CAPITULO IV.

DETERMINACIÓN DE LA FIGURA Y DIMENSIONES DE LA TIERRA POR LAS MEDIDAS GEODÉSICAS.

116.—En el Capítulo I de la Geodesia práctica constan las expresiones analíticas de las principales líneas del elipsoide, y se ve que todas ellas dependen de los elementos característicos a y e de este sólido. La valuación numérica de esas expresiones demanda en consecuencia, el conocimiento de los elementos; mas si por un procedimiento cualquiera se obtienen directamente los valores de las mismas líneas, es claro que igualándolos con la expresión ó fórmula que los representa, se formarán ecuaciones de condición en las que figuren a y e como constantes indeterminadas, y cuya resolución dará por consiguiente, los valores de éstas.

Tal es el principio en que está fundada la determinación de la forma de la tierra por los procedimientos geodésicos. En el Capítulo precedente vimos, en efecto, que por medio de una cadena de triángulos es posible medir un arco terrestre con mucha exactitud, sin necesidad de conocer previamente el radio ecuatorial y la elipticidad del globo. Si, pues, m y m' representan, por ejemplo, las extensiones de dos arcos pequeños del meridiano, medidas geodésicamente, siendo φ y φ' las latitudes de sus medios, se tendrán (número 12) las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} m = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi+\ldots\ldots\right)d\varphi \\ m' = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi'+\frac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi'+\ldots\ldots\right)d\varphi' \end{array}\right\} \ldots\ldots(1)$$

en las que d φ y d φ' expresan las diferencias de latitud de los extremos de los arcos. En estas ecuaciones todo será conocido, con excepción de las constantes a y e, y, por tanto, será fácil determinar su valor.

Eliminando la cantidad $a(1-e^2)$, se obtiene:

$$\frac{3}{2}(m'\,\text{sen.}^2\varphi\,d\varphi - m\,\text{sen.}^2\varphi'\,d\varphi')e^2 + $$
$$+\frac{15}{8}(m'\,\text{sen.}^4\varphi\,d\varphi - m\,\text{sen.}^4\varphi'\,d\varphi')e^4 = m\,d\varphi' - m'\,d\varphi$$

Esta ecuación puede resolverse por aproximaciones sucesivas, introduciendo por valor de e^4 el que resulta de la primera aproximación; pero atendiendo á la pequeñez de e, basta generalmente adoptar el valor obtenido en la hipótesis de que sea nula su cuarta potencia, esto es:

$$e^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{m\,d\varphi' - m'\,d\varphi}{m'\,\text{sen.}^2\varphi\,d\varphi - m\,\text{sen.}^2\varphi'\,d\varphi'}$$

Cuando los dos arcos que se comparan tienen la misma amplitud, como sucede al hacer uso de las extensiones de 1°, se simplifica mucho el cálculo de esta fórmula, pues haciendo d φ = d φ', resulta:

$$e^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{m-m'}{m'\,\text{sen.}^2\varphi - m\,\text{sen.}^2\varphi'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Obtenido así el valor de e, cualquiera de las ecuaciones primitivas suministra el del radio del ecuador, á saber:

$$a = \frac{m}{(1-e^2)(1+\frac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi)\,d\varphi} \ldots\ldots (3)$$

ecuación en la que d φ representa la amplitud del arco m expresada en partes del radio; pero se multiplicará por sen. 1″ si se quiere introducir en segundos. El aplanamiento polar se obtendrá recordando (número 3) que con cortísima diferencia es igual á $\frac{1}{2}e^2$.

117.—Pongamos á la vista algunos de los principales resultados de las medidas geodésicas, á fin de aplicar las fórmulas precedentes.

PAISES.	OBSERVADORES.	Latitudes medias.	Extensiones de un grado.
Ecuador...............	Bouguer, Lacondamine..	00° 00′ 00″	110614^{m}
La India...............	Lambton, Everest.........	16 8 22	110653
Cabo de Buena Esp^{a}	La Caille.......................	33 18 30	111165
Francia..................	Delambre, Biot, Arago...	45 4 18	111116
Inglaterra...............	Roy, Kater.........	52 35 45	111241
Rusia......................	Struve...........................	58 17 37	111362
Laponia..................	Swamberg....................	66 20 10	111488

La expresión (2) indica que para disminuir el efecto de algún pequeño error que tengan las extensiones m y m' de los arcos, conviene que su denominador sea el mayor posible, ó en otros términos, que deben escogerse dos arcos medidos en latitudes muy diferentes. Conforme á esto, combinemos el grado de Rusia con el del Ecuador y como en tal caso se tiene $\varphi' = 0$, la ecuación toma la forma.........

$$e^2 = \frac{2(m-m')}{3m' \operatorname{sen.}^2 \varphi}.$$

$$m = 111362^{m} \qquad \varphi \; 58°\; 17'\; 37'' \qquad \tfrac{2}{3}\ldots\ldots \; 9.82391$$
$$m' = 110614 \qquad \varphi' \; 00\;\; 00\;\; 00 \qquad m - m'\ldots\ldots \; 2.87390$$
$$m'\ldots\ldots \; -5.04381$$
$$m - m' = \;\; 748 \qquad \operatorname{sen.}^2\varphi\ldots\ldots \; -9.85960$$
$$e^2 = 0.006229\ldots\ldots \; e^2\ldots\ldots \; 7.79440$$

El aplanamiento resulta, en consecuencia: $\alpha = 0.003115 = \frac{1}{321}$.

Con este valor de e^2 calculemos el radio ecuatorial valiéndonos del arco m'. Puesto que $\varphi' = 0$, y $d\varphi = 3600''$, la ecuación (3) dará:

$$a = \frac{m'}{3600\,(1-e^2)\operatorname{sen.} 1''}.$$

$$3600\ldots\ldots\ldots\ldots \; -3.5563025$$
$$1 - e^2\ldots\ldots\ldots\ldots \; -9.9972863$$
$$\operatorname{sen.} 1''\ldots\ldots\ldots\ldots \; -4.6855749$$
$$m'\ldots\ldots\ldots\ldots \; 5.0438101$$
$$a\ldots\ldots\ldots\ldots \; 6.8046464 \qquad a = 6377439^{m}$$

118.—De la misma manera podrían hacerse otras muchas combinaciones cuyos resultados no concuerdan idénticamente, ya sea por la influencia de los pequeños errores de observación, ya por ligeras irregularidades que existan realmente en el globo terrestre, según dije en el Capítulo I. Con el objeto de eliminar hasta donde es posible estas causas de discordancia, ó para determinar la forma general que resulta de un conjunto de medidas, se combinan muchas de ellas á la vez, estableciendo al efecto ecuaciones de condición, cuya resolución suministra los valores de a y e^2 independientes hasta cierto punto de los errores ó irregularidades locales.

Si en las ecuaciones primitivas (1), por ejemplo, se ejecutan las multiplicaciones hasta los términos en e^4, y si hacemos para abreviar:

$$A = 1 - \frac{3}{2}\operatorname{sen.}^2\varphi \qquad B = \frac{3}{2}\operatorname{sen.}^2\varphi - \frac{15}{8}\operatorname{sen.}^4\varphi$$

cualquiera de ellas adquirirá la forma:

$$m = a(1 - A e^2 - B e^4)\, d\varphi$$

bajo la cual podrían combinarse varios arcos para la determinación de las constantes. Sin embargo, en el estado actual de la Geodesia creo que sería preferible comparar los arcos medidos directamente con los calculados, haciendo uso de valores aproximativos de a y e^2, y determinar así las correcciones que éstos necesiten. Siendo, en efecto, a y e^2 los valores aproximativos de las constantes, δa y δe^2 las correcciones que les corresponden, y calculando con aquellos cada arco del meridiano por la última fórmula, se hallará un resultado μ, generalmente distinto del obtenido por la medida, esto es:

$$\mu = a(1 - A e^2 - B e^4)\, d\varphi \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots \; (4)$$

y para hacerlo concordar con m, introduciremos las correcciones, á saber:

$$m = (a + \delta a)[1 - A(e^2 + \delta e^2) - B e^4]\, d\varphi$$

El último término de esta ecuación se ha supuesto exacto á causa de su extremada pequeñez. Haciendo la multiplicación, omitiendo el producto δa, δe^2 por ser de segundo orden, y restando del resultado el valor de μ, obtendremos la ecuación de condición que sigue, entre las correcciones de los elementos supuestos.

$$m-\mu=\delta a(1-Ae^2-Be^4)\,d\varphi-Aa\,d\varphi.\delta e^2$$

Abreviando el coeficiente de δa con ayuda del valor de μ, y teniendo presente que $a\,d\varphi$ representa la extensión de un arco de amplitud $d\varphi$, contada en un círculo cuyo radio es a, extensión muy poco diferente de μ, la ecuación de condición podrá ponerse bajo la forma:

$$\frac{\mu}{a}\,.\,\delta a-A\mu.\delta e^2-(m-\mu)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Con el fin de presentar un ejemplo numérico sin alargar demasiado los cálculos, tomemos solamente tres de los arcos que constan en la Tabla anterior, y elijamos el del Ecuador, el de la India y el de Rusia. Calculados todos ellos por la fórmula (4) haciendo uso de sus latitudes respectivas y de los valores aproximativos $a=6377400^{\text{m}}$ y $e^2=0.0066$, se obtienen los resultados siguientes:

Grado del Ecuador.... $A=+1.0000$ ...... $B=0.0000$...... $\mu=110572^{\text{m}}$
Grado de la India...... $A=+0.8841$ ...... $B=0.1047$...... $\mu=110657$
Grado de Rusia........ $A=-0.0857$ ...... $B=0.1035$...... $\mu=111369$

y formando las ecuaciones de condición (5), hallaremos:

$$0.01733\,\delta a-111307\,\delta e^2-42=0$$
$$0.01735\,\delta a-\ \ 97832\,\delta e^2+\ \ 4=0$$
$$0.01746\,\delta a+\ \ \ 9544\,\delta e^2+\ \ 7=0$$

Combinando estas ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados, resultarán las dos normales:

$$+0.00090665\,\delta a-\qquad 3747\,\delta e^2-0.53624=0$$
$$-\qquad 3747\,\delta a+22052436409\,\delta e^2+4350374=0$$

cuya resolución suministra: $\delta a=-417^{\text{m}}$, y $\delta e^2=-0.000264$. En

consecuencia, los valores correctos de las constantes, según esta combinación, serían:

$$a+\delta a=6376983^{\text{m}} \qquad e^2+\delta e^2=0.006336$$

la última de las cuales correspondería á un aplanamiento de $\frac{1}{315}$ próximamente.

De esta ó de una manera análoga se han combinado la mayor parte de las principales operaciones geodésicas para determinar el elipsoide que conviene mejor al conjunto de los resultados de las medidas. En el número 104 dimos ya á conocer las cantidades obtenidas por diversos calculadores, y entre ellos Bessel, cuyos elementos son los que se han adoptado en este libro.

Es preciso advertir que para combinar arcos de amplitud considerable no sería exacto establecer las ecuaciones de condición partiendo de las series aproximadas (1), sino de la fórmula integral (21) del número 13, que suministra la extensión de un arco de g grados de amplitud, comprendido entre las latitudes φ y $\varphi-g$. Los coeficientes A, B, etc., de esa fórmula son funciones de las potencias pares de e, que sustituídas hasta los términos en e^4, pueden darle la forma $m=a(1-Me^2-Ne^4)$, semejante á la que he aplicado al ejemplo anterior, y, por consiguiente, susceptible de sujetarse al mismo procedimiento.

119.—La determinación de las constantes puede hacerse también comparando las medidas de dos arcos de paralelo, pues siendo φ y φ' sus latitudes, dL y dL' sus amplitudes y N y N' las normales correspondientes, tienen por expresiones:

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{a\cos.\varphi\,dL}{(1-e^2\text{sen.}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}=a\cos.\varphi(1+\tfrac{1}{2}e^2\text{sen.}^2\varphi+\tfrac{3}{8}e^4\text{sen.}^4\varphi+\ldots\ldots)\,dL \\ p'&=\frac{a\cos.\varphi'\,dL'}{(1-e^2\text{sen.}^2\varphi')^{\frac{1}{2}}}=a\cos.\varphi'(1+\tfrac{1}{2}e^2\text{sen.}^2\varphi'+\tfrac{3}{8}e^4\text{sen.}^4\varphi'+\ldots.)\,dL' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

de las cuales resulta por la eliminación de a y omitiendo los términos en e^4:

$$e^2=\frac{2(p\cos.\varphi'\,dL'-p'\cos.\varphi\,dL)}{p'\cos.\varphi\,\text{sen.}^2\varphi\,dL-p\cos.\varphi'\,\text{sen.}^2\varphi'\,dL'}.$$

Si las amplitudes son las mismas, como sucede cuando se comparan arcos de 1°, resulta la fórmula más sencilla:

$$e^2 = \frac{2(p \cos.\varphi' - p' \cos.\varphi)}{p' \cos.\varphi \operatorname{sen.}^2 \varphi - p \cos.\varphi' \operatorname{sen.}^2 \varphi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Comparando más de dos arcos de paralelo pueden formarse ecuaciones de condición partiendo de las expresiones (6), y procediendo como antes se ha hecho respecto de los arcos de meridiano. Si se designa por q la extensión calculada con los elementos aproximativos a y e^2, tendremos, pues:

$$q = a \cos.\varphi \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi + \frac{3}{8} e^4 \operatorname{sen.}^4 \varphi\right) \mathrm{d}L$$

y la ecuación de condición correspondiente á cada arco será de la forma:

$$\frac{q}{a} \delta a + \frac{1}{2} q \operatorname{sen.}^2 \varphi . \delta e^2 - (p - q) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

De la misma manera puede compararse uno ó más arcos de meridiano con otro ú otros de paralelo, por medio de las expresiones (1) y (6), ó bien combinando las ecuaciones de condición (5) y (8). Sin embargo, son comparativamente muy cortas en número las medidas de arcos de paralelo que se han ejecutado hasta hoy, por la dificultad de determinar exactamente sus amplitudes, ó sea la diferencia de longitud geográfica de sus extremos. Acaso en lo futuro no será así, porque el uso reciente de la telegrafía electro-magnética, como medio de determinar las longitudes geográficas, se presta casi al mismo grado de precisión que las medidas de las latitudes, y, en consecuencia, desaparecerá la principal causa de error que afecta á las amplitudes de los arcos. En mi concepto, la comparación de diversos paralelos, ó mejor la de varias partes del mismo paralelo, es la que puede dar á conocer con más facilidad si la tierra es realmente un sólido de revolución, pues es claro que siéndolo, amplitudes iguales deben corresponder á extensiones iguales en la misma latitud.

Cuando en un país se practican grandes operaciones geodésicas, por ejemplo, para levantar exactamente su carta geográfica, y se hacen también las correspondientes observaciones astronómicas, se pueden comparar las triangulaciones hechas de Norte á Sur con las de Oriente á Poniente, y de esa manera se determinan las constantes a y e^2, que en tal caso, deben considerarse como las pertenecientes á un elipsoide osculador á la superficie de la tierra en aquel país.

Sucede con frecuencia que las posiciones geográficas calculadas geodésicamente para puntos algo distantes por medio de las triangulaciones, no resultan idénticas á las observadas astronómicamente, cuando se hace uso de los elementos a y e^2 determinados para la tierra en general. Estas discordancias, que se atribuyen á las irregularidades locales, desaparecen necesariamente si se determinan las constantes que convienen á cada país, estableciendo ecuaciones de condición entre δa, δe^2 y las diferencias geodésicas y astronómicas de posición. Sea en, efecto, P la diferencia de latitud de dos puntos distantes calculada por la fórmula (2) del número 70. Siendo n el número de lados de la triangulación que hay entre las dos estaciones, se tiene: $P = p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots p_n$. Si designamos por P' la misma diferencia obtenida astronómicamente, $P' - P$ será el efecto del error de los elementos, y podremos establecer la condición:

$$P' - P = \delta p_1 + \delta p_2 + \ldots\ldots\ldots \delta p_n$$

Para determinar las correcciones de las diferencias parciales, tomemos la fórmula aproximativa:

$$p = A k \cos.u = \frac{k(1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos.u}{a(1 - e^2) \operatorname{sen.} 1''}$$

que diferenciada respecto de a y e^2, produce sin dificultad:

$$\delta p = -\frac{p}{a} \delta a + p \left(\frac{1}{1 - e^2} - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{sen.}^2 \varphi}{r^2}\right) . \delta e^2$$

De la misma forma serán las correcciones de p_1, p_2, etc., y tomando por $\frac{\text{sen.}^2\varphi}{r^2}$ para toda la cadena, el valor medio de esa cantidad, será constante el coeficiente de las p. Representando por m aquel valor, y sustituyendo, se tendrá la ecuación de condición:

$$(P'-P)+\frac{P}{a}.\delta a-P\left(\frac{1}{1-e^2}-\frac{3}{2}m\right).\delta e^2=0$$

Siendo igualmente Q y Q' las diferencias geodésica y astronómica de longitud, y aplicando á la fórmula (4) del número 71 un método de cálculo semejante, se hallará:

$$(Q'-Q)+\frac{Q}{a}.\delta a+\frac{1}{2}Qm.\delta e^2=0$$

Por medio de estas ecuaciones se determinarán fácilmente las correcciones δa y δe^2, que por la hipótesis, necesitan los elementos del elipsoide; pero debe tenerse presente que este procedimiento supone mucha precisión en las triangulaciones, en los azimutes y en toda la parte astronómica, puesto que las discordancias se atribuyen únicamente á alguna irregularidad local del globo terrestre.

PARTE TERCERA.

ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA PRÁCTICA

CAPITULO I.

DEFINICIONES Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

120.—Se ha dicho que la posición de un punto de la superficie de la tierra se fija por medio de sus dos coordenadas geográficas, latitud y longitud, y que la dirección de una línea se determina por su azimut, que es el ángulo que forma con el meridiano que pasa por uno de sus extremos. La medida directa de estos tres elementos geográficos constituye la aplicación más usual de los principios astronómicos, y es la que me propongo exponer en la última parte de la Geodesia, ya sea como complemento necesario de esta ciencia, ya como un medio sencillo y eficaz de obtener desde luego buenos datos para la construcción de grandes cartas geográficas, según se ha indicado en el Capítulo X de la Parte Primera.

En 1867, con el título de "*Nuevos Métodos Astronómicos,*" hice una publicación destinada á facilitar las aplicaciones de la Astronomía; pero el carácter esencialmente práctico de esa obra no me permitió ocuparme en ciertos detalles elementales con los que supuse ya familiarizado al lector, como son el uso de las Efemérides ó Tablas as-