cuando su observación no ofrezca dificultad alguna, juzgo de la mayor importancia consignar aquí un nuevo método de observarlo, que se debe á Mr. Quetelet y que presenta grandes ventajas respecto del procedimiento común. Consiste en sacar un poco el tubo del ocular del telescopio hasta que comiencen á verse con vaguedad los hilos de su retícula. Entonces sucederá que dirigido el telescopio hacia el sol, y poniendo delante del ocular una hoja de papel ó de cartón, podrán verse en él tanto las imágenes de los hilos como la del astro. Por consiguiente, estando fijo el círculo en la graduación conveniente, se observarán con la mayor comodidad y exactitud los instantes en que los limbos del sol son tangentes á los hilos, para anotar las horas correspondientes del cronómetro. Esta manera de observar, á la vez que más fácil, tiene también la ventaja de que, amplificada así la imagen del astro, y dándole la intensidad que se quiera para que no fatigue la vista, permite apreciar los instantes de los contactos de los hilos con los bordes con más seguridad que por medio de la visión directa. Se comprende por supuesto que la retícula debe hallarse en el foco estelario del objetivo, lo mismo que en el método ordinario, pues de otra manera no podrían pintarse en el mismo plano las imágenes del sol y de los hilos.

El fundamento de este procedimiento proviene de que alejando el ocular de la retícular, en vez de formar una imagen virtual hacia adelante, la forma real hacia atrás. En consecuencia, sacando más ó menos el tubo del ocular, se puede acercar ó alejar el plano en que se pintan las imágenes, y el observador es dueño de elegir de esa manera la distancia que juzgue más á propósito para obtenerlas de la amplitud é intensidad convenientes, sin necesidad de la interposición de un helioscopio. En todos casos, es muy poco lo que debe sacarse el ocular.

Como los rayos directos del sol al caer sobre el cartón ó el papel molestarían la vista, y acaso impedirían ver con claridad las imágenes, debe ponerse cerca del ocular ó en el objetivo del telescopio un disco de cartón que los intercepte. De ese modo sólo se reciben en la hoja de papel los rayos que han pasado por el interior del telescopio y que son los que producen las imágenes.

CAPITULO VIII.

DETERMINACIÓN DE LA HORA.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

189.—Las consecuencias que se deducen del análisis hecho al principio del Capítulo precedente, respecto de las mejores condiciones en que conviene observar un astro con el fin de hallar la hora, me condujeron á encontrar un procedimiento de observación, que reuniendo todas las indicaciones de aquel análisis, presentase, además, la ventaja de eliminar completamente del resultado las distancias zenitales medidas, y en consecuencia los errores que podrían afectarlas. Este procedimiento, ampliamente desarrollado, consta en las secciones I y II del primer Capítulo de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*, y á esta obra puede ocurrir el lector en busca de más detalles; pues aquí sólo me limitaré á exponer su parte práctica.

Consiste el nuevo procedimiento en observar dos estrellas elegidas de manera que lleguen á la misma distancia zenital á horas poco diferentes, la una al Este y la otra al Oeste del meridiano, y en lo posible con un azimut considerable; en anotar las correspondientes indicaciones del cronómetro; y en servirse de éstas como únicos datos obtenidos por la observación, para determinar la corrección que necesiten.

Se comprende que no entrando como elemento en la resolución del problema la distancia zenital común á las dos estrellas, se evitan también todas las operaciones preliminares para la preparación de ese elemento, como son las relativas al cálculo de la refracción y á las correcciones instrumentales; circunstancia que á su vez produce la ventaja de no hacer indispensables las indicaciones del barómetro y del termómetro, y la de permitir el uso de un instrumento incorrecto para practicar la observación. Desarrollemos las sencillas fórmulas que resuelven el problema.

190.—Designando por h y δ respectivamente el ángulo horario y la declinación de la estrella occidental, y por h' y δ' los mismos elementos de la oriental, se tienen las dos ecuaciones:

$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos. h$$
$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta' + \cos.\varphi \cos.\delta' \cos. h'$$

de las que resulta por diferencia:

$$\tan.\varphi(\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}\,\delta') = \cos.\delta' \cos. h' - \cos.\delta \cos. h$$

Descomponiendo ambos miembros en factores, esta ecuación puede escribirse así: (1)

$$2\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\tan.\varphi = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\cos.\delta' - \cos.\delta)(\cos h' + \cos. h) \\ +\tfrac{1}{2}(\cos.\delta' + \cos.\delta)(\cos. h' - \cos. h) \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de las sumas y diferencias de los cosenos, se halla:

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\tan.\varphi = \begin{cases} \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(h+h')\cos.\tfrac{1}{2}(h-h') \\ +\cos.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(h+h')\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(h-h') \end{cases}$$

Dividiendo toda la ecuación por

$$\cos.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(h-h')$$

y haciendo para abreviar:

$$\left.\begin{aligned} &\tan.\psi = \tan.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot.\tfrac{1}{2}(h-h') \\ &\gamma = \frac{\tan.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\varphi}{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(h-h')} \\ &\text{se hallará sin dificultad alguna:} \\ &\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(h+h') + \tan.\psi\cos.\tfrac{1}{2}(h+h') = \gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(1) En general, la diferencia $m'n' - mn$ de dos productos siempre puede ponerse bajo la forma: $m'n' - mn = \tfrac{1}{2}(m'-m)(n'+n) + \tfrac{1}{2}(m'+m)(n'-n)$.

Expresemos ahora la semisuma y la semidiferencia de los dos ángulos horarios en función de las horas anotadas en el cronómetro. Designando para esto por α y α' las ascensiones rectas de las estrellas occidental y oriental respectivamente; por t y t' las horas cronométricas de las observaciones, y por Δt y $\Delta t'$ sus correspondientes correcciones, tendremos que las horas siderales exactas, serán:

$$T = t + \Delta t$$
$$T' = t' + \Delta t'$$

y por consiguiente los ángulos horarios:

$$h = t + \Delta t - \alpha$$
$$h' = t' + \Delta t' - \alpha'$$

Llamando ε su semisuma y θ su semidiferencia algebraicas, se obtendrá:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(h+h') = \varepsilon = \tfrac{1}{2}(t+t') + \tfrac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') - \tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) \\ \tfrac{1}{2}(h-h') = \theta = \tfrac{1}{2}(t-t') + \tfrac{1}{2}(\Delta t - \Delta t') + \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

con lo cual la última de las ecuaciones (1) se convierte en la siguiente:

$$\text{sen.}\,\varepsilon + \tan.\psi\cos.\varepsilon = \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Esta ecuación es la que se trata de resolver para hallar el valor de ε, pues todas las demás cantidades son conocidas. El valor de θ ó $\tfrac{1}{2}(h-h')$ se compone de la diferencia de las ascensiones rectas y de la de las horas cronométricas, corregida por la pequeña cantidad $\tfrac{1}{2}(\Delta t - \Delta t')$, que representa la variación del cronómetro en el intervalo $\tfrac{1}{2}(t-t')$. Luego que se haya determinado el valor de ε, la primera de las ecuaciones (2) dará á conocer la corrección del cronómetro.

Multiplicando ahora la ecuación (3) por $\cos.\psi$, resulta:

$$\text{sen.}\,\varepsilon\cos.\psi + \cos.\varepsilon\,\text{sen.}\,\psi = \gamma\cos.\psi$$

que equivale á la expresión:

$$\text{sen.}(\varepsilon + \psi) = \gamma\cos.\psi$$

En consecuencia, si representamos por ω la suma $\varepsilon + \psi$, tendremos:

$$\text{sen.}\,\omega = \gamma \cos.\psi = \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\varphi\cos.\psi}{\text{sen.}\,\theta} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

y una vez calculado este ángulo, se obtiene:

$$\varepsilon = \omega - \psi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

191.—Las ecuaciones precedentes contienen toda la resolución del problema. Reunamos por su orden las fórmulas que deben calcularse para que se comprenda mejor todo el procedimiento.

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \frac{1}{2}(t - t') + \frac{1}{2}(\Delta t - \Delta t') + \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \\ \tan.\psi = \tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cot.\theta \\ \text{sen.}\,\omega = \dfrac{\tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\varphi\cos.\psi}{\text{sen.}\,\theta} \\ \varepsilon = \omega - \psi \\ \frac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha) + \varepsilon - \frac{1}{2}(t + t') \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

El valor de θ, convertido en arco, permitirá el cálculo de ψ y el de ω. Con esto queda ε determinada en arco; mas reducida á tiempo y sustituída en la última fórmula, da á conocer la semisuma de las correcciones del cronómetro, la cual representa evidentemente su corrección en el instante medio $\frac{1}{2}(t + t')$ entre las horas á que se hayan observado las dos estrellas.

Por tratarse de observaciones de estrellas, todo el cálculo se ha desarrollado en la hipótesis de que sea sideral el cronómetro cuyas indicaciones son t y t'; pero si fuese solar, se convertirá en tiempo sideral la duración $\frac{1}{2}(t - t') + \frac{1}{2}(\Delta t - \Delta t')$ por medio de la Tabla de la página 252. De este modo, el valor de ε expresará también tiempo sideral, y será preciso convertir en hora media (página 253) la sideral $\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha) + \varepsilon$ para hacerla comparable con las indicaciones del cronómetro, si éste es solar.

La marcha $\frac{1}{2}(\Delta t - \Delta t')$ sólo tiene valor apreciable cuando es de alguna consideración el intervalo de tiempo $t - t'$ que transcurre de una observación á la otra, ó bien cuando el cronómetro tiene una

fuerte variación diaria. Por esta circunstancia, y especialmente por las ventajas que resultan de terminar toda la operación en poco tiempo, es de importancia escoger bien el momento en que conviene observar las dos estrellas que se hayan combinado con este objeto. Veremos después que esto es siempre muy fácil; y por ahora presentemos una aplicación de este método, que indudablemente es más sencillo de lo que parece á primera vista.

Ejemplo.—En un lugar (San Luis Potosí) cuya latitud es 22° 9′ 00″ y cuya longitud es de $6^h 43^m 49^s$, hice el 28 de Abril de 1867 las siguientes observaciones con sextante y un cronómetro solar que atrasaba cosa de $0^s.1$ por hora.

	γ^1 *Leonis* al O.	Sextante.	α *Bootis* al E.
	$9^h\ 47^m\ 50^s.5$	........128° 00′	$10^h\ 1^m\ 54^s.0$
	„ 48 33 .5	127 40	„ 1 10 .2
	„ 49 17 .2	127 20	„ 0 27 .7
	„ 50 00 .5	127 00	9 59 44 .5
	„ 50 44 .0	126 40	„ 59 1 .5
	„ 51 28 .0	126 20	„ 58 18 .5
	„ 52 11 .5	........126 00	„ 57 36 .0
Promedios......	$t = 9^h\ 50^m\ 00^s.74$	127° 00′	$t' = 9^h\ 59^m\ 44^s.63$

Se ve por estos datos que en menos de un cuarto de hora se tomaron 7 alturas de cada estrella, de 20′ en 20′ del sextante. También se notará que las horas relativas á la estrella oriental crecen en el orden de las graduaciones del sextante, y se han escrito invertidas á fin de que cada una corresponda á la misma altura que la estrella occidental, la cual se observó primero. Las posiciones de las estrellas eran:

γ^1 *Leonis*......... $\alpha = 10^h\ 12^m\ 39^s.33$............. $\delta = +20°\ 30'\ 38''.3$

α *Bootis*......... $\alpha' = 14\ \ 9\ \ 37.58$............. $\delta' = +19\ \ 52\ \ 19.9$

Apliquemos las fórmulas (6) omitiendo la marcha del cronómetro por ser inapreciable en el corto intervalo transcurrido de una observación á otra.

$\frac{1}{2}(t-t') =$	$-\ 0^h\ 4^m 51^s.95$	$\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')$......	7.74408	....	7.74408
Acel. $=$	$-\ 0.80$	$\tan.\frac{1}{2}(\delta+\delta')$......	9.56559	$\tan.\varphi$..	9.60967
$\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)=$	$1\ 58\ 29.18$	$\cot.\theta$..............	0.26702	$\cos.\psi$..	0.00000
				$\text{sen}.\theta$...	-9.67728
$\theta =$	$1^h 53^m 36^s.38$	$\tan.\psi$..............	7.57669		
	$28° 24'\ 5''.7$			$\text{sen}.\omega$..	7.67647

$$
\begin{aligned}
\psi &= 0° 12' 58''.2\\
\omega &= 0\ 16\ 19.2\\
\varepsilon &= +0°\ 3' 21''.0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) &= 12^h\ 11^m\ 8^s.45\\
\varepsilon &= +\ 13.40\\
\text{Hora sideral} &= 12^h\ 11^m\ 21^s.85\\
A &= -\ 2\ 25\ \ 3.72\\
 & \ 9^h\ 46^m\ 18^s.13\\
\text{Red.}\,(I-A) &= -\ 1\ 36.05\\
\text{Hora media} &= 9^h\ 44^m\ 42^s.08\\
\tfrac{1}{2}(t+t') &= 9\ 54\ 52.68\\
\tfrac{1}{2}(\Delta t+\Delta t') &= -\ 10^m\ 10^s.60
\end{aligned}
$$

En este ejemplo, habiéndose observado primero la estrella occidental, resulta negativo el valor de $\frac{1}{2}(t-t')$ y por eso se consideró con el mismo signo su reducción á tiempo sideral; pero nótese que de una ú otra manera esta reducción ó aceleración aumenta el valor numérico de los intervalos de tiempo medio.

192.—El análisis de este método, hecho en la obra que cité al principio, conduce á las reglas siguientes para la elección de las dos estrellas que deben formar cada combinación: 1ª Las mejores estrellas son las zenit-ecuatoriales (las que culminan entre el ecuador y el zenit), porque pueden observarse cerca del primer vertical. De consiguiente, en las regiones intertropicales conviene elegir estrellas cuyas declinaciones no excedan de 30° á 40°. En nuestro país podrán tomarse por límites de declinación desde 45° Norte hasta

25° Sur, sin ningún inconveniente. 2º Se procurará que la diferencia de declinaciones de las dos estrellas que formen cada combinación, ó sea cada par, no exceda de 15° ó 20° cuando más, debiendo ser la de ascensiones rectas de 4^h á 8^h, y en general la que sea necesaria para que puedan observarse cómodamente ambas estrellas, la una al Este y la otra al Oeste del meridiano en poco tiempo. 3ª Las estrellas de cada par deberán ser próximamente de la misma magnitud, para que sus imágenes se presenten con el mismo brillo en el telescopio, y se tenga igual seguridad en las observaciones.

En mis *Nuevos Métodos* consta una Tabla que contiene 48 combinaciones de estrellas notables por su brillo, y propias para la aplicación de este método de observación. Pondré en seguida un extracto de aquella Tabla, con dos pares de estrellas para cada mes del año.

La cuarta columna contiene las horas siderales á las que las estrellas de cada par tienen la misma altura, la una al Oriente y la otra al Occidente del meridiano. Este dato designado por τ en la Tabla, es de mucha importancia para prepararse á la observación; porque sabiendo la hora á que las dos estrellas llegan á la misma altura simultáneamente, puede escogerse el momento favorable para observarlas, teniendo presente que después de aquella hora no se puede ya comenzar la operación, puesto que la estrella oriental continuará ascendiendo y la occidental descendiendo. Es, pues, indispensable principiar antes; y estimando en 5^m ó 6^m el tiempo que demanda la observación de cada estrella, y en otro tanto el que se necesita para preparar el instrumento, para visar la segunda, etc., creo que no será prudente comenzar después de $\tau - 5^m$, porque de otra manera habrá peligro de perder la observación de la segunda estrella. Es evidente, por supuesto, que puede principiarse todo el tiempo que se quiera antes de esa hora; pero la doble observación durará algo más.

Pares de estrellas propias para determinar la hora por el método de alturas iguales.

Núms.	Al Este.	Al Oeste.	τ	Epoca.	Log. $\frac{d\tau}{d\varphi}$
1	β *Geminorum.*	a *Andromedæ.*	3^h 49	Enero 3	5.2160+
2	β *Geminorum.*	a *Arietis.*	4 47	,, 17	7.7581—
3	β *Geminorum.*	β *Tauri.*	6 27	Febrero 12	6.5461+
4	a *Leonis.*	a *Tauri.*	7 18	,, 24	7.5820+
5	a *Leonis.*	a *Orionis.*	7 49	Marzo 4	7.9688+
6	β *Leonis.*	γ *Geminorum.*	9 7	,, 24	7.1241+
7	a *Bootis.*	γ *Geminorum.*	10 18	Abril 11	7.4453—
8	a *Bootis.*	β *Geminorum.*	10 57	,, 21	7.8945+
9	a *Bootis.*	γ^1 *Leonis.*	12 12	Mayo 10	6.9546+
10	a *Coronæ*	δ *Leonis.*	13 17	,, 26	7.8833—
11	a *Ophiuchi.*	a *Leonis.*	13 45	Junio 3	5.6003—
12	a *Ophiuchi.*	β *Leonis.*	14 38	,, 16	7.4316+
13	a *Ophiuchi.*	a *Bootis.*	15 55	Julio 6	8.0786+
14	a *Aquilæ.*	a *Bootis.*	17 6	,, 23	8.0752+
15	a *Aquilæ.*	a *Serpentis.*	17 39	Agosto 1	7.3599—
16	a *Pegasi.*	a *Serpentis.*	18 35	,, 15	7.3805—
17	ε *Pegasi.*	a *Herculis.*	20 3	Septiembre 7	5.6817+
18	a *Andromedæ.*	a *Lyræ.*	21 15	,, 25	8.0395+
19	a *Arietis.*	a *Ophiuchi.*	21 37	Octubre 1	7.8993—
20	a *Arietis.*	a *Aquilæ.*	22 42	,, 17	8.1369—
21	a *Ceti.*	a *Aquilæ.*	23 25	,, 28	7.6321+
22	a *Ceti.*	a *Pegasi.*	0 23	Noviembre 11	7.7951+
23	a *Aurigæ.*	a *Cygni.*	0 52	,, 19	6.9130—
24	a *Tauri.*	a *Pegasi.*	1 42	Diciembre 2	7.2671—
25	β *Tauri.*	a *Andromedæ.*	2 40	,, 16	6.1572—

La hora τ está calculada por las mismas fórmulas (6) con la condición de la simultaneidad, á saber, $t = t'$, y suprimiendo las correcciones del cronómetro, puesto que se trata de determinar la hora sideral exacta, que será, en consecuencia:

$$\tau = \frac{1}{2}(a' + a) + \omega - \phi$$

y como el valor de ω depende también de la latitud de la estación, lo he calculado para $\varphi = 24°$, que puede considerarse como la latitud media de la República. Para cualquiera otra latitud $\varphi = 24° + \Delta\varphi$, se tendrá:

$$\tau' = \tau + \frac{d\tau}{d\varphi}\Delta\varphi$$

Los logaritmos de $\frac{d\tau}{d\varphi}$ constan en la última columna de la Tabla, y por tanto es muy fácil hallar la hora de la igual altura simultánea para cualquiera otra latitud; porque introduciendo en esta fórmula el valor de $\Delta\varphi$ en minutos, se obtendrá la corrección correspondiente, también en minutos de tiempo. Calculemos, por ejemplo, la hora τ' para la latitud del lugar en que se hicieron las observaciones del número 191, y que se refieren al 9º par de la Tabla. Se tiene: $\Delta\varphi = 22°\,9' - 24° = -111'$.

$$\begin{array}{lll}
\frac{d\tau}{d\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots & 6.9546+ & \\
\Delta\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots & 2.0453- & \tau = 12^h\,12^m \\
\hline
 & 8.9999- \ldots\ldots & \quad -\ 0\ .1 \\
 & & \tau' = 12^h\,11^m.9
\end{array}$$

193.—Por esta aplicación se comprenderá que las más veces puede prescindirse de la corrección, á no ser que tenga varios grados el valor de $\Delta\varphi$, ó que sea muy considerable el logaritmo de su coeficiente; porque nunca es necesario conocer con mucha precisión el valor de τ, atendido el uso á que está destinado. Cuando se emplea para las observaciones un cronómetro solar, se convertirá τ en hora media, de la cual se deduce fácilmente la cronométrica si se conoce la corrección aproximativa de aquel instrumento. Verificándose así en nuestro ejemplo, se halla que la hora media correspondiente á $\tau = 12^h\,12^m$ es $H = 9^h\,45^m$; y teniendo el cronómetro unos 10^m de adelanto, sería próximamente $9^h\,55^m$ su indicación en el instante de la igual altura simultánea de las dos estrellas. Por eso se principió la observación cosa de 7^m antes de esa hora.

La quinta columna de la Tabla suministra un dato que también sirve para formarse una idea de la hora más avanzada á la cual puede comenzarse la observación. Con el título de "Época" consta en la columna mencionada la fecha hacia la cual cada par de estrellas adquiere igual altura simultáneamente á las 9^h de la noche (tiempo medio); y como la hora sideral avanza cada día cerca de cuatro minutos ($3^m.93$) respecto de la media, sabremos que n días después de la "Época" las estrellas correspondientes llegarán simultáneamente á la misma altura á la hora media $9^h - 3^m.93\,n$. Si n se refiere á una fecha anterior á la de la Tabla, es claro que se tomará $9^h + 3^m.93\,n$ por hora media de la igualdad de alturas. En nuestro ejemplo, la "Época" que corresponde al par número 9 es el 10 de Mayo; en consecuencia, se tendrá $n = -12$ para el 28 de Abril, día de la observación, y así:

$$H = 9^h + 3^m.9 \times 12 = 9^h\,47^m$$

que con el adelanto supuesto da $9^h\,57^m$ próximamente por hora cronométrica de la altura igual y simultánea.

Cuando no se conoce ni aun aproximadamente el estado del cronómetro, tampoco podrá aplicarse ninguno de los anteriores procedimientos; pero en tal caso se determina la hora conveniente para la observación, calculando el valor aproximativo de la distancia zenital común á las dos estrellas en el instante τ. En efecto, siendo entonces $h = \tau - \alpha$ y $h' = \tau - \alpha'$ sus ángulos horarios, podrá calcularse z por las fórmulas (3) del número 124, á saber:

$$\tan. M = \frac{\tan. \delta}{\cos. h} \qquad \cos. z = \frac{\text{sen}. \delta}{\text{sen}. M} \cos. (M - \varphi)$$

Hagamos el cálculo para *α Bootis* con logaritmos de tres ó cuatro decimales, que es lo bastante para el objeto.

$$\begin{array}{llll}
\tau = 12^h\,12^m & \tan.\delta \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9.5580 & & \text{sen}.\delta \ldots\ldots \quad 9.5314 \\
\alpha = -14\ \ 10 & \cos.h \ldots\ldots\ldots\ldots -9.9397 & & \cos.(M-\varphi) \ldots\ldots \quad 0.0000 \\
\overline{} & \overline{} & & \text{sen}.M \ldots\ldots -9.5838 \\
h = \begin{cases} -\ 1^h\,58^m \\ -29^\circ\,30' \end{cases} & \tan.M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9.6183 & & \overline{} \\
 & & & \cos.z \ldots\ldots \quad 9.9476 \\
 & \qquad M = 22^\circ\,33' & & \\
 & \qquad \varphi = 22\ \ \ 9 & & z = 27^\circ\,35' \\
 & M - \varphi = \ 0^\circ\,24' & &
\end{array}$$

El mismo resultado daría la otra estrella con poca diferencia. Por consiguiente, siendo sextante el instrumento de que se hizo uso, su indicación debía ser $G = 2(90^\circ - z) = 124^\circ\,50'$ para la igualdad de

altura simultánea. Ya con este dato y sin referencia alguna al cronómetro, cuya corrección se supone enteramente desconocida, sabremos que si se da principio á la observación con la estrella oriental, deberá ser con una graduación del sextante menor que 125°, y por el contrario, algo mayor si se comienza con la occidental, como se hizo en efecto.

Es evidente que todos estos cálculos aproximativos para prepararse á observar, no son útiles más que el primer día en que se observe un par, puesto que en los siguientes la indicación del instrumento angular ó la del cronómetro son suficientes para apreciar la hora conveniente, no olvidando que si el guarda-tiempo es solar deberá anticiparse cada día unos 4^m. Por otra parte, el objeto de los mismos cálculos es únicamente el de emplear poco tiempo en la operación; pero repito que puede comenzarse mucho antes de la hora τ, sin más desventaja que la de ocupar más tiempo, pues si la primera estrella se observa m minutos antes de τ, la otra llegará á la misma altura m minutos después próximamente, de suerte que en toda la operación se empleará el tiempo $2\,m$.

194.—Cuando se tiene necesidad de determinar la hora con alguna frecuencia, es útil bajo diversos conceptos servirse de los mismos pares de estrellas, y aun observarlas á las mismas alturas por todo el tiempo en que cómodamente sea posible hacerlo. Para esto notemos que como el tiempo sideral adelanta cosa de 2^h por mes respecto del solar, resulta que un mes antes de su "Época," cada par de estrellas llegará á su igual altura simultánea hacia las 11^h de la noche, y, por el contrario, un mes después la tendrá á eso de las 7^h. Por consiguiente, observando entre las 7^h y las 11^h, podrá emplearse durante dos meses cualquiera de las combinaciones de la Tabla.

Las ventajas de proceder así provienen en primer lugar, y según se ha dicho, de la facilidad de hacer las observaciones conociendo de antemano las indicaciones aproximativas de los instrumentos; en segundo de que si por algún accidente sólo puede observarse una de las estrellas de la combinación, se tendrá lo bastante con este único dato para determinar el estado del cronómetro; y en tercer lugar, de que toda observación completa suministra los medios de hallar el error del instrumento angular que se emplee.

En efecto, puede admitirse, sin error apreciable, que durante cuatro ó cinco días son constantes las coordenadas de una estrella, y que, por consiguiente, tendrá cada día la misma altura á la misma hora sideral. Según esto, la diferencia de las indicaciones del cronómetro, dividida por el número de días transcurridos desde la última observación completa, da á conocer con suficiente precisión su marcha diaria si el instrumento es sideral; y si es solar, llamando d la diferencia mencionada y n el número de días, se tiene:

$$v = \frac{d}{n} - 3^m\,55^s.91 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

puesto que $3^m\,55^s.91$ representa el atraso diario del tiempo medio respecto del sideral. Por ejemplo, el 30 de Abril de 1867 sólo pude hacer la observación siguiente de *α Bootis*, habiendo perdido la de γ^1 *Leonis* á causa de la interposición de las nubes:

	α Bootis al Este.	Sextante.
	$9^h\,49^m\,50^s.0$	126° 00′
	„ 50 53 .5	126 30
	„ 51 57 .7	127 00
	„ 53 1 .0	127 30
	„ 54 5 .5	128 00
Promedios.........	$t' = 9^h\,51^m\,57^s.54$.........	127° 00′

Como el día 28 se había obtenido t' $9^h\,59^m\,44^s.63$ observando la estrella á la misma altura, resulta $d = 7^m\,47^s.09$, y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,d &= 3^m\,53^s.94 \\ \text{Const.} &= -3\ \ 55\ .91 \\ \hline v &= -\qquad 2^s.37 \end{aligned}$$

Este procedimiento supone, á la verdad, que en las dos observaciones sean iguales la refracción y el estado del instrumento. Lo primero es sensiblemente exacto, siempre que no sea considerable la

distancia zenital de la estrella; y en cuanto á lo segundo, si se notá algún cambio en el error inicial, en las indicaciones de los niveles, etc., puede tomarse en cuenta introduciendo pequeñas correcciones en el valor de d. A este fin es fácil calcular el tiempo que invierte la estrella para ascender ó descender 1″, por la simple comparación de las indicaciones del instrumento angular con las correspondientes del cronométrico. Así, por ejemplo, en la última observación de *α Bootis*, restando una de otra las dos indicaciones extremas, y teniendo en cuenta que el sextante da alturas dobles, se ve que la estrella empleó $4^m\,15^s.5$ en ascender 1°, y por consiguiente, $\frac{255^s.5}{3600''} = 0^s.071$ por cada segundo. Esta será, pues, la cantidad que multiplicada por el número de segundos que haya de diferencia en las alturas, suministrará la corrección de d, que se le aplicará con el signo que convenga.

195.—El error del instrumento de que se haga uso puede determinarse por medio de cualquiera observación completa, si se cuenta con barómetro y termómetro para calcular el valor de la refracción. En efecto, puesto que la observación da la corrección del cronómetro, independientemente de la lectura angular del clisímetro, se infiere que el observador puede calcular en seguida las horas exactas á las cuales tomó las alturas iguales; determinar éstas aplicando las fórmulas (3) del número 124; y finalmente, comparar el resultado con la indicación del instrumento angular atendiendo al efecto de la refracción. Sea z la distancia zenital calculada por aquellas ecuaciones y r la refracción; la distancia zenital aparente será $z - r$, que comparada con la lectura del clisímetro, previas las correcciones conocidas por el estado de los niveles, por el error inicial, etc., da por diferencia la corrección de este instrumento, ó con más propiedad, la del punto de la graduación correspondiente al promedio de las lecturas. Suponiendo que se trate de un sextante, sea G la lectura media, e_0 el error inicial y ΔG la corrección que se va á determinar. La graduación correcta, ó sea la doble altura aparente será, pues:

$$G + \Delta G - e_0$$

y en consecuencia, la distancia zenital aparente tiene por expresión $90° - \frac{1}{2}(G + \Delta\, G - e_0)$, que igualada á $z - r$, produce:

$$\Delta\, G = 2(90° + r - z) - (G - e_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Es claro que $\Delta\, G$ representa el efecto resultante de todos los errores que puede tener el instrumento, como son el de excentricidad, el que proviene de la falta de paralelismo entre el telescopio y el limbo, etc.; pero es también el que más importa conocer en la práctica, y desde este punto de vista, el método anterior para determinar las correcciones, sea acaso preferible, por más sencillo, al que se ha expuesto en el número 171 y siguientes, si bien este último es superior como tipo de investigación individual de todas las causas de error.

Determinemos el error del sextante que usaba yo en 1867 valiéndonos de los datos del número 191. Pueden calcularse desde luego los ángulos horarios, puesto que las fórmulas (6) dan la semisuma ε y la semidiferencia θ.

$$\begin{array}{rl}
\varepsilon = & 0°\ \ 3'21''.0 \\
\theta = & 28\ \ 24\ \ \ 5\ .7 \\
\hline
h = & +28°27'26''.7
\end{array}
\qquad\qquad
h' = -28°20'44''.7$$

$$\begin{array}{lr}
\text{tan. } \delta \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.5729835 \\
\text{cos. } h \ldots\ldots\ldots\ldots & -9.9440736 \\
\hline
\text{tan. } M \ldots\ldots\ldots & 9.6289099
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
\text{sen. } \delta \ldots\ldots\ldots & 9.5445409 \\
\text{cos. } (M - \varphi) \ldots\ldots\ldots & 9.9999464 \\
\text{sen. } M \ldots\ldots\ldots & -9.5927743 \\
\hline
\text{cos. } z \ldots\ldots\ldots & 9.9517130
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
M = & 23°\ \ 3'00''.9 \\
\varphi = & 22\ \ \ \ 9\ 00\ .0 \\
\hline
M - \varphi = & 0°54'00''.9
\end{array}
\qquad\qquad
z = 26°31'14''.5$$

$$\begin{array}{lr}
\text{tan. } \delta' \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.5581095 \\
\text{cos. } h' \ldots\ldots\ldots\ldots & -9.9445313 \\
\hline
\text{tan. } M' \ldots\ldots\ldots & 9.6135782
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
\text{sen. } \delta \ldots\ldots & 9.5314390 \\
\text{cos. } (M' - \varphi) \ldots\ldots & 9.9999978 \\
\text{sen. } M' \ldots\ldots & -9.5797239 \\
\hline
\text{cos. } z \ldots\ldots & 9.9517129
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
M' = & 22°19'49''.6 \\
\varphi = & 22\ \ \ \ 9\ 00\ .0 \\
\hline
M' - \varphi = & 0°10'49''.6
\end{array}
\qquad\qquad
z = 26°31'14''.6$$

Esta es la distancia zenital verdadera; atendiendo á este elemento y á las indicaciones de los instrumentos meteorológicos á la hora de la observación, hallé por valor de la refracción, $r = 22''.5$. Además, el error inicial era aquella noche $e_0 = 1'\,50''.0$, por lo cual se tendrá:

$$\begin{array}{rl}
2(90° + r - z) = & 126°58'16'' \\
G - e_0 = & 126\ \ 58\ 10 \\
\hline
\Delta\, G = & \qquad + 6''
\end{array}$$

Se obtiene, pues, por este ejemplo la corrección de $+6''$ para el punto 127° 00′ del sextante; porque esta fué la graduación media del instrumento al observar las dos estrellas. Es claro que deben repetirse las determinaciones $\Delta\, G$ con el fin de obtener un promedio independiente de los pequeños errores accidentales.

De igual manera pueden hallarse las correcciones para cada 10° ó para cada 20° de la graduación, desde el punto 30° ó 40° hasta el 120° ó 130°; y entonces por interpolación se determinan para cualquiera indicación del instrumento. También se construye, para mayor sencillez, una curva con las graduaciones por abscisas, y los valores hallados de $\Delta\, G$ por ordenadas, de la cual se toma gráficamente la corrección que corresponde á cualquiera abscisa. En esta clase de construcciones conviene mucho exagerar las dimensiones de las ordenadas para obtenerlas con más precisión por medio de la escala. Así, por ejemplo, si en el eje de las abscisas se representan 10° por $0^m.01$, se podrán tomar las ordenadas de manera que cada segundo de $\Delta\, G$ quede representado por $0^m.001$.

196.—Además de las enunciadas, hay otra ventaja en servirse de los mismos pares de estrellas, la cual consiste en que por algún tiempo puede suponerse constante la parte de las ecuaciones (6) que depende de las posiciones de las estrellas y de la latitud. Así, haciendo:

$$C = \text{tan.}\,\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\,\text{tan.}\,\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \qquad D = \text{tan.}\,\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\,\text{tan.}\,\varphi$$

los valores de tan. ψ y sen. ω serán:

$$\text{tan.}\,\psi = C\,\text{cot.}\,\theta \qquad \text{sen.}\,\omega = D\,\frac{\text{cos.}\,\psi}{\text{sen.}\,\theta}$$

Si, pues, se calculan las cantidades C y D con las posiciones correspondientes al día de la "Época" del par, no habrá, por lo general, inconveniente en emplear los mismos valores durante los dos meses en que aquel puede observarse entre las 7^h y las 11^h de la noche, lo que facilita considerablemente los cálculos.

197.—En muchas de las combinaciones que constan en nuestra Tabla se verifica que es pequeña la diferencia de declinaciones de las dos estrellas, la cual si no excede de un grado ó de grado y medio, permite una simplificación importante en las fórmulas (6), pues tomando los arcos pequeños por sus senos y tangentes y la unidad por sus cosenos, se reducirán á la siguiente la segunda, la tercera y la cuarta de aquellas ecuaciones:

$$\varepsilon = (8.5229)(\delta - \delta')\left[\frac{\tan.\varphi}{\tan.\theta} - \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\tan.\theta}\right] \ldots\ldots\ (9)$$

En ésta, $\delta - \delta'$ expresa segundos de arco, y la constante es el logaritmo de $\frac{1}{30}$, pues se ha dividido por 15 el segundo miembro con el objeto de que ε resulte desde luego en segundos de tiempo. El cálculo es extremadamente sencillo con esta simplificación aplicable á todas las combinaciones en que $\delta - \delta'$ no sea mayor que $1^\circ\ 30'$, según se ha dicho.

198.—Cuando el método de alturas iguales se aplique con altazimut ú otro clisímetro provisto de niveles, importa atender á las indicaciones de éstos á fin de tomar en cuenta la pequeña diferencia que puede producirse en la posición del telescopio respecto de la vertical. A la verdad, durando la observación tan poco tiempo y procurando no tocar el telescopio, puesto que el instrumento se dirige de una á otra estrella por medio del movimiento del círculo azimutal, es en general admisible que no varíe la posición del anteojo respecto del nivel. Puede suceder, sin embargo, que no sea exactamente vertical la columna del instrumento, en cuyo caso al pasar de una situación á otra variarán las lecturas del nivel aunque no se haya alterado la posición de éste relativamente al telescopio; mas como de una ú otra manera el estado del nivel indica que la línea de colimación no forma exactamente los mismos ángulos con el

horizonte, veamos cómo se corrigen por esta causa las observaciones. Llamando o y e respectivamente las lecturas ocular y objetiva de los extremos de la burbuja al observarse la estrella occidental, o' y e' las indicaciones semejantes que se refieren á la oriental, v el valor angular de sus divisiones y z la distancia zenital que se supone tiene el telescopio; sus distancias zenitales verdaderas son:

Al observar la estrella oriental......... $z_1 = z + \frac{1}{2}(o' - e')v$

Al observar la estrella occidental...... $z_2 = z + \frac{1}{2}(o - e)v$

Si designamos por t_1 y t_2 las horas anotadas en el cronómetro, y por s', s los tiempos que invierten las estrellas en elevarse ó descender $1''$, las horas que corresponden á la igualdad real de alturas, y que, por consiguiente, son las que deben entrar en el cálculo de las fórmulas (6), son:

$$\left.\begin{aligned} t' &= t_1 + \tfrac{1}{2}(o' - e')vs' \\ t &= t_2 - \tfrac{1}{2}(o - e)vs \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

Las cantidades s' y s se determinan, como se ha dicho al fin del número 194, por la comparación del arco recorrido con el tiempo empleado en recorrerlo. Se procede exactamente como se explicó allí, siempre que el telescopio, provisto de un solo hilo horizontal, se haya ido colocando sucesivamente en graduaciones equidistantes para observar los pasos de las estrellas por sus diversas posiciones. Este modo de operar no es, sin embargo, el más conveniente, tanto por ser molesto, cuanto porque pueden cometerse pequeños errores al poner las indicaciones del círculo, los cuales darían por resultado la falta de igualdad de alturas, condición esencial del método; y por eso es mucho mejor hacer uso de varios hilos horizontales en la retícula con intervalos iguales, de $4'$ á $6'$. Entonces, fijando el telescopio con su tornillo de presión, sea cual fuere la indicación del círculo, se observa el paso de la primera estrella por todos los hilos, y se procede lo mismo con la segunda después de haberle dirigido el telescopio en virtud del movimiento azimutal del instrumento. En tal caso la determinación de s' y s supone conocido el espacio angular que abrazan los hilos extremos; pero esto se consigue fácilmente ya sea midiéndolo por la diferencia de lecturas del círculo cuando aquellos se hacen coincidir con un objeto distante ó con la retícula de un colimador, ya sea observando una mira dividida puesta á una distancia dada, y calculando el ángulo visual de la parte interceptada por los hilos. (Véase el Tomo primero, números 159 y 167).

En el Capítulo siguiente presentaré algunas observaciones hechas con el altazimut de la manera que acaba de explicarse y que indudablemente es la más exacta, terminando este con otro ejemplo de alturas iguales observadas con sextante, á fin de que el lector se familiarice con la aplicación de las fórmulas (6).

El 9 de Mayo de 1867 observé las estrellas siguientes con los mismos instrumentos á que se refiere el ejemplo detallado del número 191.

α Bootis al E.	Sextante.	*α Leonis* al O.
$8^h\ 44^m\ 00^s.5$	112° 00′	$9^h\ 18^m\ 43^s.5$
„ 45 5.0	112 30	„ 17 37.0
„ 46 10.0	113 00	„ 16 31.5
„ 47 15.0	113 30	„ 15 26.0
„ 48 18.5	114 00	„ 14 18.5
„ 49 23.5	114 30	„ 13 13.5
„ 50 27.5	115 00	„ 12 9.5
„ 51 33.0	115 30	„ 11 2.0
„ 52 38.0	116 00	„ 9 55.0
$t' = 8^h\ 48^m\ 19^s.0$	114° 00′	$t = 9^h\ 14^m\ 19^s.61$

La posición del lugar era $\varphi = 22°\ 9'$, $L = 6^h 43^m 49^s$ próximamente, y las de las estrellas:

α Bootis	$\alpha' = 14^h\ 9^m\ 37^s.62$	$\delta' = +19°\ 52'\ 32''.1$
α Leonis	$\alpha = 10\ \ 1\ \ 18.18$	$\delta = +12\ \ 36\ \ 47.8$

Atendiendo á estos elementos, se ve que $\delta - \delta'$ es negativa. El cálculo será, por consiguiente:

$\frac{1}{2}(t-t') = 0^h\ 13^m\ 00^s.31$	tan. $\frac{1}{2}(\delta-\delta')$...... 8.80250—	....	8.80250—
Acel. $=$ 2.14	tan. $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$...... 9.46444	tan. φ...	9.60967
$\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha) = 2\ \ 4\ \ 9.72$	cot. θ............... 0.16611	cos. ψ...	9.99984
$\theta = \begin{cases} 2^h\ 17^m\ 12^s.17 \\ 34°\ 18'\ 2''.5 \end{cases}$	tan. ψ............... 8.43305—	sen. θ....	—9.75092
		sen. ω...	8.66109—

$$\psi = -1°\ 33'\ 9''.5$$
$$\omega = \ \ 2\ \ 37\ \ 35.0$$
$$\epsilon = -1°\ \ 4'\ 25''.5$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) &= 12^h\ \ 5^m\ 27^s.90 \\
\epsilon\ \ldots\ldots &= -\ \ 4\ \ 17.70 \\
\text{Hora sideral} &= 12^h\ \ 1^m\ 10^s.20 \\
A &= \ 3\ \ \ 8\ \ 25.82 \\
&\quad 8^h\ 52^m\ 44^s.38 \\
\text{Red.}\,(T-A) &= -\ 1\ \ 27.28 \\
\text{Hora media} &= 8^h\ 51^m\ 17^s.10 \\
\tfrac{1}{2}(t+t') &= 9\ \ \ 1\ \ 19.31 \\
\tfrac{1}{2}(\Delta t+\Delta t') &= -\ 10^m\ \ 2^s.21
\end{aligned}$$

199.—La determinación de la hora puede hacerse también observando una sola estrella á la misma altura á uno y otro lado del meridiano. En este caso, puesto que se tiene $\alpha = \alpha'$ y $\delta = \delta'$ será nulo el valor de ϵ, y por tanto las fórmulas (6) se reducen á la siguiente:

$$\frac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') = \alpha - \frac{1}{2}(t+t') \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (11)$$

Se ve que de esta manera toda la operación consiste en comparar el promedio de las indicaciones del cronómetro sideral con la ascensión recta de la estrella. Si es solar el guarda–tiempo, se calculará la hora media correspondiente á la sideral α, quiere decir, se hallará la hora media del tránsito de la estrella por el meridiano (número 133), y con esta se comparará la indicación del cronómetro.

En lo relativo al cálculo, este método no puede ser más sencillo; pero tiene el inconveniente de que demanda tres ó cuatro horas, por lo menos, para terminar la observación. En una duración tan considerable, es fácil que sufra alguna variación el instrumento, ó bien que se produzcan cambios en el estado de la atmósfera, los cuales podrían originar la pérdida de la observación occidental, correspondiente á la oriental, ó que al menos alterarían el poder refringente del aire, y en tal caso, las alturas aparentemente iguales, no lo serían en realidad. Por todas estas razones, me parece preferible la aplicación de mi método general de dos estrellas, cuya principal ventaja consiste en la brevedad con que se termina la operación.

CAPITULO IX.

DETERMINACIÓN DE LA HORA.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DEL SOL.

200.—Anotando las indicaciones de un cronómetro solar en los instantes en que el centro del sol adquiere la misma altura al Este y al Oeste del meridiano, es fácil deducir la hora que señalaría en un momento intermedio; y como por otra parte, puede calcularse la hora media correspondiente al mismo instante, resulta que la comparación de ésta con la hora cronométrica dará á conocer el error del guarda-tiempo.

Tal es el fundamento de este método para determinar la hora. Antes de desarrollar el sencillo cálculo que demanda, notemos que la declinación del sol varía con mucha lentitud y de una manera sensiblemente uniforme, por lo menos cuando se adopta por movimiento horario el que corresponde á un instante intermedio del espacio de tiempo á que se refiere el cambio de declinación (número 154). De esta consideración se deduce que el momento de la culminación del sol debe diferir muy poco del correspondiente á la mitad del intervalo transcurrido entre las dos observaciones, al que sería exactamente igual sin la variación de la declinación, según se ha visto al fin del Capítulo precedente refiriéndonos á la doble observación de una sola estrella. Se infiere también que el cambio que sufre la declinación desde la hora de la primera observación hasta la del tránsito meridiano del astro, es sensiblemente igual al que tiene lugar entre esta última hora y la de la segunda observación; de suerte