$\frac{1}{2}(\varphi+z)=$	$45^\circ\,43'\;\;3''.8$		
$\frac{1}{2}\delta=$	$44\;\;16\;\;55\;.1$		
$m=$	$89^\circ\,59'\,58''.9$	............cos.......	4.72696
$n=$	$1\;\;26\;\;\;8\;.7$	............sen......	8.39891
			3.12587
$\frac{1}{2}a=$	$1'\,20''$	cos. φ......	−9.97455
$a=$	$+\,0^\circ\;\;2\;\;40$	sen. z......	−9.97824
$A=$	$238\;\;41\;\;17$		3.17308
$u=$	$238^\circ\,43'\,57''$	sen. $\frac{1}{2}a$......	6.58654

Las circunstancias del ejemplo precedente son, sin embargo, altamente desfavorables para la aplicación de este procedimiento, á causa de hallarse la estrella muy próxima al meridiano, que es precisamente lo que debe evitarse según lo indican los coeficientes de los errores. El error de 1″ solamente en la distancia zenital, produciría en el azimut otro de más de 30″, pues el valor de su coeficiente, calculado con los datos φ, z y con el resultado a, es próximamente:

$$\frac{da}{dz}=-36$$

CAPITULO XIII.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES POR DOS ESTRELLAS.

241.—En el Capítulo II, Sección I de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*, he expuesto un procedimiento para trazar el meridiano ó para medir el azimut de una señal, en el cual procuré cumplir las condiciones favorables que indica el análisis de los Capítulos XI y XII de este libro. Consiste en observar con un altazimut dos estrellas á la misma altura, y en anotar las horas en que ambas pasan por el hilo horizontal, en el punto en que éste es cortado por el vertical del centro. Este dato, la posición de las estrellas y las graduaciones del círculo azimutal, que se obtienen inmediatamente después de apuntadas las horas cronométricas, bastan para determinar la indicación que señalaría el mismo círculo cuando el eje óptico del telescopio coincidiese con el meridiano, y en consecuencia el azimut de una señal conociendo la graduación que se obtendría al visarla.

Cuando se sabe de antemano el estado del cronómetro, se deducen desde luego, de las horas cronométricas, las siderales exactas de las observaciones, y por consiguiente los ángulos horarios de ambas estrellas, que, como veremos, entran como elemento en el cálculo que voy á desarrollar. Si no se conoce el estado del guarda-tiempo, las mismas observaciones sirven para determinarlo, aplicando el procedimiento del Capítulo VIII, de suerte que este método permite hallar simultáneamente el azimut y la hora. Para aplicarlo de esta manera, debe fijarse la alidada del círculo azimutal luego que se presente la primera estrella en el campo del telescopio, y como su movimiento aparente será oblicuo respecto de los hilos, se moverá lentamente el tornillo de aproximación á fin de que los pasos por los hilos horizontales que preceden al central, se verifiquen hacia el medio del campo; y al pasar por el hilo horizontal del centro, se hará que la estrella quede exactamente cortada por el hilo vertical del medio, paralizando entonces el movimiento del tornillo con el objeto de que permanezca el telescopio en el azimut que tenía la estrella en ese instante; porque la graduación correspondiente del círculo horizontal es uno de los datos del problema, y en consecuencia, debe leerse al terminar la observación de los pasos por los hilos restantes. Estos últimos pueden tener lugar lejos del centro, lo cual no ofrece inconveniente alguno, con tal de que se haya rectificado bien la situación exactamente horizontal de todos los hilos (número 47). En seguida se observa la segunda estrella procediendo de una manera idéntica. Es claro que durante toda la operación debe permanecer fijo el círculo vertical, á fin de cumplir la condición de igualdad de distancias zenitales.

242.—Llamando ahora a y a' los azimutes de las dos estrellas en los instantes de sus respectivos tránsitos por la intersección de los hilos centrales, tendremos las dos ecuaciones:

$$\text{sen.}\, a = \frac{\text{sen.}\, h \cos.\, \delta}{\text{sen.}\, z} \qquad \text{sen.}\, a' = \frac{\text{sen.}\, h' \cos.\, \delta'}{\text{sen.}\, z}$$

y sustituyendo estos valores en la relación:

$$\frac{\tan.\, \frac{1}{2}(a+a')}{\tan.\, \frac{1}{2}(a-a')} = \frac{\text{sen.}\, a + \text{sen.}\, a'}{\text{sen.}\, a - \text{sen.}\, a'}$$

hallaremos la siguiente:

$$\frac{\tan.\, \frac{1}{2}(a+a')}{\tan.\, \frac{1}{2}(a-a')} = \frac{\text{sen.}\, h \cos.\, \delta + \text{sen.}\, h' \cos.\, \delta'}{\text{sen.}\, h \cos.\, \delta - \text{sen.}\, h' \cos.\, \delta'}$$

Busquemos expresiones equivalentes á la semisuma y á la semidiferencia de los azimutes; siendo g y g' las graduaciones obtenidas

en el círculo horizontal, y m la indicación incógnita que daría el mismo círculo al coincidir con el meridiano el telescopio, dirigido hacia el Norte, se tiene evidentemente:

$$a = m - g \qquad a' = m - g'$$

valores que combinados por adición y substracción producen:

$$a + a' = 2m - (g+g') \qquad a - a' = g' - g$$

con lo cual nuestra ecuación adquiere la forma:

$$\frac{\tan.\, [m - \frac{1}{2}(g+g')]}{\tan.\, \frac{1}{2}(g'-g)} = \frac{\text{sen.}\, h \cos.\, \delta + \text{sen.}\, h' \cos.\, \delta'}{\text{sen.}\, h \cos.\, \delta - \text{sen.}\, h' \cos.\, \delta'}$$

Para aplicarle fácilmente el cálculo logarítmico, hagamos uso de un ángulo subsidiario x determinado por la relación:

$$\tan.\, (x - 45^\circ) = \frac{\text{sen.}\, h' \cos.\, \delta'}{\text{sen.}\, h \cos.\, \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dividiendo ahora por $\text{sen.}\, h \cos.\, \delta$ el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación precedente, y sustituyendo el de la última se obtiene:

$$\frac{\tan.\, [m - \frac{1}{2}(g+g')]}{\tan.\, \frac{1}{2}(g'-g)} = \frac{1 + \tan.\, (x - 45^\circ)}{1 - \tan.\, (x - 45^\circ)}$$

la que desarrollada y reducida produce finalmente:

$$\tan.\, [m - \tfrac{1}{2}(g+g')] = \tan.\, x \tan.\, \tfrac{1}{2}(g'-g) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Una vez calculado el ángulo auxiliar x por la fórmula (1), la (2) determina la indicación meridiana m, puesto que se conoce g y g'. Por consiguiente, si es G la lectura del círculo horizontal al visar la señal cuyo azimut u se trata de medir, tendremos:

$$u = m - G \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

243.—En todo lo anterior he supuesto que la graduación está numerada de izquierda á derecha, que es lo más común; mas si no fuere así, con facilidad se introducirán en las fórmulas las modificaciones necesarias. Las lecturas G, g y g' se suponen ya corregidas por nivel y colimación (número 52). Importa igualmente anotar las indicaciones del nivel paralelo al círculo vertical, pues aunque las pequeñas diferencias de altura no influyen sensiblemente en los valores de g y g' cuando las estrellas se observan con el mayor azimut posible, sirven para corregir las horas, según lo expuesto en el número 198 y en la aplicación del 205.

Ejemplo.—El día 1º de Diciembre de 1865 observé á la misma altura las dos estrellas siguientes, en un lugar cuya latitud es $\varphi = 22°9'$, sirviéndome de un cronómetro solar que atrasaba $0^s.6$ por hora. Las horas cronométricas, las posiciones de las estrellas y las graduaciones correctas, que se suponen suministradas por el círculo azimutal, constan á continuación:

a Tauri al Este.		*a Pegasi* al Oeste.	
$t' = 8^h41^m53^s.10$	$\alpha' = 4^h28^m15^s.56$	$t = 9^h\ 3^m17^s.10$	$\alpha = 22^h58^m\ 5^s.50$
$g' = 312°25'37''$	$\delta' = 16°14'\ 9''.1$	$g = 129°37'32''$	$\delta = 14°29^m17''.2$

Con los primeros datos se obtienen, por las fórmulas (6) del Capítulo VIII, los elementos $\theta = 43°\ 57'\ 13''.3$ y $\varepsilon = -0°\ 15'\ 48''.7$, y con ellos:

$$h = \varepsilon + \theta = +43°\ 41'\ 24''.6 \qquad h' = \varepsilon - \theta = -44°\ 13'\ 2''.0$$

Apliquemos las fórmulas (1) y (2) para determinar la graduación meridiana m, siendo $\frac{1}{2}(g+g') = 221°\ 1'\ 34''.5$ y $\frac{1}{2}(g'-g) = 91°24'2''.5$.

$$\begin{array}{lr}
\text{sen.}\,h' \ldots\ldots & 9.8434698- \\
\cos.\,\delta' \ldots\ldots & 9.9823251 \\
\text{sen.}\,h \ldots\ldots & -9.8393262 \\
\cos.\,\delta \ldots\ldots & -9.9859649 \\
\hline
\tan.(x-45°)\ldots & 0.0005038- \\
x - 45° = & 134°58'00''.4 \\
x = & 179\ 58\ 00\ .4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\tan.\,x \ldots\ldots & 6.7633025- \\
\tan.\,\frac{1}{2}(g'-g) \ldots\ldots & 1.6116929- \\
\hline
\tan.[m-\frac{1}{2}(g+g')] \ldots\ldots & 8.3749954 \\
m - \frac{1}{2}(g+g') = & +1°21'30''.4 \\
\frac{1}{2}(g+g') = & 221\ \ 1\ 34\ .5 \\
\hline
m = & 222°23'\ \ 5''
\end{array}$$

Con el valor de m se tendrá:

Azimut de *a Tauri*.................... $m - g' = -90°\ \ 2'32''$
Azimut de *a Pegasi*.................. $m - g = +92\ 45\ 33$

y suponiendo que, al visar una señal, se hubiera obtenido........... $G = 287°\ 52'\ 43''$, su azimut sería: $u = m - G = -65°\ 29'\ 38''$ del Norte al Este, ó bien $294°\ 30'\ 22''$ del Norte hacia el Oeste, en el orden de los cuadrantes.

244.—Las graduaciones meridianas m hacia el Norte, y $180° + m$ hacia el Sur, permiten también establecer una señal exactamente en el plano del meridiano, pues basta hacer que la alidada indique cualquiera de ellas, y situar la señal en coincidencia con la intersección de los hilos. Si con el círculo azimutal pueden obtenerse las lecturas aproximadas hasta los segundos, se usa desde luego el valor de m tal como resulta del cálculo; mas si no es así, se establece la alidada en la graduación más inmediata, y después de colocada provisionalmente la señal como se ha indicado, se corrige su posición como se explicó en el número 86 del Tomo I. Suponiendo, por ejemplo, que el instrumento sólo diese una aproximación de $10''$, pondríamos en nuestro caso la alidada en $222°\ 23'\ 00''$ ó en $222°\ 23'\ 10''$, y la señal establecida en esa dirección á la distancia k del telescopio, se movería en seguida la cantidad $5\,k\,\text{sen.}\,1''$ hacia la derecha del observador en el primer caso, y hacia su izquierda en el segundo.

245.—Cuando se observa una sola estrella á la misma altura, tanto al Este como al Oeste del meridiano, se tiene $\delta = \delta'$, y sus ángulos horarios serán iguales numéricamente y de signos contrarios, por lo que la ecuación (1) dará:

$$\tan.(x - 45°) = -1$$

relación que corresponde á $x = 0°$ ó á $x = 180°$. En ambos casos se tiene $\tan.\,x = 0$, y por consiguiente la fórmula (2) produce.

$$m = \frac{1}{2}(g + g')$$

Este resultado demuestra que la graduación meridiana es entonces igual al término medio de las dos lecturas del círculo azimutal. Se recordará que este fué uno de los métodos para trazar el meridiano que expuse en la Topografía, y si bien es el más sencillo por no demandar casi cálculo alguno, tiene el inconveniente de exigir el transcurso de varias horas para terminar la operación, al menos si se desea observar la estrella en las mejores condiciones posibles.

CAPITULO XIV.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DEL SOL.

246.—Si se observa el sol á la misma altura de un lado y otro del meridiano, de manera que á la vez que su limbo superior ó su limbo inferior toquen alguno de los hilos horizontales, el borde boreal ó el austral sean tangentes al hilo vertical del centro, se podrá también determinar la graduación meridiana m en función de las lecturas g' y g del círculo azimutal y del ángulo horario del astro, obtenido por la semidiferencia de las horas cronométricas correspondientes.

Considerado este método como caso particular del que he expuesto en el Capítulo precedente, sería fácil derivar de las fórmulas que allí se establecieron, las que deben aplicarse á las observaciones del sol; pero es tal vez más sencillo desarrollarlas directamente de este modo. Llamando a el valor numérico del azimut del centro del sol en el instante de la observación antemeridiana, y $a + \Delta a$ el que tiene á la hora de la postmeridiana, consideraré á Δa como la variación originada por el cambio de declinación del astro; porque si esta coordenada fuera constante, ambos azimutes serían numéricamente iguales, como en el caso de una estrella. Representando, pues, por δ' y δ las declinaciones del sol en los mismos instantes, tendremos $\Delta\delta = \delta - \delta'$, y por consiguiente:

$$\Delta a = \frac{da}{d\delta} \Delta\delta$$