tránsito (número 133), de la que se deduce la aproximativa cronométrica para proceder como se ha explicado.

En cuanto á la distancia zenital que tiene que señalar el pequeño círculo del telescopio, para que se presente cada estrella en el campo, se tendrá que llamando φ la latitud y δ la declinación aproximativa del astro, si φ es mayor que δ culminará la estrella al Sur del zenit, y si φ es menor que δ pasará al Norte. Como en uno y otro caso la distancia zenital meridiana es igual á la diferencia de φ y δ, tendremos:

Al Sur del zenit.................... $\zeta = \varphi - \delta$
Al Norte del zenit.................. $\zeta = \delta - \varphi$

Respecto de los pasos subpolares, la distancia zenital meridiana tiene por expresión: $\zeta = 180° - (\varphi + \delta)$.

Estos ángulos ó sus complementos, según que el círculo de distancias zenitales ó alturas, son los que ha de señalar el vernier para fijar el telescopio en la posición conveniente. Es claro que basta hacer uso de valores aproximativos de φ y δ, siendo más que suficiente la aproximación de 1′ ó 2′ para el caso.

CAPITULO XI.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT DE UNA SEÑAL.—MÉTODO DE DISTANCIAS ANGULARES ENTRE LA SEÑAL Y UNA ESTRELLA CONOCIENDO LA HORA DE LA OBSERVACIÓN.

231.—En los cuatro Capítulos que preceden he dado á conocer los principales procedimientos para obtener la corrección de un cronómetro en un instante cualquiera. Este elemento y la marcha diaria del instrumento permiten al astrónomo designar la hora exacta que corresponde á cualquiera indicación de su guarda-tiempo, según se ha visto en el número 187. Por consiguiente, siempre que observe un astro cuya posición sea conocida, anotando la hora cronométrica de la observación, podrá deducir en seguida la hora exacta, y por último, el ángulo horario del astro en el mismo instante, puesto que es un elemento que se compone de la ascensión recta de la estrella y de la hora sideral de la observación (número 121).

Establecido lo anterior, supongamos colocada una señal luminosa en el punto cuyo azimut se trate de determinar, y que el observador, por medio de un altazimut ó de un teodolito, mida el angulo horizontal comprendido entre la señal y una estrella. Si cada vez que dirige su visual á la estrella, anota la hora cronométrica en el momento en que queda cortada por la intersección de los hilos, es claro que reunirá los datos necesarios para calcular después el azimut del astro en el instante de cada observación, á saber: la latitud φ del lugar, la declinación δ del astro y su ángulo horario h. Llamando a el resultado del cálculo y A el ángulo medido, el azimut de la señal será: $u = A + a$.

Toda la parte astronómica de la operación queda, pues, reducida al cálculo del azimut a de la estrella, para lo cual se han establecido en el número 125 las fórmulas:

$$\tan. M = \frac{\tan.\delta}{\cos. h} \qquad \tan. a = \frac{\tan. h \cos. M}{\mathrm{sen.}(M - \varphi)} \;\ldots\ldots\; (1)$$

232.—Con el fin de investigar las condiciones más favorables á la observación, analicemos la ecuación de que provienen las anteriores, que es:

$$\tan. a = \frac{\mathrm{sen.}\, h}{\cos.\varphi \tan.\delta - \mathrm{sen.}\varphi \cos. h} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Suponiendo pequeños errores en todos los datos del problema, consideraré como una función de éstos al que necesariamente resulta en a, á saber:

$$\Delta a = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}h}\Delta h + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi}\Delta\varphi + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta}\Delta\delta$$

y diferenciando la ecuación anterior con relación á los tres elementos h, φ y δ sucesivamente, se obtendrá con facilidad:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{2}(\cot. h - \mathrm{sen.}\varphi \tan. a)\,\mathrm{sen.}\,2a$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\tan.\delta\, \mathrm{sen.}\varphi + \cos. h \cos.\varphi)\,\mathrm{sen.}^2 a}{\mathrm{sen.}\, h}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta} = -\frac{\cos.\varphi\, \mathrm{sen.}^2 a}{\mathrm{sen.} h \cos.^2\delta}$$

Por estos coeficientes de los errores, se ve que el primero se nulifica cuando el triángulo astronómico ZPA (fig. 49ª) es rectángulo en la estrella A, porque entonces se tiene: sen. φ cot. h cot. a, ó bien: sen. φ tan. $a = \cot. h$. En consecuencia, un pequeño error en la hora, no influye en el resultado siempre que se observe una estrella en los

momentos de su *mayor elongación*, quiere decir, en los de su mayor distancia angular al meridiano, que es cuando el plano vertical es tangente á su círculo de declinación. Esta condición demanda que δ sea mayor que φ, según consta en el número 180.

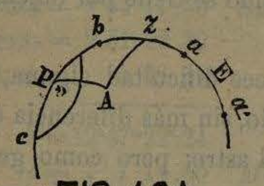

FIG. 49A

El mismo coeficiente indica que la influencia de Δh disminuye en general con el azimut, de suerte que una circumpolar cerca de su elongación reune las mejores circunstancias para la determinación del azimut, siempre que no se tenga entera confianza en el estado del cronómetro.

El segundo coeficiente, que es el que mide la influencia de un pequeño error en la latitud, disminuye con el azimut y con el aumento del ángulo horario. Sustituyendo por sen. h su valor $\frac{\mathrm{sen.}\, a\, \mathrm{sen.}\, z}{\cos.\delta}$, puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{d\,a}{d\,\varphi} = \frac{(\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{sen.}\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos. h)\,\mathrm{sen.}\, a}{\mathrm{sen.}\, z} = \frac{\mathrm{sen.}\, a}{\tan.\, z}$$

que manifiesta la conveniencia de que siendo pequeño el azimut, sea grande la distancia zenital; condiciones que también llenan perfectamente las circumpolares, especialmente en nuestras bajas latitudes.

El coeficiente de $\Delta\delta$ se puede escribir de la manera siguiente, introduciendo la relación $\frac{\mathrm{sen.}\, h}{\mathrm{sen.}\, z}$ en vez de $\frac{\mathrm{sen.}\, a}{\cos.\delta}$:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta} = -\frac{\cos.\varphi\, \mathrm{sen.}\, a}{\mathrm{sen.}\, z \cos.\delta}$$

valor que es nulo con a, y que en general disminuye á medida que aumenta la distancia del astro al zenit; circunstancia á que se prestan muy bien las circumpolares en nuestro país.

También debe anotarse que los efectos de $\Delta\varphi$ cambian de signo de un lado á otro del meridiano; y que, por consiguiente, el promedio de dos observaciones de una misma estrella al Oriente y al Occidente suministrará un resultado sensiblemente independiente de aquel error, si se procura practicarlas cuando los respectivos ángulos horarios sean casi iguales numéricamente. Aunque no con todo rigor, puede decirse lo mismo de dos estrellas diferentes, con tal que no sean muy desiguales sus declinaciones.

Este breve análisis recomienda, pues, bajo todos aspectos la elección de las estrellas inmediatas al polo cuando se tiene por objeto la determinación del azimut de una señal.

233.—La práctica de la operación no ofrece dificultad alguna, reduciéndose á la medida común de un ángulo, sin más diferencia que la de anotar la hora cada vez que se vise el astro; pero como generalmente tiene este cierta altura sobre el horizonte, es preciso tomar en cuenta el error de colimación para corregir las lecturas del instrumento angular, y sobre todo, las indicaciones del nivel montante, con el fin de hacer correcciones análogas por la inclinación del eje, según se ha visto en el número 50 y siguientes, donde se dijo también que la observación en dos posiciones inversas del teodolito ó del altazimut, elimina casi del todo los errores.

Presentemos el siguiente ejemplo de un azimut determinado por observaciones de α *Ursæ minoris* (estrella polar). El 4 de Mayo de 1860 en el extremo occidental de la base para la triangulación del Valle de México, medí los ángulos A, que van á continuación, entre la polar y la señal luminosa colocada en el extremo oriental, los cuales están contados partiendo de la señal y *de izquierda á derecha.*

Angulos entre la señal y la estrella.		Horas del cronómetro.
238° 33′ 50″.0	....	$9^h 50^m 28^s.5$
„ 35 1 .7	....	„ 53 55 .0
„ 36 5 .0	....	„ 56 38 .0
„ 37 21 .7	....	„ 59 41 .5
„ 38 10 .0	....	10 1 52 .5
A = 238° 36′ 5″.7	.........Promedios............	$9^h 56^m 31^s.1$

El cronómetro era solar, y á la hora de la observación tenía $2^m 13^s.6$ de adelanto. La latitud de la estación es $\varphi = 19° 25' 23''$, y la posición de la estrella era aquella noche: $\alpha = 1^h 7^m 14^s.50$ y

$$\delta = +88° 33' 50''.3$$

Haciendo el cálculo de las fórmulas (1) con los promedios de las observaciones, tendremos:

$t = 9^h 56^m 31^s.1$	tan. δ 1.6008688	tan. h........ 8.9390907−
$\Delta t = -\ 2\ 13.6$	cos. h −9.9983658−	cos. M....... 8.3973623−
		sen. $(M-\varphi)$ −9.9782250
Hora media = $9^h 54^m 17^s.50$	tan. M 1.6025030−	
As. recta = 2 51 26 .80		tan. a........ 7.3582280
Acel. = 1 38 .04	$M = 91° 25' 50''.3$	
	$\varphi = 19\ 25\ 23\ .0$	$a = +\ 0°\ 7' 50''.6$
$T = 12^h 47^m 22^s.24$		$A =$ 238 36 5 .7
$\alpha = 1\ 7\ 14.50$	$M - \varphi = 72° 00' 27''.3$	
		$u =$ 238° 43′ 56″.3
$h = \begin{cases} +11^h 40^m\ 7^s.84 \\ +175° 1' 57''.6 \end{cases}$		

234.—Con el fin de eliminar la influencia de la pequeña inclinación que pudiera tener el eje de rotación del telescopio, no obstante haberse rectificado cuidadosamente, lo mismo que la colimación, tomé pocos minutos después la siguiente serie en la posición inversa del instrumento:

Angulos entre la señal y la estrella		Horas del cronómetro.
238° 43′ 56″.7	....	$10^h 15^m 59^s.0$
„ 45 3 .3	....	„ 19 8 .5
„ 46 21 .7	....	„ 22 14 .5
„ 47 56 .7	....	„ 26 15 .0
„ 49 3 .3	....	„ 28 55 .5
A = 238° 46′ 28″.3	.........Promedios.........	$10^h 22^m 30^s.5$

La variación del cronómetro, muy pequeña en 24^h, no era apreciable en el corto intervalo transcurrido entre ambas series, de modo que emplearé el mismo valor de Δt al desarrollar el cálculo, lo cual juzgo útil para que se vea el diverso juego de signos que, respecto de la primera, tiene esta nueva serie. En efecto, como las observaciones tuvieron lugar en los momentos del tránsito inferior de la polar, en la segunda serie estaba ya la estrella al Este del meridiano.

$t=10^h22^m30^s.5$	$\tan.\delta$ 1.6008688	$\tan.h$......... 8.4312624
$\Delta t=-\ 2\ 13.6$	$\cos.h$ −9.9998416−	$\cos.M$......... 8.3988350−
		$\text{sen.}(M-\varphi)$. 9.9782370
Hora media $=10^h20^m16^s.90$	$\tan.M$ 1.6010272−	
As. recta $=\ 2\ 51\ 26.80$		$\tan.a$......... 6.8518604−
Acel. $=\ 1\ 41.90$	$M=91°26'\ 7''.8$	
	$\varphi=19\ 25\ 23.0$	$a=-0°\ 2'26''.5$
$T=13^h13^m25^s.60$		$A=238\ 46\ 28.3$
$a=1\ 7\ 14.50$	$M-\varphi=72°00'44''.8$	
		$u=238°44'\ 1''.8$

$$h=\begin{cases}-11^h53^m48^s.90\\-178°27'13''.5\end{cases}$$

El término medio de los dos resultados es, pues, $u=238°43'59''.0$, y su semidiferencia $2''.7$ puede considerarse como el efecto de los pequeños errores mencionados y de los de observación. El promedio final, obtenido por seis noches de trabajo, dió $u=238°43'58''.2$ por azimut de la extremidad oriental de la base.

235.—En las precedentes aplicaciones se han tomado por datos los promedios de las series de observaciones, práctica justificada por el hecho de haberse ejecutado éstas en los momentos del paso de la estrella. En efecto, siempre que h contado desde el tránsito más inmediato, y por consiguiente a, sean bastante pequeños para que sin error de importancia puedan tomarse los arcos por sus senos ó tangentes y la unidad por sus cosenos, la ecuación (2) será en segundos:

$$a=\frac{h}{\cos.\varphi\tan.\delta-\text{sen.}\varphi}$$

y multiplicando numerador y denominador por $\cos.\delta$, da:

$$a=\frac{h\cos.\delta}{\text{sen.}(\delta-\varphi)}$$

Como el factor $\frac{\cos.\delta}{\text{sen.}(\delta-\varphi)}$ es constante para cada estrella en determinada latitud, se infiere que muy cerca del meridiano el movimiento azimutal es proporcional al tiempo. Por esta razón hice uso de los términos medios, puesto que el de las horas corresponderá al de los ángulos medidos.

El mismo principio sirve de fundamento á un método muy sencillo para medir el azimut de una señal, el que casi no demanda más cálculo que el de la hora cronométrica de la culminación de la estrella. Tomando cerca de esa hora dos ó más ángulos entre la estrella y la señal, se hallará por una simple proporción el azimut que tenía la primera en uno de los instantes de la observación, comparando al efecto la variación de los ángulos con el tiempo transcurrido. Nuestras dos series, por ejemplo, suministran los siguientes datos:

Angulos medidos.	Horas cronométricas.
$A=238°36'\ 5''.7$	$t=\ 9^h56^m31^s.1$
$A'=238\ 46\ 28.3$	$t'=10\ 22\ 30.5$
$A-A'=\ -10'22''.6=-622''.6$	$t'-t=+\ 25^m59^s.4=+1559^s.4$

La relación $\frac{A-A'}{t'-t}$ expresa el aumento del azimut en la unidad de tiempo; y así llamando θ la hora cronométrica del tránsito y a el azimut de la estrella á la hora t se tendrá:

$$t'-t:A-A'::t-\theta:a=\frac{A-A'}{t'-t}(t-\theta)$$

Para aplicar este procedimiento á los datos precedentes, calculando la hora media correspondiente á $12^h+\alpha=13^h7^m14^s.5$ por tratarse de un tránsito sub-polar, se halla: $M=10^h14^m6^s.8$; y como el cronómetro tenía $2^m13^s.6$ de adelanto, su indicación en ese instante debió ser $\theta=10^h\ 16^m20^s.4$. Tendremos:

$$t-\theta=-19^m49^s.3=-1189^s.3,$$

y en consecuencia:

$$a=\frac{622.6\times1189.3}{1559.4}=+0°\ 7'\ 54''.8$$

El azimut de la señal será $A+a=238°\ 44'\ 00''.5$, que sólo difiere $1''.5$ del promedio obtenido por el cálculo de las ecucciones (1). Este método me parece, por tanto, muy aceptable, sobre todo, si se aplica á una estrella de declinación considerable y que culmine á poca altura sobre el horizonte, pues ambas circunstancias contribuyen á que tenga menor influencia un pequeño error en la hora.

236.—Aunque las fórmulas (1) son enteramente generales y fácilmente aplicables á un astro cualquiera, algunos astrónomos prefieren el cálculo de una serie cuando se trata de una estrella circumpolar cuya distancia al polo no exceda de 2° ó 3°. Llamando d la distancia polar, complemento de la declinación, la fórmula (2) puede escribirse así:

$$\tan.\, a = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi \cot.\, d - \text{sen.}\, \varphi \cos.\, h}$$

y considerando al azimut a como una función de d, la supondré desarrollada respecto de las potencias de esta cantidad, á saber:

$$a = Md + Nd^2 + Pd^3 + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

siendo M, N, P, etc., los coeficientes que deben determinarse en función de los elementos conocidos h y φ. Con este objeto sustituyamos en el valor de tan. a el desarrollo de cot. d, que es:

$$\cot.\, d = \frac{1}{d} - \frac{1}{3}d - \frac{1}{45}d^3 - \text{etc.},$$

y multiplicando después por d el numerador y el denominador, hallarémos, no apreciando más que hasta los términos de tercer órden:

$$\tan.\, a = \frac{d\,\text{sen.}\, h}{(1 - \frac{1}{3}d^2)\cos.\, \varphi - d\,\text{sen.}\, \varphi \cos.\, h}$$

Se tiene, además: $\tan.\, a = a + \frac{1}{3}a^3 + \ldots\ldots$ que atendiendo á la relación (3), será:

$$\tan.\, a = Md + Nd^2 + (P + \tfrac{1}{3}M^3)\, d^3$$

Igualando este valor con el precedente y quitando el denominador, se encuentra:

$$\left.\begin{array}{l} (M\cos.\, \varphi - \text{sen.}\, h)\, d + (N\cos.\, \varphi - M\text{sen.}\, \varphi \cos.\, h)\, d^2 \\ + (P\cos.\, \varphi + \frac{1}{3}M^3 \cos.\, \varphi - \frac{1}{3}M\cos.\, \varphi - N\text{sen.}\, \varphi \cos.\, h)\, d^3 \end{array}\right\} = 0$$

ecuación en la que debiendo ser nulos separadamente los coeficientes de las diversas potencias de d, suministrará las relaciones siguientes para la determinación de M N y P:

$$\begin{array}{l} M\cos.\, \varphi - \text{sen.}\, h = 0 \\ N - M\tan.\, \varphi \cos.\, h = 0 \\ P + \frac{1}{3}M^3 - \frac{1}{3}M - N\tan.\, \varphi \cos.\, h = 0 \end{array}$$

De la primera resulta:

$$M = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi}$$

Sustituyendo este valor en la segunda, se tiene:

$$N = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi} \tan.\, \varphi \cos.\, h$$

y con los de M y N la última produce:

$$P = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi} \tan.^2 \varphi \cos.^2 h + \frac{1}{3}\, \frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi}\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 h}{\cos.^2 \varphi}\right)$$

Expresando ahora en segundos los pequeños ángulos a y d, la ecuación (3) da finalmente:

$$a = d\,\frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi}\left[\begin{array}{c} 1 + d\tan.\, \varphi \cos.\, h\,\text{sen.}\, 1'' + (d\tan.\, \varphi \cos.\, h\,\text{sen.}\, 1'')^2 \\ + \frac{1}{3}d^2\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 h}{\cos.^2 \varphi}\right)\text{sen.}^2\, 1'' \end{array}\right] \ldots\ldots \quad (4)$$

Apliquemos esta fórmula á nuestro ejemplo tomando los promedios de las dos series de observaciones, á saber:

$$A = 238°\, 41'\, 17'' \qquad h = 178°\, 17'\, 22''$$

y no apreciando más que hasta los términos de segundo órden, esto es:

$$a = d\,\frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi} + d\,\frac{\text{sen.}\, h}{\cos.\, \varphi}\, d\tan.\, \varphi \cos.\, h\,\text{sen.}\, 1''$$

La distancia polar de la estrella es $d = 90° - \delta = 1° 26' 9''.7 = 5169''.7$; y por consiguiente tendremos:

d............	3.71347.............		3.7135	Primer término......	$+2' 43''.6$
sen. h........	8.47495	cos. h.....	9.9998—	Segundo „	— 1 .4
cos. φ........	—9.97455	tan. φ....	9.5473		
		sen. 1''...	4.6856		$a = +0°\ 2' 42''.2$
	2.21387.............		2.2139		$A = 238\ 41\ 17\ .0$
	$+163''.6$		0.1601—		$u = 238° 43' 59''.2$
			$-1''.4$		

237.—Para medir un azimut por observaciones de una estrella cuando dista bastante del meridiano, se procede como se ha explicado, con la diferencia de que no pudiéndose suponer entonces las variaciones del azimut proporcionales al tiempo, tampoco debe aplicarse la ecuación (1) con los promedios de las observaciones, sino que es mejor calcular separadamente cada una de ellas. Esto no obstante, en los momentos de la mayor elongación de las circumpolares su movimiento azimutal es sensiblemente nulo, de manera que se pueden tomar varios ángulos entre la señal y la estrella y calcular después el azimut máximo de ésta por la ecuación:

$$\text{sen.}\, a = \frac{\cos.\, \delta}{\cos.\, \varphi} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

sin referencia alguna á la hora. Para que este procedimiento dé, sin embargo, la exactitud necesaria, es indispensable emplear poco tiempo en las observaciones, procurando que el instante medio de la serie sea casi el de la mayor elongación, cuya hora puede obtenerse por la fórmula:

$$\cos.\, h = \tan.\, \varphi \cot.\, \delta \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Calculando, pues, con este valor de h la hora cronométrica de la elongación, se principiará 5^m ó 6^m antes á medir el ángulo entre la estrella y la señal, para terminar también 5^m ó 6^m después. De este modo no es necesario anotar los instantes de las observaciones, puesto que la relación (5) es independiente del ángulo horario de la estrella; pero sí es útil para procurar que el promedio de las horas corresponda á la de la elongación.

Cuando es posible observar así los ángulos que forman la señal con la estrella tanto en la elongación oriental como en la occidental, es evidente que el azimut de la primera será igual al término medio de los dos ángulos, por ser el de la estrella numéricamente igual á un lado y otro del meridiano. En general, siendo g y g' las lecturas del círculo azimutal cuando se visa la estrella en los momentos de sus elongaciones occidental y oriental respectivamente, la graduación meridiana, ó sea la que tendría lugar cuando el telescopio coin-

cidiese con el meridiano, será $m = \frac{1}{2}(g+g')$, puesto que el arco $g'-g$ representa el doble del azimut correspondiente á la elongación. Por consiguiente, siempre que se tenga confianza en la estabilidad del instrumento durante las 12 horas que próximamente transcurren entre las dos elongaciones, el método anterior sirve muy bien para determinar el meridiano astronómico; y designando por G la indicación del círculo al visar la señal, la diferencia $u = m - G$ da desde luego el azimut de ésta.

El procedimiento que acaba de trazarse deja de ser recomendable cuando la serie de observaciones dura más tiempo del que se ha indicado, ó cuando la estrella no es de las más inmediatas al polo. El método general que voy ahora á trazar es aplicable á cualesquiera estrellas circumpolares, y permite reducir al instante mismo de la elongación los ángulos que se midan entre ellas y una señal terrestre, aun cuando estas observaciones tengan lugar en momentos bastante distantes del de la mayor digresión.

Sean a el azimut máximo de la estrella y h el ángulo horario correspondiente, calculados por las fórmulas (5) y (6). El azimut que tiene la circumpolar en el instante t' en que se mide el ángulo entre su plano vertical y el de una señal terrestre, será a', calculado por la ecuación

$$\tan.\,(a-x) = \frac{\text{sen.}\,(h-\theta)}{\cos.\,\varphi \tan.\,\delta - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,(h-\theta)}$$

en la que he representado por $x = a - a'$ la variación de azimut debida al intervalo de tiempo sideral $\theta = h - h' = t - t'$, transcurrido entre la hora t de la mayor elongación y la t' de la observación. De ella resulta, atendiendo á que

$$\text{sen.}\,\varphi = \cot.\,a \cot.\,h = \frac{\cot.\,a \tan.\,\varphi \cot.\,\delta}{\text{sen.}\,h}$$

la siguiente:

$$\tan.\,x = \frac{\tan.\,a \cos.\,\varphi \tan.\,\delta - \cot.\,h \cos.\,(h-\theta) - \text{sen.}\,(h-\theta)}{\cos.\,\varphi \tan.\,\delta + \tan.\,a\, \text{sen.}\,(h-\theta) - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,(h-\theta)}$$

Si multiplicamos por sen. h los dos términos del segundo miembro, lo cual reduce á 1 el primer término del numerador, y hacemos en seguida el desarrollo de sen. $(h-\theta)$ y cos. $(h-\theta)$, se halla sin dificultad:

$$\tan.x=\frac{1-\cos.\theta}{\cot.a+m\cos.\theta-n\,\text{sen}.\theta}$$

siendo:

$$m=\tan.a\,\text{sen.}^2h-\cot.a\cos.^2h=\frac{\text{sen.}^2h}{\text{sen}.a\cos.a}-\cot.u$$

$$n=(\tan.a+\cot.a)\,\text{sen}.h\cos.h=\frac{\text{sen}.h\cos.h}{\text{sen}.a\cos.a}$$

Como el intervalo θ nunca es demasiado considerable, puede expresarse en serie la ecuación anterior. Desarrollando el seno y el coseno de este arco hasta los términos de tercer orden, se tendrá desde luego:

$$\tan.x=\frac{\frac{1}{2}\theta^2}{m+\cot.a-n\theta-\frac{1}{2}m\theta^2+\frac{1}{6}n\theta^3}$$

y considerando á x como una función de θ, en la que no puede haber término alguno independiente de esta cantidad, supondremos:

$$x=A\theta+B\theta^2+C\theta^3$$

En consecuencia, deberá tenerse, limitando siempre la aproximación hasta los términos de tercer orden:

$$\tan.x=A\theta+B\theta^2+(C+\tfrac{1}{3}A^3)\theta^3$$

Igualando los dos valores de tan. x y haciendo las reducciones necesarias, se hallará:

$$\left.\begin{array}{l} A(m+\cot.a)\theta+[B(m+\cot.a)-An-\frac{1}{2}]\theta^2 \\ +[(C+\frac{1}{3}A^3)(m+\cot.a)-Bn-\frac{1}{2}Am]\theta^3 \end{array}\right\}=0$$

y por la nulificación de cada término se tendrá por lo mismo:

$$A=0$$

$$B=\frac{1}{2(m+\cot.a)}=\frac{\text{sen}.a\cos.a}{2\text{sen.}^2h}=\frac{\text{sen}.2\delta}{4\cos.\varphi\,\text{sen}.h}$$

$$C=\frac{n}{2(m+\cot.a)^2}=\frac{\text{sen}.a\cos.a\cot.h}{2\text{sen.}^2h}=\frac{\text{sen}.2\delta\cot.h}{4\cos.\varphi\,\text{sen}.h}$$

Sustituyendo estos valores en el de x, y expresándolo en segundos de arco, así como el de θ en segundos de tiempo sideral, se halla por último:

$$x=(6.43570)\frac{\text{sen}.2\delta}{\cos.\varphi\,\text{sen}.h}(t-t')^2+(2.2974)\frac{\text{sen}.2\delta\cot.h}{\cos.\varphi\,\text{sen}.h}(t-t')^3\ \ldots\ldots\ (7)$$

Las cantidades numéricas expresan los logaritmos de las constantes

$$\tfrac{1}{4}(15)^2\,\text{sen}.1'' \quad \text{y} \quad \tfrac{1}{4}(15)^3\,\text{sen.}^2 1''$$

Como lo habíamos indicado, se ve que esta fórmula reduce á la hora precisa de la mayor digresión las observaciones hechas poco antes ó poco después de ese instante. Cuando se calcula cada observación en particular con el valor correspondiente de $t-t'$, se tiene la ventaja de poder examinar la mayor ó menor concordancia de los resultados individuales; pero también puede hacerse el cálculo empleando los promedios de $(t'-t)^2$ y de $(t-t')^3$, y se obtiene así la corrección que debe hacerse al término medio de los ángulos medidos entre la señal y la estrella, para determinar el que se habría hallado en el momento mismo de la elongación. De un modo ó de otro, siendo A el ángulo, ya corregido por los errores de nivel y colimación (número 52), será $A-x$ el que habría resultado en el momento de la digresión, y por consiguiente, $A-x+a$ el azimut de la señal.

Supongamos que á la latitud $\varphi=19°\,26'\,00''$ se hubiera medido el ángulo $A=149°\,53'\,29''$ entre la señal luminosa de una estación terrestre y una estrella cuya declinación fuese $\delta=73°\,15'\,30''$; y que se hubiera visado la estrella $18^m\,36^s$ de tiempo sideral *antes* del instante de su máxima elongación *oriental*. Se desea saber cuál es el azimut de la señal.

Las fórmulas (5) y (6) dan $a=-17°\,47'\,8''.8$ y $h=-83°\,54'\,28''.3$, á los que asignamos el signo negativo por estar la estrella al Este del meridiano. El valor de $t-t'=1116^s$ será positivo por haberse observado antes de la elongación.

Tendremos, pues:

		cot. h......	9.0283−	Primer término.	$-0^\circ\ 3'19''.84$
const......	6.43570	const......	2.2974	Segundo „	$+\quad 1.73$
sen. 2δ...	9.74170	....	9.7417		
$(t-t')^2$..	6.09533	$(t-t')^3$...	9.1430+	$x=$	$-\ 0^\circ\ 3'18''.1$
				$A=$	$149\ 53\ 29.0$
	2.27273		0.2104−		
cos. φ...	−9.97452	....	−9.9745	$A-x=$	$149^\circ 56' 47''.1$
sen. h...	−9.99754−	....	−9.9975−	$a=$	$-\ 17\ 47\ 8.8$
	2.30067−		0.2384+	$u=$	$132^\circ\ 9'38''.3$

El ejemplo precedente manifiesta la pequeñez del segundo término de la serie (7), no obstante el valor considerable de $t-t'$, y el de δ relativamente pequeño para una circumpolar. Esto indica que en muchos casos, sobre todo, cuando $t-t'$ es sólo de unos cuantos minutos, puede limitarse el cálculo únicamente al primer término, consideración que también se expresa diciendo que en los momentos de las elongaciones de las circumpolares, sus cambios de azimut son proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

Por otra parte, para cada latitud y cada declinación es fácil asignar el límite de $t-t'$ para que la omisión del segundo término de la serie no produzca un error mayor que una cantidad dada f. Eliminando á este fin á h en ese término por medio de la relación (6) y representando por c la constante, se tiene:

$$f=c\,\frac{\text{sen.}\,2\delta\,\text{tan.}\,\varphi\,\text{cot.}\,\delta}{\text{cos.}\,\varphi\,(1-\text{tan.}^2\varphi\,\text{cot.}^2\delta)}\,(t-t')^3=c\,\frac{\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}^2\,2\delta}{2\,\text{sen.}\,(\delta+\varphi)\,\text{sen.}\,(\delta-\varphi)}\,(t-t')^3$$

y finalmente en minutos de tiempo:

$$t-t'=(0.8897)\sqrt[3]{f\,\frac{\text{sen.}\,(\delta+\varphi)\,\text{sen.}\,(\delta-\varphi)}{\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}^2\,2\delta}}$$

El valor de f se asigna conforme á la aproximación que dé el instrumento que se emplee. Aun con los mejores aparatos astronómicos no se puede responder, en rigor, de la apreciación de $0''.5$; de suerte que dando á f este valor y calculando la fórmula con los datos del ejemplo precedente, se halla: $t-t'=12^m.3$. Por consiguiente, en la misma latitud podría haberse observado la estrella desde 12^m antes hasta 12^m después de la hora de la elongación, esto es: durante 24 minutos, sin que la omisión del segundo término de la serie hubiera producido un error superior á $0''.5$. A medida que crece δ es también mayor el límite de $t-t'$, siempre en igualdad de latitud; y así, por ejemplo, para $\varphi=19^\circ\ 26'$ y suponiendo de $88^\circ 40'$ la declinación de la Polar, nuestra fórmula da $t-t'=66^m$, resultado que asigna más de dos horas por intervalo en que las variaciones azimutales de la estrella polar son sensiblemente proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

Ya sea que por el método que precede se reduzcan al instante preciso de la máxima elongación las observaciones ejecutadas poco antes ó poco después, ó ya que se observen las estrellas en aquel momento mismo, se puede medir también el azimut de una señal, ó determinar la graduación meridiana m del instrumento, combinando dos estrellas que lleguen á sus mayores digresiones con muy poca diferencia de tiempo. Siendo en efecto, d y d' las distancias polares de las dos estrellas, complementos de sus declinaciones, y a y a' sus azimutes máximos, la ecuación (5) dará:

$$\frac{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,a'}{\text{sen.}\,a-\text{sen.}\,a'}=\frac{\text{sen.}\,d+\text{sen.}\,d'}{\text{sen.}\,d-\text{sen.}\,d'}$$

que equivale á la relación:

$$\frac{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(a+a')}{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(a-a')}=\frac{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d+d')}{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d-d')}$$

Si designamos, como antes, por g y g' las lecturas del círculo azimutal al visar las estrellas, después de hechas todas las correcciones, y por m la graduación incógnita que se obtendría cuando el eje óptico del telescopio estuviese en el meridiano, tendremos:

$$a=m-g \qquad a'=m-g'$$

y por tanto:

$$a+a'=2m-(g+g') \qquad a-a'=g'-g$$

Sustituyendo en la relación anterior resulta:

$$\text{tan.}\,[m-\tfrac{1}{2}(g+g')]=\frac{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d+d')}{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d-d')}\,\text{tan.}\,\tfrac{1}{2}(g'-g)\ \text{.........(8)}$$

ecuación que determina la indicación meridiana m.

Debemos advertir que supusimos la numeración del instrumento creciendo de izquierda á derecha, como es habitualmente el caso. Por consiguiente, el primer miembro de nuestra ecuación será positivo ó negativo, esto es, m será mayor ó menor que $\frac{1}{2}(g+g')$ según que las dos estrellas se hayan observado al Oeste ó al Este del meridiano. Cuando se combine la digresión oriental de la una con la occidental de la otra, el signo del primer miembro será el mismo que tenga la digresión que sea numéricamente mayor. Todo esto resulta sin dificultad del juego de los signos de las líneas trigonométricas contenidas en el segundo miembro; pero es importante notar que en el último caso que hemos considerado, como $g'-g$ representa siempre la diferencia algebraica de ambos azimutes máximos, es claro que cuando estos sean de distintos signos representará su suma numérica; y por consiguiente el arco $\frac{1}{2}(g+g')$ equivaldrá á su semidiferencia también numérica. De esta consideración se deduce que debe invertirse entonces la relación de que partimos, lo cual equivale á invertir la fracción que figura en el segundo miembro. Así, pues, en el caso de haberse combinado una elongación oriental con otra occidental, se tendrá:

$$\tan.[m-\tfrac{1}{2}(g+g')]=\frac{\tan.\frac{1}{2}(d-d')}{\tan.\frac{1}{2}(d+d')}\tan.\tfrac{1}{2}(g'-g) \quad \ldots\ldots\ (9)$$

Con el fin de facilitar la elección de estrellas para todas estas combinaciones, he preparado la tabla que sigue para la latitud $\varphi=19°26'$ de la ciudad de México (¹). Contiene las horas siderales de las digresiones oriental y occidental de 20 estrellas cuyas distancias polares no exceden de 30°; y se han añadido, además, sus distancias zenitales y sus azimutes máximos para hallarlas sin dificultad en el cielo. Estos elementos están calculados por las fórmulas:

$$\cos.h=\frac{\tan.\varphi}{\tan.\delta} \qquad \cos.z=\frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta} \qquad \text{sen.}\,a=\frac{\cos.\delta}{\cos.\varphi} \qquad \tau=a\pm h$$

(¹) Esta Tabla está extractada de la más extensa que presenté la Ministerio de Fomento en Junio de 1880, y que se imprimió en el año siguiente.

En cuanto á la *Epoca*, tiene el mismo significado y el mismo uso que explicamos en el número 193.

ESTRELLAS.	AL OESTE.		AL ESTE.		z	a
	τ	Época.	τ'	Época.		
	h m		h m		° ′	° ′
δ *Ursæ minoris*..........	0 9	Nov. 7	12 18	Mayo 11	70 32	± 3 36
δ *Draconis*..............	0 39	Nov. 15	13 46	Junio 2	68 53	24 1
ε *Draconis*..............	1 19	Nov. 25	14 18	Junio 11	69 15	21 20
k *Cephei*................	1 55	Dic. 4	14 31	Junio 14	70 3	13 27
α *Cephei*................	2 32	Dic. 14	15 59	Julio 6	67 52	29 49
β *Cephei*................	2 57	Dic. 20	15 57	Julio 5	69 16	21 16
ι *Cephei*................	4 8	Enero 7	17 22	Julio 27	68 33	26 3
γ *Cephei*................	5 15	Enero 24	17 53	Agto. 4	70 1	13 53
α *Ursæ majoris*..........	16 13	Julio 10	5 38	Enero 30	67 57	29 23
λ *Draconis*..............	16 54	Julio 20	5 53	Fbro. 2	69 16	21 14
k *Draconis*..............	17 59	Agto. 6	6 57	Fbro. 19	69 20	20 44
α *Ursæ minoris* (Polar)	7 10	Fbro. 22	19 14	Agto. 25	70 33	1 27
50 *Cassiopæ*.............	7 26	Fbro. 26	20 19	Sept. 10	69 30	19 20
ι *Cassiopæ*..............	7 44	Mzo. 2	20 53	Sept. 19	68 47	24 40
α *Draconis*..............	19 23	Agto. 27	8 39	Mzo. 16	68 27	26 38
β *Ursæ minoris*..........	20 29	Sept. 13	9 13	Mzo. 25	69 49	16 16
γ^2 *Ursæ minoris*..........	20 55	Sept. 19	9 49	Abril 3	69 33	18 49
9 *Cameleopardi*..........	10 5	Abril 7	23 17	Otbre. 25	68 40	25 25
η *Draconis*..............	21 39	Sept. 30	11 6	Abril 23	67 49	30 4
ε *Ursæ minoris*..........	22 48	Otbre. 18	11 10	Abril 24	70 23	± 8 14

Aunque esta tabla está calculada para $\varphi=19°\,26'$ como he dicho, puede aplicarse también á la determinación de los mismos elementos para otra latitud φ', sin necesidad de recurrir á las Efemérides, sino por medio de las ecuaciones siguientes, que se derivan de las anteriores:

$$\cos.h'=\frac{\tan.\varphi'}{\tan.\varphi}\cos.h \qquad \cos.z'=\frac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\varphi}\cos.z \qquad \text{sen.}\,a'=\frac{\cos.\varphi}{\cos.\varphi'}\,\text{sen.}\,a$$

El valor de h en arco se deduce de la relación $h=\frac{1}{2}(\tau-\tau')$, que expresa el ángulo horario en tiempo, ó sea la semidiferencia de las horas de las elongacianes occidental y oriental, añadiendo 24^h á la primera cuando la segunda sea mayor que ella. En cuanto á la ascensión recta de la estrella, se tiene $a=\frac{1}{2}(\tau+\tau')$, que combinada con h', dará las horas de las digresiones para la latitud φ'.

No creo inútil hacer notar que, en esos instantes, z nunca difiere mucho de la colatitud; y que, por consiguiente, para la nueva latitud casi siempre podrá tomarse $z' = z - (\varphi' - \varphi)$, al menos para el objeto de hallar la estrella en el campo del telescopio, y cuando la diferencia de latitudes no exceda de unos 5° ó 6°.

238.—También el sol se aplica á la medida de los azimutes, consistiendo la operación en medir el ángulo horizontal comprendido entre la señal y uno de los dos bordes del astro, y en anotar las horas correspondientes del cronómetro. Calculando en seguida la hora verdadera de la observación, se deduce el ángulo horario del sol, é interpolando para el mismo instante su declinación, se reunen los datos necesarios para aplicar la ecuación (1). Si sólo se han medido los ángulos respecto de uno de los bordes, es preciso tomar en cuenta el azimut del semidiámetro, que es:

$$\varDelta a = \frac{s}{\text{sen. } z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

puesto que los dos planos verticales que pasan el uno por el centro del astro y el otro tangente á uno de sus bordes, interceptan ese arco del horizonte. La cantidad $\varDelta a$, aplicada con el signo conveniente al azimut a del centro, obtenido por la fórmula (1), suministrará el del limbo cuyas distancias á la señal se hayan medido. En las observaciones solares, tanto por comodidad como por la menor influencia de los pequeños errores que pudieran tener los elementos del cálculo, conviene observar el astro á poca altura respecto del horizonte, por lo cual se practican generalmente las medidas angulares poco después de su orto ó poco antes de su ocaso.

CAPITULO XII.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT.—MÉTODO DE DISTANCIAS ANGULARES ENTRE LA SEÑAL Y LA ESTRELLA, CONOCIENDO LA DISTANCIA ZENITAL DE ÉSTA.

239.—En lugar del dato ó elemento cronométrico al medir el ángulo horizontal comprendido entre la señal y el astro, puede hacerse uso de la distancia zenital de éste, medida directamente; porque también de esa manera se reunen los tres elementos indispensables para la resolución del triángulo astronómico, á saber: la latitud φ de la estación, la declinación δ de la estrella y su distancia zenital z. Es fácil, por lo mismo, calcular su azimut por medio de las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} m = \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) \qquad n = \tfrac{1}{2}(z + \varphi - \delta) \\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\cos.\, m \,\text{sen.}\, n}{\cos.\, \varphi \,\text{sen.}\, z}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Suponiendo pequeños errores en todos los datos del problema, el que resulta en el azimut será:

$$\varDelta a = \frac{da}{dz}\varDelta z + \frac{da}{d\varphi}\varDelta \varphi + \frac{da}{d\delta}\varDelta \delta$$