CAPITULO XV.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD. — MÉTODO GENERAL CONOCIENDO LA DISTANCIA ZENITAL DE UN ASTRO Y LA HORA DE LA OBSERVACIÓN.

248.—En el número 126 he dado una idea general del procedimiento por cuyo medio se obtiene la latitud, y que consiste en medir la distancia zenital de un astro á una hora conocida. Teniendo, en efecto, los datos z, h y δ, pueden aplicarse desde luego las fórmulas (6) de la página citada, que son:

$$\tan. M = \frac{\tan.\delta}{\cos.h} \qquad \cos.(M-\varphi) = \frac{\text{sen.}M}{\text{sen.}\delta}\cos.z \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Por la primera se determina el ángulo subsidiario M; la segunda da $M-\varphi$; y por consiguiente se obtendrá: $\varphi = M - (M-\varphi)$.

Este método es el más general y el que sirve de base á todos los que expondré en los Capítulos siguientes, por lo cual conviene investigar desde ahora las condiciones más ventajosas de la observación, desde el punto de vista de la menor influencia de los pequeños errores que pudieran tener los datos del problema. Siendo el del resultado una función de éstos, tendremos:

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dz}\Delta z + \frac{d\varphi}{dh}\Delta h + \frac{d\varphi}{d\delta}\Delta\delta$$

Las fórmulas (1) se derivan de la siguiente fundamental, que emplearemos para hallar los coeficientes diferenciales:

$$\cos.z = \text{sen.}\varphi\,\text{sen.}\delta + \cos.\varphi\cos.\delta\cos.h$$

Diferenciándola con relación á φ, y sucesivamente respecto de los tres elementos z, h y δ, obtendrémos por medio de sencillas transformaciones:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-\text{sen.}z}{\cos.\varphi\,\text{sen.}\delta - \text{sen.}\varphi\cos.\delta\cos.h} = \frac{-\text{sen.}h}{\text{sen.}a(\cos.\varphi\tan.\delta - \text{sen.}\varphi\cos.h)} = -\frac{1}{\cos.a}$$

$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\cos.\varphi\,\text{sen.}h}{\cos.\varphi\tan.\delta - \text{sen.}\varphi\cos.h} = \cos.\varphi\tan.a$$

$$\frac{d\varphi}{d\delta} = \frac{\cos.\varphi\tan.\delta\cos.h - \text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi\tan.\delta - \text{sen.}\varphi\cos.h} = \frac{\cos.\varphi\tan.a}{\text{sen.}h}(\tan.\delta\cos.h - \tan.\varphi)$$

249.—Estos coeficientes manifiestan que, en general, la influencia de los errores decrece con el azimut del astro. El primero nunca es nulo; pero adquiere el menor valor posible cuando a es igual á 0° ó á 180°. En tales casos $\frac{d\varphi}{dz}$ será respectivamente igual á -1 ó á $+1$, lo cual significa que el error resultante en la latitud es el mismo que el que tenga la distancia zenital, siempre que se observe el astro en el momento de su culminación. En cualquier otro azimut, $\Delta\varphi$ resultará mayor que Δz, aunque siendo a pequeño ó muy próximo á 180°, puede suponerse que el coeficiente tiene la unidad por valor constante. De aquí se deduce que para que el error de la latitud no exceda del que pueda tener z, deben observarse los astros tan cerca del meridiano como sea posible, y nunca en las inmediaciones del primer vertical.

El segundo coeficiente se nulifica cuando a sea de 0° ó de 180°, lo cual recomienda igualmente que las observaciones que tengan por objeto la determinación de la latitud, se hagan en los momentos de la culminacion del astro, ó por lo menos cuando sea pequeño su azimut.

El tercer coeficiente puede considerarse compuesto de dos factores: el primero $\frac{\cos.\varphi\tan.a}{\text{sen.}h}$, sólo puede ser nulo siéndolo $\tan.a$; pero como en tal caso también h es igual á 0° ó á 180°, resulta que ese factor se presentará bajo la forma de la indeterminación. Esto no obstante, será muy pequeño su valor siempre que sea poco considerable el azimut, y próximo á 90° el ángulo horario; circunstancias que se reunen en las circumpolares observadas cerca de sus elongaciones. El segundo factor $\tan.\delta \cos. h - \tan.\varphi$ se reduce á 0 cuando es recto el ángulo paraláctico, pues entonces se tiene:

$$\cot.\delta = \cot.\varphi \cos. h.$$

En consecuencia, del estudio de ambos factores se deduce que un pequeño error en la declinación del astro no tiene influencia sensible siendo éste una estrella circumpolar observada en los momentos de sus elongaciones.

Atendiendo á que

$$\frac{\tan. a}{\text{sen. } h} = \frac{1}{\tan.\delta \cos.\varphi - \text{sen.}\varphi \cos. h},$$

el mismo coeficiente puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{d\varphi}{d\delta} = \frac{\cos.\varphi \tan.\delta \cos. h - \text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi \tan.\delta - \text{sen.}\varphi \cos. h}$$

y por ella se ve que cuando $h = 0°$, ó bien $h = 180°$, resulta:

$$\frac{d\varphi}{d\delta} = +1 \text{ ó } \frac{d\varphi}{d\delta} = -1 \text{ respectivamente,}$$

lo cual manifiesta que el error de la latitud es igual al que tenga la declinación, siempre que se observe el astro en los instantes de sus tránsitos por el meridiano. De aquí se infiere que observando una estrella cerca de la culminación, la influencia de $\Delta\delta$ es mayor que cuando se observa con la proximidad de sus elongaciones ó digresiones; pero debe tenerse presente que como para determinar la latitud siempre se emplean estrellas cuyas posiciones son muy bien conocidas, tales como las llamadas *fundamentales*, que son las que constan en todas las Efemérides, pueden considerarse nulos los errores de sus declinaciones, y en consecuencia, prescindirse de la condición favorable á la menor influencia de este error, para atender preferentemente á las que se refieren á los otros errores Δz y Δh, que

son los que puede cometer el observador, por ser los datos que obtiene por medidas directas. Así, pues, como resultado general del análisis precedente, estableceremos la regla de que cuando el objeto de las observaciones sea el de determinar la latitud, conviene tomar las distancias zenitales tan cerca del meridiano como sea posible.

250.—Es preciso tener presente que, en esas circunstancias, las variaciones de altura no pueden suponerse proporcionales á los intervalos de tiempo transcurridos entre las observaciones, al menos cuando sean algo considerables; y así es que tomando una serie de distancias zenitales, no deberá mirarse su promedio como correspondiente al de las horas respectivas, si la observación dura más de 4^m ó 5^m. Lo más conveniente, en tales casos, es agrupar los datos en series parciales, de manera que sus horas extremas no difieran sino unos cuantos minutos; ó bien calcular individualmente cada una de las observaciones, aplicando las fórmulas (1) con valores simultáneos de h y z, lo cual es fácil siempre que conociendo el efecto de la colimación vertical, pueda usarse el círculo en una sola posición. Lo es igualmente siempre que se trabaje con sextante; pero si se miden las distancias zenitales con círculo repetidor, lo que debe hacerse es procurar hacer pronto dobles observaciones, leyendo la graduación del círculo al fin de cada observación de orden par. Entonces la mitad del ángulo recorrido por la alidada, da la distancia zenital aparente del astro, que sin error de importancia, puede suponerse correspondiente al promedio de las dos indicaciones del cronómetro, siendo pequeña la diferencia de éstas. Por otra parte, en la página 105 y siguientes de mis *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse el modo de corregir el promedio de las horas para hacerlo correspondiente al de las distancias zenitales cuando sea algo considerable la duración de la serie de observaciones.

251.—Presentemos ahora algunos ejemplos de este método para determinar la latitud. El 26 de Mayo de 1857 observé en Mixcoac la estrella *β Ursæ minoris* fuera del meridiano, con un círculo repetidor y un cronómetro solar que, á la hora de la observación, tenía un adelanto de $2^m\,1^s.76$. La distancia zenital corregida por los errores del instrumento y por la refracción fué $z = 59° 50' 41''.2$ y la hora cronométrica la que va á continuación. La posición de la estrella era: $\alpha = 14^h\ 51^m\ 16^s.29$ y $\delta = +\ 74° 44' 18''.9$.

$t = 7^h 43^m 55^s.62$	tan. δ... 0.5640834	sen. M....... 9.9914547
$\Delta t = -\ 2\ \ 1.76$	cos. h...-9.8658563	cos. z......... 9.7010015
		sen. δ.........-9.9844080
Hora media $= 7^h 41^m 53^s.86$	tan. M... 0.6982271	
As. recta $= 4\ 17\ \ 5.50$		cos. $(M-\varphi)$.. 9.7080482
Acel. $= +\ 1\ 15.88$	$M = 78° 40' 16''.3$	
		$M - \varphi = 59° 17' 55''.5$
Hora sid. $= 12^h 00^m 15^s.24$		$M = 78\ 40\ 16.3$
$\alpha = 14\ 51\ 16.29$		
		$\varphi = 19° 22' 20''.8$
$h = \begin{cases} -\ 2^h 51^m\ 1^s.05 \\ -42° 45' 15''.7 \end{cases}$		

En la misma estación tomé el 23 de Junio de 1857 la distancia zenital de la estrella polar después de su tránsito inferior. Los datos corregidos como antes, fueron $z = 71° 52' 31''.0$ y la hora sideral correspondiente, $T = 15^h 10^m 56^s.96$. La posición de α *Ursæ minoris* era: $\alpha = 1^h 6^m 40^s.80$ y $\delta = 88° 32' 41''.5$. Se tendrá, pues:

$T = 15^h 10^m 56^s.96$	tan. δ... 1.5951249	sen. M......... 9.9998967
$\alpha = 1\ \ 6\ 40.80$	cos. h...$-9.9327586-$	cos. z.......... 9.4928812
		sen. δ..........-9.9998599
$h = \begin{cases} -\ 9^h 55^m 43^s.84 \\ -148° 55' 57''.6 \end{cases}$	tan. M.. $1.6623663-$ $M = 91° 14' 47''.4$	cos. $(M-\varphi)$.. 9.4929180
	$M - \varphi = 71\ 52\ 25.3$	
	$\varphi = 19° 22' 22''.1$	

252.—Hemos visto que el coeficiente $\frac{d\varphi}{dz}$ es sensiblemente igual á -1 ó á $+1$, según que el azimut del astro se acerque á 0° ó á 180°; y de esto se infiere que un mismo error en la distancia zenital produce errores contrarios en la latitud, según que el astro observado esté al Norte ó al Sur del zenit; y por consiguiente, que el promedio de los resultados que se obtengan observando estrellas que culmi-

nen, unas hacia el Norte y otras hacia el Sur de aquel punto, puede suponerse independiente del error mencionado. Este principio se acerca tanto más á la verdad, cuanto menor sea la diferencia de las distancias zenitales de dos estrellas que se observen de esa manera; porque parece bien comprobado que, especialmente los instrumentos de grandes dimensiones, suelen producir pequeños errores angulares cuya magnitud depende del ángulo formado por el telescopio con el horizonte, los cuales se atribuyen á una ligera flexión del tubo, originada por el peso del objetivo. Según esto, para distancias zenitales iguales, adquiere el error el mismo valor numérico, y en consecuencia quedará completamente eliminado del promedio de los resultados obtenidos por dos estrellas que culminen á la misma altura próximamente, y hacia distintos lados respecto del zenit. La misma deducción debe hacerse respecto de los errores originados por alguna inexactitud en el valor de la refracción, y en general, respecto de cualquiera causa que tienda á alterar el elemento z en una cantidad, ya sea constante ó ya variable con su magnitud.

Para terminar lo relativo á este método diremos que por ser z, δ y h los elementos del problema, quiere decir, dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, su resolución corresponde en la trigonometría á un caso dudoso; pero como siempre se sabe con suficiente aproximación cuál debe ser el valor del resultado φ, me parece inútil entrar en la discusión de las circunstancias en que haya dos soluciones ó una sola; porque siempre se sabrá cuál de los valores de φ es el que debe admitirse.

253.—Las principales condiciones favorables al método de que tratamos para determinar la latitud, se cumplen observando el astro en el momento de su paso por el meridiano. Suponiendo, pues, $h=0°$ en las fórmulas (1), resulta $M - \delta$, y designando por ζ la distancia zenital meridiana de la estrella, hallaremos cos. $(\delta - \varphi) =$ cos. ζ, ecuación que queda satisfecha para $\zeta = \delta - \varphi$ y también para $\zeta = \varphi - \delta$. Por consiguiente, observando la distancia zenital meridiana, que ya corregida por refracción, nivel, etc., he designado por ζ, se obtendrá la latitud por las sencillísimas fórmulas que siguen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Por las culminaciones al S. del zenit.........}\quad \varphi=\delta+\zeta\\ \text{Por las culminaciones al N. del zenit.........}\quad \varphi=\delta-\zeta\end{array}\right\}\text{.........}\ (2)$$

En los tránsitos inferiores de las circumpolares se tiene $h=180°$, en cuyo caso resulta por las fórmulas (1): $\tan. M=-\tan.\delta$, y por lo mismo $M=180°-\delta$, de lo cual se infiere que $\zeta=180°-(\delta+\varphi)$. Así, pues:

$$\text{Por los tránsitos sub–polares.........}\quad \varphi=180°-(\delta+\zeta)\text{..........}\ (3)$$

Estos valores se obtienen también fácilmente por medio de la consideración del lugar que ocupe el astro respecto del zenit. Sea Z (fig. 49ª) este punto, P el polo y E la intersección del ecuador y del meridiano; una estrella que culmine en a al Sur de Z, tendrá por distancia zenital meridiana $\zeta=Za$, siendo su declinación $\delta=Ea$. Por consiguiente, la latitud $\varphi=EZ$ tiene por valor $\varphi=Ea+aZ=\delta+\zeta$. La misma fórmula se aplica si culmina la estrella en a', pues aunque la figura da: $\varphi=Za'-Ea'$, como en tal caso la declinación Ea' es negativa, se tendrá siempre algebraicamente: $\varphi=\delta+\zeta$ como antes.

Si el astro culmina en b, entre el zenit y el polo, su declinación es Eb, y así es que resulta: $EZ=Eb-Zb$, ó bien $\varphi=\delta-\zeta$.

Finalmente, en el caso del tránsito inferior de una circumpolar c, puesto que $EPc=180°-\delta$, se tiene $EZ+Zc=180°-\delta$, de donde $\varphi=180°-(\delta+\zeta)$.

Este procedimiento, llamado de distancias zenitales meridianas, es independiente de la hora; pero su aplicación supone, sin embargo, muy bien conocida la cronométrica del tránsito, á fin de practicar la observación precisamente en ese instante. Por lo general, algunos segundos antes de la hora se corta la estrella con el hilo horizontal de la retícula, en el cual se mantiene por medio del movimiento del tornillo de aproximación del círculo vertical. Moviendo al mismo tiempo el del círculo horizontal, se hace de manera que en el momento del tránsito, señalado por el cronómetro, quede la estrella en la intersección de los hilos centrales, vertical y horizontal. La graduación que se obtenga, corregida por la colimación vertical, error del índice, niveles, etc., y en seguida por la refracción, suministra el valor de ζ para aplicar aquella de las fórmulas (2) y (3) que convenga al caso.

Ejemplo.—En 17 de Junio de 1857 obtuve $\zeta=29°\,47'\,25''.0$ por distancia zenital meridiana de *α Virginis*, cuya declinación era....... $\delta=10°\,25'\,4''.4$. La latitud del lugar será, en consecuencia, según esta observación:

$$\begin{array}{rl}\zeta= & 29°\,47'\,25''.0\\ \delta= & -\,10\ \ 25\ \ \ 4\ .4\\ \hline \varphi= & 19°\,22'\,20''.6\end{array}$$

Para eliminar la influencia de algún pequeño error angular, observé la misma noche al Norte del zenit la estrella *η Ursæ majoris*, que tenía por declinación $\delta=+50°\,1'\,43''.4$, habiendo obtenido $\zeta=30°\,39'\,28''.6$. El resultado de esta observación, es, por consiguiente:

$$\begin{array}{rl}\delta= & +\,50°\ \ 1'\,43''.4\\ \zeta= & 30\ \ 39\ 28\ .6\\ \hline \varphi= & 19°\,22'\,14''.8\end{array}$$

El promedio de ambos resultados será, pues: $\varphi=19°\,22'\,17''.7$, que podrá suponerse independiente del error angular, por ser casi iguales las distancias de las dos estrellas al zenit. La semidiferencia $2''.9$ representará el monto del error para $\zeta=30°$ próximamente, y sería substractivo para las indicaciones del instrumento.

254.—El método de distancias zenitales meridianas es uno de los que se emplean de preferencia en los Observatorios permanentes, sirviéndose sobre todo de los dobles tránsitos de las circumpolares; porque de esa manera resulta la latitud independiente de las declinaciones de las estrellas, y, en consecuencia, de los leves errores que puedan tener sus posiciones tabulares. Observando, en efecto, una circumpolar en su tránsito superior, se obtiene según vimos:

$$\varphi=\delta-\zeta$$

y siendo ζ' la distancia zenital en su paso subpolar, se tendrá igualmente:

$$\varphi = 180° - (\delta' + \zeta')$$

En esta ecuación he representado por δ' la declinación de la estrella, en atención á que puede diferir algo de δ, que era su valor en el paso superior, cuando entre las observaciones transcurra un tiempo considerable. La semisuma de ambos valores de φ produce:

$$\varphi = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Esta fórmula manifiesta que, en el resultado medio, sólo figura la semidiferencia de las declinaciones de la estrella, cantidad siempre muy pequeña y que se obtiene exactamente de las Efemérides, aun cuando tengan algún error los valores de δ y δ'.

La observación de los dos tránsitos también suministra la ecuación:

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta)$$

que da á conocer la declinación de la estrella, ó con más propiedad, el promedio de sus valores; pero de éste se deduce:

$$\delta = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Las ventajas de servirse de este procedimiento consisten, pues, en hallar la latitud sin necesidad de valerse de las posiciones de las estrellas determinadas en otros Observatorios, y en corregir á la vez las posiciones mismas que constan en las Tablas Astronómicas.

CAPITULO XVI.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES CIRCUNMERIDIANAS.

255.—El inconveniente que presentan las observaciones meridianas tales como antes se han expuesto, es el de no permitir la repetición de la medida de las distancias zenitales, puesto que la única que se obtiene corresponde á un instante determinado, que es el del tránsito del astro. Este inconveniente es más grave al operar con instrumentos portátiles, cuyas lecturas angulares no dan á veces la aproximación necesaria para proporcionar el valor de ζ exacto hasta los segundos en una sola observación. Por esta razón el método de distancias zenitales meridianas se emplea raras veces en las estaciones ú observatorios temporales, prefiriéndose generalmente el llamado de distancias zenitales circunmeridianas, por cuyo medio se deduce el valor de ζ de muchas observaciones del astro, ejecutadas antes y después de su paso por el meridiano. De esta manera, y en virtud del principio de que la repetición de medidas suministra siempre promedios más ó menos independientes de los pequeños errores accidentales, se tiene cierta seguridad de llegar á un valor de ζ suficientemente exacto, aun sirviéndose de instrumentos que sólo aproximen las lecturas á $10''$.

Con el fin de desarrollar el cálculo necesario para la aplicación de este método, notemos que, tratándose de un tránsito superior, la distancia zenital meridiana ζ es menor que cualquiera otra distancia