paralajes de ascensión recta y de declinación, comenzando por el primero. Designando por h' el ángulo horario aparente.............. $ZPA' = h + \beta$, el triángulo ZPA' da para el ángulo paraláctico $q' = PA'Z$:

$$\text{sen.}\, q' = \frac{\text{sen.}\, h' \cos.\, \varphi}{\text{sen.}\, z'}$$

y el triángulo APA' suministra esta otra forma del mismo valor:

$$\text{sen.}\, q' = \frac{\text{sen.}\, \beta \cos.\, \delta}{\text{sen.}\, p}$$

Igualándolo al anterior, y recordando que $\text{sen.}\, p = \text{sen.}\, \pi\, \text{sen.}\, z'$, resulta desde luego:

$$\text{sen.}\, \beta = \frac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta}\, \text{sen.}\, h' \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

fórmula que da el valor de la paralaje de ascensión recta en función del ángulo horario aparente. Para obtenerlo en función del verdadero, sustituyamos por h' su valor $h + \beta$, y se hallará sin dificultad después de desarrollar y dividir por $\cos.\, \beta$:

$$\tan.\, \beta = \frac{\dfrac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta}\, \text{sen.}\, h}{1 - \dfrac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta} \cos.\, h}$$

Representando para abreviar por m el coeficiente de $\text{sen.}\, h \cos.\, h$, se puede escribir la ecuación de este modo:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta} \\ \tan.\, \beta &= \frac{m\, \text{sen.}\, h}{1 - m \cos.\, h} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

Como la última es de la misma forma que la (4), es reducible á

serie por el mismo método, y se hallará en segundos con la exactitud suficiente:

$$\beta = \frac{m\, \text{sen.}\, h}{\text{sen.}\, 1''} + \frac{m^2\, \text{sen.}\, 2h}{2\, \text{sen.}\, 1''} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

El signo de β, según lo indican las fórmulas, depende del de h; de suerte que será positiva la paralaje de ascensión recta al Oeste del meridiano, y negativa al Este. Siendo $\alpha' = \alpha - \beta$ la expresión de la ascensión recta aparente, se deduce que al Oeste, la paralaje disminuye la verdadera y al Este la aumenta. En cuanto al ángulo horario aparente $h' = h + \beta$, siempre resulta aumentado numéricamente, por ser en todos casos del mismo signo h y β.

Ejemplo.—¿Cuál fué la ascensión recta aparente de la luna el día 1º de Diciembre de 1870, á la hora sideral $T = 22^h\, 6^m\, 3^s.37$ de un lugar cuya latitud es $\varphi = 19°\, 19'\, 0''.0$, sabiendo que en ese instante la ascensión recta verdadera de la luna era $\alpha = 0^h\, 19^m\, 31^s.66$, su declinación $\delta = -3°\, 31'\, 00''.6$ y su paralaje corregida $\pi = 54'\, 48''.0$?

El ángulo horario geocéntrico (núm. 133) será $h = -2^h\, 13^m\, 28^s.29$, que convertido en arco es: $h = -33°\, 22'\, 4''.3$. Apliquemos la fórmula (12).

sen. π.........	8.2024883		
cos. φ.........	9.9748361		
cos. δ.........	−9.9991814		
m...............	8.1781430	....	8.17814
sen. h.........	9.7403725−	cos. h............	9.92177
			8.09991
Numerador...	7.9185155−		0.012587
Denominador.	9.9944988	....	0.987413
tan. β.........	7.9240167−	$\beta = -0°\, 28'\, 51''.5$	

El valor de β expresado en tiempo es $-1^m\, 55^s.43$, por lo cual la ascensión recta y el ángulo horario aparentes, serán en este caso:

$$\alpha' = \quad 0^h\, 19^m\, 31^s.66 + 1^m\, 55^s.43 = \quad 0^h\, 21^m\, 27^s.09$$
$$h' = -33°\, 22'\, 4''.3 \; - 28'\, 51''.5 \; = -33°\, 50'\, 55''.8$$

Si se quiere hacer uso de la fórmula (13), se tiene:

m......	8.17814	m^2......	6.3563	1$^{\text{er.}}$ térm.º	$= -1709''.8$
sen. h..	9.74037—	sen. $2h$.	9.9632—	2.º „	$= -\ \ 21\ .5$
sen. 1″	—4.68557	2 sen. 1″	—4.9866		
	3.23294—		1.3329—		$\beta = -1731\ .3 = -28'51''.3$

148.—Para calcular la paralaje γ de declinación tenemos que en los triángulos astronómicos aparente PZA' y verdadero PZA, es común el azimut $a = PZA'$; y por consiguiente, siendo iguales los dos valores de cos. a resulta la ecuación:

$$\frac{\text{sen.}\,\delta' - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,z'}{\text{sen.}\,z'} = \frac{\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,z}{\text{sen.}\,z}$$

Ejecutando las operaciones y recordando que.......................... $z' - z = p = \text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,z'$, obtendremos:

$$\text{sen.}\,\delta' = (\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi)\,\frac{\text{sen.}\,z'}{\text{sen.}\,z}\,.$$

Se tiene, además, por la comparación de los valores de sen. a que dan los mismos triángulos:

$$\frac{\text{sen.}\,z'}{\text{sen.}\,z} = \frac{\text{sen.}\,h' \cos.\,\delta'}{\text{sen.}\,h \cos.\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

y así sustituyendo se halla fácilmente:

$$\tan.\,\delta' = \tan.\,\delta\left(1 - \frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta}\right)\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ecuación que suministra la declinación aparente en función de la geocéntrica y de los ángulos horarios aparente y verdadero.

Generalmente es mejor calcular el efecto $\gamma = \delta - \delta'$ para aplicarlo como corrección á la declinación geocéntrica δ. A este fin, representando por b la cantidad

$$\frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta}$$

tomemos la tangente de γ, y sustituyamos en su valor el precedente de tan. δ', esto es:

$$\tan.\,\gamma = \frac{\tan.\,\delta - \tan.\,\delta\,(1-b)\,\dfrac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}}{1 + \tan.^2\delta\,(1-b)\,\dfrac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}}$$

Como la relación $\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}$ difiere muy poco de la unidad, hagamos:

$$\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h} = 1 + x$$

de donde resulta:

$$x = \frac{\text{sen.}\,h' - \text{sen.}\,h}{\text{sen.}\,h} = \frac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\beta \cos.\,\frac{1}{2}(h'+h)}{\text{sen.}\,h}$$

y el valor de tan. γ se convierte en:

$$\tan.\,\gamma = \frac{\tan.\,\delta - (1-b)(1+x)\tan.\,\delta}{1 + (1-b)(1+x)\tan.^2\delta} = \frac{[b(1+x) - x]\tan.\,\delta}{\sec.^2\delta - [b(1+x) - x]\tan.^2\delta}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos.^2\delta$, se obtiene:

$$\tan.\,\gamma = \frac{[b(1+x) - x]\,\text{sen.}\,\delta \cos.\,\delta}{1 - [b(1+x) - x]\,\text{sen.}^2\delta}$$

Restableciendo $\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}$ por $1 + x$, y sustituyendo los valores de x y de b, haremos para abreviar:

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h} - \frac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\beta \cos.\,\frac{1}{2}(h'+h)\,\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,h} \\ &\text{con lo cual se tendrá:} \\ \tan.\,\gamma &= \frac{n \cos.\,\delta}{1 - n\,\text{sen.}\,\delta} \end{aligned}\right\} \ldots \ (16)$$

Esta fórmula puede también reducirse á serie para calcularla en segundos, con más comodidad, con logaritmos de pocas decimales y resultará:

$$\gamma = \frac{n \cos.\delta}{\text{sen. } 1''} + \frac{n^2 \text{sen. } 2\delta}{2 \, \text{sen. } 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Ejemplo.—Calculemos la declinación aparente de la luna con los mismos elementos del párrafo anterior, á saber:

$$\pi = 0^\circ\ 54'\ 48''.0 \qquad \delta = -\ 3^\circ\ 31'\ 00''.6$$
$$\varphi = 19\ \ 19\ \ 0\ .0 \qquad h = -\ 33\ \ 22\ \ 4\ .3$$

y como en aquella aplicación se halló $\beta = -\,28'\ 51''.3$, se tendrá, haciendo uso de las fórmulas (16), y recordando que $h' = h + \beta$.

sen. π....	8.2024883	2..............	0.3010300		
sen. φ...	9.5195510	sen. $\frac{1}{2}\beta$.......	7.6228908−		0.0053398
sen. h'...	9.7458580−	cos. $\frac{1}{2}(h'+h)$.	9.9205620		−0.0007796
sen. h....	−9.7403725−	sen. δ.........	8.7877564−		
	7.7275248	sen. h'........	−9.7403725−	$n =$	0.0061194
			6.8918667−		

n...........	7.7867088	....	7.78671	
cos. δ.......	9.0001814	sen. δ.........	8.78776−	
Num.......	7.7858902		6.57447	$\gamma = 0^\circ\ 20'\ 59''.4$
Den.........	−0.0001630		− 0.0003754	$\delta = -\ 3\ \ 31\ \ 0\ .6$
tan. γ.......	7.7857272	Den. =	1.0003754	$\delta' = -\ 3^\circ\ 52'\ 00''.0$

Aunque en todo el cálculo he empleado logaritmos de siete cifras, no hay inconveniente en tomarlos de cinco al determinar el valor de n, que siempre es una pequeña fracción; así como tampoco lo hay en sustituir π sen. $1''$ y β sen. $1''$ por sen. π y 2 sen. $\frac{1}{2}\beta$, expresando estos arcos en segundos. Hagámoslo así al aplicar la serie (17).

π............	3.51693	β..................	3.23842−		
sen. φ......	9.51955	cos. $\frac{1}{2}(h'+h)$....	9.92056		
sen. h'......	9.74586−	sen. δ............	8.78776−		
sen. $1''$......	4.68557	....	4.68557		0.00534
sen. h'......	−9.74037−	....	−9.74037−		−0.00078
	7.72754		6.89194−	$n =$	0.00612

n............	7.78675	n^2...........	5.5735		
cos. δ.......	9.99918	sen. 2δ......	9.0879−	1.er térm.° =	$0^\circ\ 21'\ 00''.0$
sen. $1''$.....	−4.68557	2 sen. $1''$.....	−4.9866	2.° „ =	$-\ 0\ .5$
	3.10036		9.6748−	$\gamma =$	$0^\circ\ 20'\ 59''.5$
				$\delta =$	$-3\ \ 31\ \ 0\ .6$
				$\delta' =$	$-3^\circ\ 52'\ 00''.1$

La misma sustitución del arco en segundos por el seno puede hacerse en el valor de m al calcular la fórmula (13).

Es necesario tener el mayor cuidado con el juego de los signos, y dar á cada línea trigonométrica el que le corresponda, según el valor que tenga el arco. En las aplicaciones anteriores, por ejemplo, se ha visto que los valores negativos de h y δ produjeron algún cambio de signos en diversas partes de las fórmulas, y en último resultado, unas coordenadas aparentes numéricamente mayores que las geocéntricas. Por esto al calcular las fórmulas importa no omitir los signos que van después de los logaritmos para indicar los de las cantidades á que pertenecen.

149.—Cuando se han calculado los efectos de la paralaje en la ascensión recta y en la declinación de la luna, es también muy fácil determinar el aumento de su semidiámetro, que puede obtenerse en función de las coordenadas aparentes y verdaderas. Eliminando, en efecto, la relación $\frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z}$ en las ecuaciones (7) y (14), se halla por valor del semidiámetro aparente:

$$s' = s\,\frac{\text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } h \cos. \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

y si se prefiere calcular el aumento $s'-s$, supondremos:

$$\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}=1+x \qquad \frac{\cos.\,\delta'}{\cos.\,\delta}=1+y$$

valores que sustituídos en el de s' dan por resultado:

$$s'-s=sx+sy+sxy$$

En el número anterior hallamos el valor de x, y por el mismo método puede determinarse el de y; pero atendiendo á la pequeñez de los efectos β y γ de la paralaje, tomaremos los arcos en segundos por sus senos, á saber:

$$\left.\begin{aligned} x&=\beta\,\frac{\cos.\,\frac{1}{2}(h+h')}{\text{sen.}\,h}\,\text{sen.}\,1'' \\ y&=\gamma\,\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\cos.\,\delta}\,\text{sen.}\,1'' \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(19)}$$

y como el término sxy sería muy pequeño por contener el factor $\text{sen.}^2\,1''$, bastará generalmente calcular sólo los dos primeros, que dan:

$$s'-s=sx+sy\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \text{(20)}$$

En el ejemplo precedente el semidiámetro tabular era $s=14'57''.7$, y así para calcular el aparente, tendremos:

$$\beta=-1731'' \qquad \frac{1}{2}(h+h')=-\ 33^\circ\,36'\,30''$$

$$\gamma=+1259'' \qquad \frac{1}{2}(\delta+\delta')=-\ \ 3^\circ\,41'\,30''$$

β..................	3.2383–	γ..................	3.1000		
cos. $\frac{1}{2}(h+h')$.	9.9206	sen. $\frac{1}{2}(\delta+\delta')$..	8.8088–		
sen. 1''..........	4.6856	....	4.6856	sx......... +	11''.4
sen. h..........	–9.7404–	cos. δ...........	–9.9992	sy......... –	0 .4
x..................	8.1041	y..................	6.5952–	$s'-s=$	11''.0
s..................	2.9533	....	2.9533	$s=$	14' 57''.7
sx..................	1.0574	sy..................	9.5485–	$s'=$	15' 8''.7

150.—Antes de terminar este Capítulo es preciso hacer una indicación de mucha importancia. Al calcular los efectos de la paralaje en la ascensión recta y en la declinación, he partido del supuesto de que el centro de la tierra se considere también como el de la esfera celeste, en el hecho de haber tomado como datos las coordenadas geocéntricas de la luna, y de haber definido la paralaje por el ángulo bajo el cual se vería el radio de la tierra desde el astro. Con tal hipótesis es indispensable hacer uso de la latitud geocéntrica, de manera que en la figura 41ª el punto Z representará el zenit geocéntrico del observador, punto en que su radio encuentra á la esfera celeste.

En la Parte Primera de este libro se ha expuesto el modo de calcular la latitud geocéntrica conociendo la geográfica, y la Tabla del número 23 suministra la reducción con la mayor facilidad, de modo que el cálculo de los efectos de la paralaje no presenta inconveniente alguno. Pero también se pueden determinar las coordenadas aparentes haciendo uso de la latitud geográfica, con tal que se suponga el centro de la esfera celeste en algún punto de la línea vertical del observador, y que se reduzcan las coordenadas geocéntricas de la luna á lo que serían vistas desde ese punto. De todos los puntos de la vertical, el extremo de la normal mayor es el que ofrece la ventaja de no demandar más que la reducción de la declinación geocéntrica, pues hallándose á la vez en el eje de la tierra y en el meridiano del observador, el ángulo horario de la luna, y en consecuencia, su ascensión recta, es exactamente la geocéntrica.

Siguiendo este nuevo método deberemos comenzar por tomar la paralaje en el sentido del ángulo bajo el cual se vería desde la luna la normal del observador. Si designamos, como antes, por π_0 la paralaje horizontal ecuatorial, por n la altura de la estación sobre el nivel del mar y por N la normal mayor, tendremos las ecuaciones:

$$\text{sen.}\,\pi_0=\frac{a}{\Delta} \qquad \text{sen.}\,\pi=\frac{N+n}{\Delta}$$

de las que resulta la relación siguiente de los arcos, que es sensiblemente igual á la de los senos:

$$\frac{\pi}{\pi_0} = \frac{N+n}{a} = \frac{1}{(1-e^2 \text{sen.}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{n}{a}$$

Elevando el binomio del denominador al numerador hasta la segunda potencia de e, se obtendrá por último:

$$\pi = \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_0 e^2 \text{sen.}^2 \varphi + \pi_0 \frac{n}{a} \text{ .... } (21)$$

Esta fórmula no difiere de la (2) más que en el signo del segundo término; y como los valores de este constan en la primera Tabla del número 141, se ve que para hallar la paralaje horizontal referida á la normal mayor, serán aditivas las dos correcciones por latitud y altura.

Calculemos ahora la reducción de la declinación geocéntrica de la luna. Sea C (fig. 42ª) el centro de la tierra, OH la normal del observador que ocupa el punto O en la superficie del globo, y ECE' el plano del ecuador. Siendo M la proyección de la luna L sobre este plano, tendremos que LCM es la declinación geocéntrica, que designaré por d, y su distancia polar será $LCP = 90° - d$. Llamando δ la declinación tal como se vería desde H, resulta que $LHP = 90° - \delta$, sería la distancia polar vista desde ese punto, común al eje y á la normal.

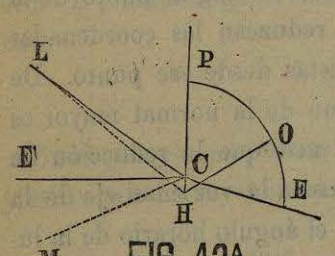

FIG. 42ª

El triángulo LCH da la ecuación:

$$\varDelta \text{ sen. } L = CH \cos. \delta$$

y como el ángulo L es igual á $LCP - LHP = \delta - d$, y la distancia del centro al extremo de la normal tiene por valor (número 10): $CH = \frac{a e^2 \text{sen.} \varphi}{r}$, se obtendrá sustituyendo:

$$\text{sen.}(\delta - d) = \frac{a e^2 \text{sen.} \varphi \cos. \delta}{\varDelta\, r} = \frac{N}{\varDelta} e^2 \text{sen.} \varphi \cos. \delta$$

La forma de esta ecuación indica desde luego la extremada pequeñez de la diferencia $\delta - d$, de manera que nos será permitido introducir en ella algunas simplificaciones sin que se altere su exactitud. En primer lugar, puede tomarse sen. π_0 por $\frac{N}{\Delta}$, en atención á que a y N difieren muy poco respecto de $\varDelta$; y en segundo no habrá inconveniente en emplear cos. d en vez de cos. δ. Con estas modificaciones, y tomando los pequeños arcos por sus senos, se tendrá:

$$\delta - d = \pi_0 e^2 \cos. d \text{ sen. } \varphi$$

que expresa la reducción de la declinación geocéntrica al extremo de la normal. Para facilitar las aplicaciones he calculado la Tabla que va á continuación, de los logaritmos de $A = \pi_0 e^2 \cos. d$, y que tiene por argumento la paralaje ecuatorial y la declinación geocéntrica de la luna. Con ayuda de ese factor, la declinación tal como se vería desde el extremo de la normal, es:

$$\delta = d + A \text{ sen. } \varphi \text{ .... } (22)$$

y haciendo uso de este valor pueden aplicarse las fórmulas de las paralajes de ascensión recta y de declinación, empleando también la latitud geográfica.

En las aplicaciones de las fórmulas de las paralajes, que se han hecho en los números precedentes, se emplearon las coordenadas geocéntricas de la luna y la latitud también geocéntrica 19° 19′ 00″ de México. Reduzcamos ahora la paralaje y la declinación al extremo de la normal, á fin de aplicar las mismas fórmulas con la latitud geográfica 19° 26′ 12″.3. La paralaje ecuatorial que dan las Efemérides es 54′ 48″.0, que fué la misma que se empleó en aquellos ejemplos, porque las correcciones por latitud y altura fueron numéricamente iguales y de distintos signos; pero en el caso actual tendrémos:

$$\pi_0 = 54' 48''.0$$
$$\text{Correc. por } \varphi = + \ 1''.2$$
$$\text{Correc. por } n = + \ 1''.2$$
$$\pi = 54' 50''.4$$

Logaritmos del factor A para calcular la reducción de la declinación geocéntrica de la luna al extremo de la normal.

Argumentos: π_0 y d.

Declinación geocéntrica.	53′	55′	57′	59′	61′
0°	1.327	1.343	1.358	1.373	1.388
2	.326	.343	.358	.373	.388
4	.326	.342	.357	.372	.387
6	.324	.340	.356	.371	.385
8	.322	.339	.354	.369	.384
10	.320	.336	.352	.367	.381
12	.317	.333	.349	.364	.378
14	.314	.330	.345	.360	.375
16	.310	.326	.341	.356	.371
18	.305	.321	.337	.352	.366
20	.300	.316	.331	.346	.361
22	.294	.310	.326	.341	.355
24	.287	.304	.319	.334	.349
26	.280	.297	.312	.327	.342
28	.273	.289	.304	.319	.334
30	1.264	1.280	1.296	1.311	1.325

Tomando ahora el log. A con el valor de la paralaje ecuatorial y $d = -3° 31'$, se halla:

$$\begin{array}{ll} A \ldots\ldots\ldots \ 1.341 & \\ \text{sen. } \varphi \ldots\ldots\ldots \ 9.519 & d = -3° 31' 00''.6 \\ \hline \delta - d \ldots\ldots\ldots \ 0.860 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \delta - d = & +\ 7\ .2 \\ \hline & \delta = -3° 30' 53''.4 \end{array}$$

Si con los nuevos datos, á saber: $\pi = 54' 50''.4$, $\varphi = 19° 26' 12''.3$ y $\delta = -3° 30' 53''.4$ se aplican ahora las fórmulas (12) y (16), se hallará $\beta = -28' 51''.5$, que es el mismo valor que se obtuvo por el otro método, y $\gamma = +21' 6''.7$. En consecuencia, la declinación aparente será:

$$\begin{array}{rl} \delta = & -3° 30' 53''.4 \\ \gamma = & +0\ \ 21\ \ \ 6\ .7 \\ \hline \delta' = & -3° 52'\ \ 0''.1 \end{array}$$

valor también igual al del número 148.

151.—Hay muchos casos en que es indiferente calcular los efectos de la paralaje por uno ú otro procedimiento; pero cuando se trata de comparar, por ejemplo, la distancia zenital calculada, con el valor que se haya obtenido por medio de la observación directa, me parece preferible hacer uso de la paralaje horizontal reducida por la fórmula (21) al extremo de la normal del observador, puesto que la medida de aquella distancia angular se refiere al zenit verdadero y no al geocéntrico. Lo mismo puede decirse cuando se desea calcular la distancia zenital geocéntrica de la luna empleando las ecuaciones (9) y (10), pues en la determinación de la paralaje de altura p no hay inconveniente en emplear la horizontal reducida por el nuevo método.