez de C. No siempre sucede lo mismo, pues el error del supuesto tiene, en general, una influencia creciente á medida que disminuye la distancia zenital; pero en los casos más desfavorables la repetición del cálculo suministra el verdadero valor de x. Por otra parte, el error de la latitud supuesta nunca puede ser tan grande como el que admitimos en el ejemplo precedente; porque es claro que al calcular la reducción al meridiano, puede tomarse por ζ la menor de las distancias zenita-

les observadas, si se trata de pasos superiores, ó bien la mayor en los tránsitos subpolares. Así, en nuestro caso, suponiendo $\zeta = 72° 00' 44''$, hallaríamos $\varphi = 19° 25' 25''$ por latitud aproximativa para determinar la reducción x, quiere decir, valores casi exactos y que evitarían, en consecuencia, la repetición del cálculo.

259.—En la aplicación que antecede se adoptó el promedio de las distancias zenitales obtenidas por la observación, el cual se combinó también con la reducción al meridiano que resulta del promedio de los valores de m. Este procedimiento es, según dijimos, el que se sigue habitualmente cuando se opera con círculo repetidor, el cual sólo suministra la distancia zenital media; ó bien cuando operando con altazimut, no se conoce el efecto de la colimación vertical, y por consiguiente, no pueden deducirse las distancias zenitales que corresponden á cada una de las observaciones individuales. Cuando no es así, es también muy fácil obtener por separado la latitud que resulta de cada observación; porque basta para esto calcular una á una las reducciones con el mismo valor de C, y el de m que corresponda á cada ángulo horario. Haciéndolo así, hallaríamos para las cuatro observaciones de nuestro ejemplo:

$$x = +4''.1 \qquad x = +1''.7 \qquad x = +0''.3 \qquad x = 0''.0$$

Aunque de este modo es un poco más largo el cálculo, se tiene la ventaja de poder comparar entre sí los diversos resultados individuales, con el fin de desechar aquel ó aquellos que presenten una discordancia notable respecto de los demás.

260.—He indicado repetidas veces el modo de determinar la colimación vertical por medio de la observación de un objeto distante ó de la retícula de un colimador en las dos posiciones del círculo; pero también se consigue el mismo resultado observando un astro y reduciendo cada observación al meridiano por el método que nos ocupa. Sean, en efecto, b y a las indicaciones del altazimut en las posiciones en que da distancias zenitales y alturas respectivamente; c la colimación vertical, r y r' las refracciones, n y n' las inclinaciones que señala el nivel paralelo al círculo, esto es: $n = \frac{1}{2}(o - e)v$, y $n' = \frac{1}{2}(o' - e')v$, y finalmente x y x' las reducciones al meridiano. Las distancias zenitales meridianas que se deducen de las dos observaciones, serán:

$$\zeta = b + c + n + r \mp x$$
$$\zeta = 90° - a - c + n' + r' \mp x'$$

que combinadas por adición y substracción, producen:

$$\zeta = 45° + \tfrac{1}{2}(b-a) + \tfrac{1}{2}(n+n') + \tfrac{1}{2}(r+r') \mp \tfrac{1}{2}(x+x')$$
$$c = 45° - \tfrac{1}{2}(b+a) + \tfrac{1}{2}(n'-n) + \tfrac{1}{2}(r'-r) \pm \tfrac{1}{2}(x-x')$$

De estas ecuaciones, la primera da á conocer la latitud combinando el valor de ζ con el de δ, como se ha hecho anteriormente; y la segunda suministra el valor de la colimación en el sentido vertical. Esta última cantidad permite el cálculo de la latitud por cada una de las observaciones, aplicándola con todas las demás correcciones á las lecturas a y b del círculo, según lo indican los valores primitivos de ζ.

En nuestro ejemplo de la estrella polar, habiéndose hecho dos observaciones en cada posición del círculo, podremos hallar el valor de c combinando la primera observación con la segunda y la tercera con la cuarta; de este modo, suponiendo la refracción igual en todas ellas:

	Primera y segunda.	Tercera y cuarta.
$45° - \frac{1}{2}(b+a)$	$-\ 1'47''.75$	$-\ 1'47''.25$
$+\frac{1}{2}(n'-n)$	$+\ \ 0.50$	$-\ \ 0.75$
$-\frac{1}{2}(x-x')$	$-\ \ 1.20$	$-\ \ 0.15$
	$c = -\ 1'48''.45$	$c = -\ 1'48''.15$

Adoptando el término medio $c = -1'48''.30$, y recordando que $r = 2'16''.37$, se hallarán los siguientes resultados por cada una de las observaciones:

	Primera.	Segunda.	Tercera.	Cuarta.
b ó $90°-a$.....	72° 00′ 10″.5	71° 56′ 35″.0	72° 00′ 17″.0	71° 56′ 42″.5
c.....	− 1 48 .3	+ 1 48 .3	− 1 48 .3	+ 1 48 .3
n.....	+ 4 .0	+ 5 .0	− 1 .5	− 3 .0
r.....	+ 2 16 .4	+ 2 16 .4	+ 2 16 .4	+ 2 16 .4
x.....	+ 4 .1	+ 1 .7	+ 0 .3	+ 0 .0
ζ.....	72° 00′ 46″.7	72° 00′ 46″.4	72° 00′ 43″.9	72° 00′ 44″.2
$180°-\delta$.....	91 26 9 .0	91 26 9 .0	91 26 9 .0	91 26 9 .0
φ.....	19° 25′ 22″.3	19° 25′ 22″.6	19° 25′ 25″.1	19° 25′ 24″.8

La concordancia de todos estos resultados individuales manifiesta la precisión con que puede obtenerse la latitud por el método de circunmeridianas sirviéndose de un altazimut, aunque sea de los portátiles como el que se empleó en esta operación. No me parece aventurado asegurar que tomando varias series de distancias zenitales al Norte y al Sur del zenit, es posible obtener la latitud de una estación con menos de 1″ de error, en unas cuantas noches de trabajo.

261.—Presentemos ahora un ejemplo de observaciones solares hechas últimamente en la ciudad de México con teodolito astronómico pequeño, cuyo círculo vertical tiene sólo $0^m.16$ de diámetro, y que da los ángulos con aproximación de 10″. Las distancias zenitales están tomadas por el método de Mr. Quetelet (número 188) y son las del limbo inferior del sol.

CRONÓMETRO.	CÍRCULO.	NIVEL. Oc	NIVEL. Ob
$11^h\ 27^m\ 10^s$	$b = 43°\ 19'\ 10''$	29	28
„ 41 48	$a = 46\ \ 50\ \ 15$	29	28
„ 49 2	$b = 43\ \ \ 7\ \ 12$	33	24
„ 54 47	$a = 46\ \ 46\ \ 00$	27	29

La hora cronométrica del medio día verdadero era $11^h\ 44^m\ 26^s$, por lo cual los ángulos horarios, los valores de m y n y las distancias zenitales corregidas por el estado del nivel cuyas divisiones valían 8″, son:

	Tránsito $11^h\ 44^m\ 26^s$	h	m	n	z'
Observaciones.	$11^h\ 27^m\ 10^s$	$17^m\ 16^s$	585″.1	0″.8	43° 19′ 14″
„	„ 41 48	2 38	13 .6	0 .0	„ 9 49
„	„ 49 2	4 36	41 .5	0 .0	„ 7 48
„	„ 54 47	10 21	210 .3	0 .1	„ 13 52
Promedios.........			$m = 212''.6$	$n = 0\ .2$	$z' = 43°12'40''.7$

El valor medio de z' resulta ya independiente de la colimación vertical, por haberse ejecutado las observaciones en las dos posiciones del círculo. Los datos para calcular la refracción dieron $r = 40''.9$, la paralaje de altura era $p = 6''.0$ y el semidiámetro del sol $s = 16'17''.9$; de donde el conjunto de correcciones para obtener la distancia zenital verdadera del centro (número 145) es: $r-p-s=-15'43''.0$, y se tiene, por consiguiente, $z=42°56'57''.7$.

Calculemos la reducción al meridiano tomando $\varphi=19°26'10''$ por latitud aproximativa, y siendo la declinación del sol en el instante medio de las observaciones, $\delta=-23°26'20''.3$. El cronómetro tenía un atraso diario de $7^s.8$ y la ecuación del tiempo variaba $+29^s.8$ en 24^h, por lo cual el argumento para tomar de la Tabla VII el logaritmo de k' es $v-\Delta E=-22^s$.

		k'...	9.99978				
$\varphi=$	$19°26'10''$	cos. φ...	9.97452				
$\delta=$	$-23\ 26\ 20$	cos. δ...	9.96260				
$\zeta=$	$42°52'30''$	sen. ζ...	-9.84079	cot. ζ....	0.032	$z=$	$42°56'57''.7$
		C....	0.09611	C^2....	0.192	$x=$	$-4\ 24\ .9$
		m...	2.32756	n....	9.301	$\zeta=$	$42°52'32''.8$
			2.42367		9.525	$\delta=$	$-23\ 26\ 20\ .3$
			$-265''.26$		$+0''.33$	$\varphi=$	$-19°26'12''.5$

262.—Siempre que sea posible, debe procurarse hacer tantas observaciones antes como después del tránsito del astro, según lo manifiesta el ejemplo anterior; y si los ángulos horarios orientales dan casi la misma suma que los occidentales, no habrá que temer la influencia de algún pequeño error en la hora. La ventaja de no necesitarse mucha exactitud en este elemento es una de las mayores que presenta el método de circunmeridianas.

Nunca será prudente dar por definitiva la determinación de una latitud, sin haber hecho numerosas observaciones de estrellas al Norte y al Sur del zenit, tratando de combinarlas de manera que no difieran mucho sus distancias zenitales, pues hemos visto que este es el modo de obtener un promedio independiente de los pequeños errores angulares, constantes ó variables. Pondré á la vista los diversos resultados que me dieron varias estrellas al determinar la latitud de Mixcoac.

AL SUR DEL ZENIT.

Por	46 obser. de	α	*Virginis*........................	$\varphi=19°\ 22'\ 20''.4$
„	26 „	α^2	*Libræ*........................	$\varphi=19\ \ 22\ 18\ .7$
„	34 „	α	*Scorpii*........................	$\varphi=19\ \ 22\ 20\ .8$
„	38 „	β'	*Scorpii*........................	$\varphi=19\ \ 22\ 22\ .4$

Por 144 obser. al Sur.............................. $\varphi=16°\ 22'\ 20\ .7$

AL NORTE DEL ZENIT.

Por	16 obser. de	γ	*Ursæ maj*........................	$\varphi=19°\ 22'\ 16''.9$
„	10 „	α	*Ursæ maj*........................	$\varphi=19\ \ 22\ 15\ .4$
„	22 „	η	*Ursæ maj*........................	$\varphi=19\ \ 22\ 15\ .4$

Por 48 obser. al Norte.............................. $\varphi=19°\ 22'\ 15''.9$

La constancia con que las determinaciones al Sur del zenit resultan mayores que las del Norte, indica claramente la existencia de un error en el instrumento, que era un círculo repetidor pequeño de Ertel. La latitud definitiva del lugar que ocupaba el instrumento, un poco al Sur del punto trigonométrico que se estableció en aquel pueblo, será, en consecuencia: $\varphi=19°\ 22'\ 18''.3$.

263.—Las aplicaciones que hemos hecho de la fórmula (3) indican la pequeñez del último término, que muchas veces puede omitirse sin inconveniente alguno, pues sólo adquiere valor apreciable siendo pequeña la distancia zenital meridiana ó considerables los ángulos horarios del astro. Cuando no tienen lugar tales circunstancias, podrá, pues, tomarse por reducción al meridiano:

$$x=\mp C\frac{2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

que siendo h muy pequeño puede escribirse así:

$$x=\mp\tfrac{1}{2}\,C\,\text{sen.}\,1''\,h^2$$

Si expresamos á h en segundos de tiempo, y hacemos.............. $Q=\pm\frac{225}{2}\,C\,\text{sen.}\,1''$, la distancia zenital meridiana tendrá por expresión:

$$\zeta=z-Qh^2$$

y como Q es constante para la misma latitud y la misma estrella, esta ecuación demuestra que muy cerca del meridiano las variaciones $z-\zeta$ de distancia zenital son proporcionales á los cuadrados de los intervalos de tiempo respectivos.

En este principio se funda un procedimiento para determinar la latitud, que si no tiene toda la precisión del método estricto de circunmeridianas, ofrece en cambio las ventajas de no demandar el conocimiento de la latitud aproximativa y de poderse aplicar, sirviéndose de un simple reloj de segundos, las cuales lo hacen, por tanto, precioso para un viajero, que desee fijar la posición geográfica de los lugares de su tránsito con bastante aproximación, cuando no pueda disponer del tiempo y demás elementos necesarios para la aplicación de métodos más exactos. Consiste en medir tres distancias zenitales de un astro tan cerca como sea posible de su paso meridiano, anotando las indicaciones correspondientes de un cronómetro ó de un reloj cualquiera, con tal que su marcha sea regular durante algunos minutos, lo que en cualesquiera circunstancias me parece muy fácil de realizar. Sean z_1, z_2 y z_3 las tres distancias zenitales verdaderas, esto es, ya corregidas por nivel, refracción, paralaje, etc., y t_1, t_2 y t_3 las respectivas lecturas del reloj. Designando por T la indicación incógnita del mismo instrumento en el instante de la culminación del astro, y por ζ su distancia zenital meridiana, tendremos de acuerdo con el principio anterior:

$$\zeta=z_1-Q(t_1-T)^2$$
$$\zeta=z_2-Q(t_2-T)^2$$
$$\zeta=z_3-Q(t_3-T)^2$$

Se trata de determinar los valores de las tres incógnitas Q, ζ y T. Con este fin eliminemos á ζ restando la segunda ecuación de la primera y la tercera de la segunda, de lo que resulta:

$$2\,Q\,T=Q(t_1+t_2)-\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}$$

$$2\,Q\,T=Q(t_2+t_3)-\frac{z_3-z_2}{t_3-t_2}$$

Restando uno de otro estos dos valores, eliminaremos á T y obtendremos:

$$Q=\frac{\dfrac{z_3-z_2}{t_3-t_2}-\dfrac{z_2-z_1}{t_2-t_1}}{t_3-t_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Una vez determinado el coeficiente Q, cualquiera de las dos ecuaciones que anteceden da por valor de T:

$$T=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(t_1+t_2)-\dfrac{z_2-z_1}{2\,Q(t_2-t_1)}\\[2ex] \frac{1}{2}(t_2+t_3)-\dfrac{z_3-z_2}{2\,Q(t_3-t_2)}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Finalmente, por cada una de las ecuaciones primitivas puede obtenerse el valor de ζ, á saber:

$$\zeta=\left\{\begin{array}{l}z_1-Q(t_1-T)^2\\ z_2-Q(t_2-T)^2\\ z_3-Q(t_3-T)^2\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Apliquemos este método á las siguientes observaciones del sol hechas con sextante. Al lado de las horas del reloj constan las distancias zenitales ya corregidas por los errores del instrumento y por refracción, paralaje, semidiámetro, etc.

$t_1=11^h\,15^m\,33^s$	$z_1=41°\,38'\,\,2''$
$t_2=$ „ 22 20	$z_2=$ „ 36 20
$t_3=$ „ 28 29	$z_3=$ „ 38 7

Con estos datos resulta:

$$\frac{z_3-z_2}{t_3-t_2}=\frac{107''}{369^s}=+0.29 \qquad \frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}=-\frac{102''}{407^s}=-0.25$$

y en consecuencia el valor de Q es:

$$Q=\frac{0.29+0.25}{776^s}=+0.0007$$

Calculando ahora la hora T del tránsito, hallaremos:

$$T = 11^h 18^m 56^s.5 + \frac{0.25}{0.0014} = 11^h 18^m 56^s.5 + 2^m 58^s.6 = 11^h 21^m 55^s$$

$$T = 11^h 25^m 24^s.5 - \frac{0.29}{0.0014} = 11^h 25^m 24^s.5 - 3^m 27^s.2 = 11^h 21^m 57^s$$

La pequeña diferencia de los dos valores de T proviene de los errores inevitables en la aproximación numérica. Adoptando el término medio $11^h 21^m 56^s$, tendremos por distancia zenital meridiana.

$$\begin{aligned} \zeta &= 41^\circ 38' \; 2'' - 0.0007\,(383)^2 = 41^\circ 36' 19''.3 \\ \zeta &= 41 \;\; 36 \;\; 20 \; - 0.0007\,(024)^2 = 41 \;\; 36 \;\; 19\;.6 \\ \zeta &= 41 \;\; 38 \;\; 7 \; - 0.0007\,(393)^2 = 41 \;\; 36 \;\; 18\;.9 \end{aligned}$$

La declinación del sol en el instante medio de las observaciones era la que va á continuación, que combinado con ζ determina la latitud:

$$\begin{aligned} \zeta &= \quad 41^\circ 36' 19''.3 \\ \delta &= -20 \;\;\; 6 \;\; 40\;.7 \\ \hline \varphi &= \quad 21^\circ 29' 38''.6 \end{aligned}$$

Por una serie numerosa de observaciones, calculada por el método exacto de circunmeridianas, obtuve para el mismo punto, que es la hacienda de la Sauceda en el Estado de Guanajuato, la latitud $\varphi = 21^\circ 29' 33''.6$.

264.—Vimos en el número 235 que en las inmediaciones del meridiano el movimiento azimutal de los astros es proporcional al tiempo; y como según acabamos de ver, el movimiento ascensional en las mismas circunstancias es proporcional al cuadrado del tiempo, inferiremos que cerca del tránsito de un astro, sus cambios de altura son proporcionales á los cuadrados de las variaciones azimutales correspondientes. En este principio se funda un método para determinar la latitud, que ofrece mucha analogía con el que expuse en el número precedente, y cuya aplicación evita completamente el uso de un instrumento cronométrico. Al medir con un altazimut tres distancias zenitales de un astro en los momentos de su culminación, si se leen las indicaciones del círculo azimutal, podremos servirnos de estos datos en lugar de las horas de un reloj que demanda el otro

procedimiento. Sea, en efecto, A la indicación meridiana del círculo horizontal, y llamemos a_1, a_2 y a_3 las tres lecturas azimutales obtenidas al medir las distancias zenitales verdaderas z_1, z_2 y z_3. Las expresiones de la distancia zenital meridiana serán, según lo demostrado:

$$\begin{aligned} \zeta &= z_1 - R(a_1 - A)^2 \\ \zeta &= z_2 - R(a_2 - A)^2 \\ \zeta &= z_3 - R(a_3 - A)^2 \end{aligned}$$

en las cuales R representa un coeficiente constante para cada estrella. Resolviendo estas ecuaciones por el método del número anterior, hallaremos las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\dfrac{z_3 - z_2}{a_3 - a_2} - \dfrac{z_2 - z_1}{a_2 - a_1}}{a_3 - a_1} \\ A &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - \dfrac{z_2 - z_1}{2R(a_2 - a_1)} \\ \frac{1}{2}(a_2 + a_3) - \dfrac{z_3 - z_2}{2R(a_3 - a_2)} \end{cases} \\ \zeta &= \begin{cases} z_1 - R(a_1 - A)^2 \\ z_2 - R(a_2 - A)^2 \\ z_3 - R(a_3 - A)^2 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

El cálculo de estas fórmulas es tan semejante al de las que se aplicaron en el otro método, que juzgo innecesario presentar un ejemplo numérico. La observación es igualmente sencilla, y sólo es preciso, como en aquél, conocer la colimación vertical para usar el círculo en una sola posición. Luego que la estrella queda cortada por la intersección de los hilos, se leen las indicaciones de los círculos vertical y horizontal, las cuales corregidas por colimación, niveles, etc., y la primera por refracción, suministran los datos z y a que corresponden á cada observación.

Nótese que sin trabajo adicional alguno, es posible trazar aproximadamente el meridiano, puesto que la resolución da á conocer la graduación A que indicaría el círculo horizontal al coincidir el telescopio con aquel plano.