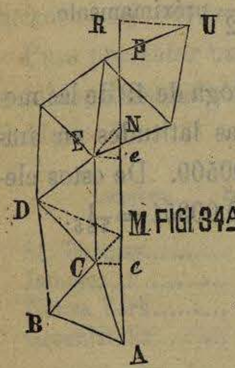
CAPITULO III.

APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES GEODÉSICAS Á LA MEDIDA DE ARCOS TERRESTRES.

112.—Si se ejecuta una triangulación de Norte á Sur, se observa directamente el azimut de un lado por lo menos, y se determina la posición geográfica de alguno de los vértices, hemos visto en la Parte Primera de este libro que se pueden calcular los mismos elementos para todo el resto de la cadena, después de hecha la resolución de los triángulos. Los datos así obtenidos sirven después para calcular el arco del meridiano que abraza la triangulación, suponiéndolo trazado por cualquiera de las estaciones. Sean A y U (fig. 34ª) los vértices extremos de la cadena, y propongámonos determinar el arco del meridiano que pasa por A. Si se supone prolongado el lado $B\,C$ hasta M, podremos calcular la distancia meridiana $A\,M$, puesto que en el triángulo $A\,M\,B$ se conoce el lado $A\,B$, el ángulo B y el ángulo $B\,A\,M$, que no es otra cosa más que el azimut de $A\,B$. Además de $A\,M$, la resolución dará los elementos restantes, á saber: $B\,M$ y el ángulo M. En seguida, en el triángulo $C\,D\,M$ se conoce la línea $C\,D$ por ser lado trigonométrico, $C\,M = B\,M - B\,C$, y el ángulo.................... $M\,C\,D = 180° - B\,C\,D$; la resolución dará, pues, $D\,M$ y los ángu-



M. FIG. 34ª

los D y M, con lo cual en el triángulo siguiente $M\,D\,N$, formado por la prolongación de $D\,E$ hasta el meridiano, se tendrá conocida la base $D\,M$ y los ángulos adyacentes para determinar $M\,N$ y los demás elementos. Una resolución semejante dará á conocer después la distancia $N\,P$ y así sucesivamente, pues todo el método consiste en ir combinando los elementos conocidos de la cadena con los que resultan de la prolongación de algunos lados, ó bien con las partes del meridiano determinadas por su intersección con los lados trigonométricos. Es claro que construyendo un croquis de la figura, se pueden tomar diversas líneas para hacer las combinaciones, cuyos diversos resultados se comprobarán unos á otros. El arco total $A\,P$ será, en consecuencia, igual á la suma de sus partes $A\,M$, $M\,N$, $N\,P$, etc., ó si se desea, puede bajarse una perpendicular $U\,R$ al meridiano desde la última estación U, y entonces se calcula también la distancia meridiana $P\,R = P\,U \cos.\, R\,P\,U$, para obtener $A\,R$ por arco total.

En todas estas operaciones los ángulos observados de la cadena y los deducidos al hacer las combinaciones, pertenecen á triángulos esféricos, por lo cual, para resolverlos por el método de Legendre, es preciso restarles la tercera parte del exceso esférico. Así, por ejemplo, en el primer triángulo $A\,B\,M$ con el lado $A\,B$ y los ángulos A y B se calcula la superficie para determinar en seguida el exceso esférico e (números 66 y 68); y entonces se tiene el ángulo esférico M por la ecuación:

$$M = 180° + e - (A + B)$$

Los ángulos planos serán $A' = A - \frac{1}{3}e$ y $B' = B - \frac{1}{3}e$, por lo cual el ángulo plano deducido es:

$$M' = 180° - (A' + B')$$

El anterior procedimiento para calcular la extensión de un arco del meridiano se debe también á Legendre. Antes de dar á conocer otros más analíticos, indicaremos que si se han determinado astronómicamente las latitudes de los vértices extremos A y U, como de esta última es fácil deducir la de P ó la de R sin error de importancia, tendremos conocida la amplitud del arco, que es igual á la diferencia de latitudes de A y B, y su extensión lineal por la resolución precedente. Estos dos elementos sirven, según se ha dicho, para calcular la extensión de un grado del meridiano, pues siendo φ y φ' las latitudes extremas y m la extensión total $AM + MN + NP +$ etc., se tendrá por valor del arco de 1°, expresando á $\varphi - \varphi'$ en segundos: $s = \frac{3600\,m}{\varphi - \varphi'}$, y diremos que el grado tiene s metros á la latitud media $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$.

113.—La extensión de un arco del meridiano puede también determinarse proyectando sobre él cada uno de los lados trigonométricos AC, CE, etc., por medio de perpendiculares Cc, Ee, etc., que se suponen bajadas desde los vértices. Conociendo, en efecto, la longitud y el azimut de cada línea, se tiene lo necesario para calcular las proyecciones por la fórmula $y = k \cos. u$, de que se hace uso en la Topografía. Es evidente que la suma de las proyecciones daría la extensión del arco; pero este método envuelve el pequeño error de suponer plana la superficie de la tierra, ó lo que es lo mismo, paralelas todas las perpendiculares al meridiano, siendo así que por pertenecer á círculos máximos de la esfera, deben converger hacia los puntos *Este* y *Oeste* del horizonte, que son los dos polos del meridiano.

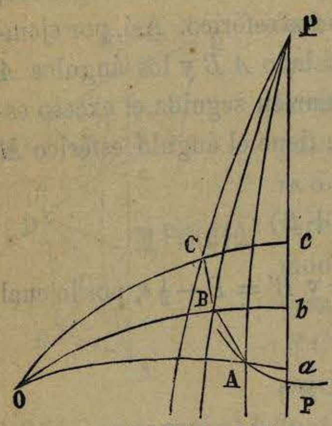


FIG. 35ª

Para tomar en cuenta esta circunstancia, el método de proyección se aplica de la manera siguiente: Sea AB (fig. 35ª) uno de los lados de la cadena, y PM el meridiano sobre el cual se van á proyectar los lados consecutivos con el objeto de hallar el arco total. Si por cada uno de los vértices A, B, C, etc., se trazan arcos perpendiculares al meridiano, todos ellos irán á concurrir al punto O, el cual será el polo de PM; y los piés de estos arcos determinarán las proyecciones ab, bc, etc., de los lados respectivos. Designando por L la longitud geográfica de PM y por L' la de PA

tendremos que $L' - L$ representará la diferencia de longitud de la estación A respecto de aquel meridiano. Con este elemento y con el azimut $u = PAB$ del lado trigonométrico, determinemos el ángulo $BAO = \omega$. Siendo φ la latitud de A, el triángulo PAa, rectángulo en a, da la relación:

$$\text{sen.}\,\varphi = \cot.(L' - L)\cot.PAa$$

Pero como $PAa = 180° - (\omega + u)$, se tiene despejando:

$$-\cot.(\omega + u) = \text{sen.}\,\varphi \tan.(L' - L)$$

El ángulo $\omega + u$ difiere muy poco de 90°, y así es que poniendo: $\omega + u = 90° + x$, la ecuación precedente dará:

$$\tan.x = \tan.(L' - L)\,\text{sen.}\,\varphi$$

y atendiendo á la pequeñez de x y de $L' - L$, se tendrá tomando los arcos en segundos por las tangentes: $x = (L' - L)\,\text{sen.}\,\varphi$. En consecuencia el valor de ω es:

$$\omega = 90° + (L' - L)\,\text{sen.}\,\varphi - u \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

En el triángulo PBb, designando por φ' la latitud de B, por L'' su longitud, y por λ la amplitud del pequeño arco Bb, se tiene:

$$\text{sen.}\,\lambda = \cos.\varphi'\,\text{sen.}(L'' - L)$$

y como la longitud de cualquiera de los vértices de la cadena nunca es considerable respecto de la del meridiano sobre el cual se proyecta, podrá tomarse:

$$\lambda = (L'' - L)\cos.\varphi' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Ahora, en el triángulo ABO, llamando θ la amplitud del lado AB, tendremos:

$$\text{sen.}\,O = \frac{\text{sen.}\,\theta\,\text{sen.}\,\omega}{\cos.\lambda}$$

ó bien atendiendo á la pequeñez de θ y O:

$$O = \frac{\theta\,\text{sen.}\,\omega}{\cos.\lambda}$$

El ángulo O puede suponerse perteneciente á una esfera cuyo radio sea igual á la normal N del punto A, puesto que es formado por los primeros verticales del meridiano PM; y además como su medida es el arco $ab = y$, se tendrá: $O = \frac{y}{N}$. También si se representa por R_u el radio de curvatura de la sección de que forma parte $AB = k$, se halla: $\theta = \frac{k}{R_u}$, y sustituyendo estos valores en el de O, resulta:

$$y = \frac{N k \,\text{sen.}\, \omega}{R_u \cos. \lambda}$$

Refiriéndonos al número 16, veremos que R_u sólo difiere de N una cantidad del orden del cuadrado de la excentricidad de los meridianos terrestres, por lo cual no hay inconveniente en suponer su relación igual á la unidad para adoptar la fórmula más sencilla:

$$y = \frac{k \,\text{sen.}\, \omega}{\cos. \lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) presentan los cálculos necesarios para hallar la proyección meridiana y de cada uno de los lados de la cadena, conociendo su azimut, su extensión y las coordenadas de sus extremos, elementos todos que se obtienen por medio de las operaciones trigonométricas que se han expuesto en la Parte Primera.

Cuando se calcula la extensión de un arco de meridiano con el objeto de compararla con su amplitud, es necesario, según he dicho, determinar astronómicamente las latitudes de las estaciones extremas; pero como al hacer la proyección por el método que antecede, la latitud γ del pie a del arco perpendicular al meridiano, es un poco diferente de la de A, puesto que Aa difiere del paralelo Ap de este vértice, es preciso calcular la pequeña diferencia de latitud $pa = x$. Para esto, en el triángulo rectángulo PaA se tiene:

$$\tan. \gamma = \frac{\tan. \varphi}{\cos. (L' - L)}$$

y como $x = \gamma - \varphi$, hallaremos:

$$\tan. x = \frac{\tan. \gamma - \tan. \varphi}{1 + \tan. \gamma \tan. \varphi}$$

sustituyendo el valor de $\tan. \gamma$, y tomando en el denominador de

$\tan. x$ la unidad por el coseno del pequeño ángulo $L' - L$, resultará:

$$\tan. x = \frac{2 \,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} (L' - L) \tan. \varphi}{\sec.^2 \varphi}$$

Multiplicando ambos miembros por $\cos.^2 \varphi$, y tomando los arcos x y $(L' - L)$ en segundos por sus líneas trigonométricas, se halla en último resultado:

$$\gamma = \varphi + \frac{1}{4} (L' - L)^2 \,\text{sen.}\, 2\varphi \,\text{sen.}\, 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

fórmula por cuyo medio se determinan las latitudes de los pies de los arcos proyectantes que pasan por los vértices extremos. La diferencia de estas latitudes representa la amplitud del arco del meridiano, formado por la suma de las proyecciones de los lados trigonométricos.

114. El método que me parece más conveniente para proyectar una serie de lados, y que no necesita corrección alguna de las latitudes extremas, consiste en calcular las distancias meridianas comprendidas entre cada dos vértices. Supongamos trazados los paralelos Aa, Bb, Cc, etc., (fig. 36ª) de cada estación trigonométrica; es claro que las distancias ab, bc, etc., no son otra cosa más que las diferencias de latitud de A y B, de B y C, etc., reducidas á medidas lineales, reducción que se practica dividiendo por el coeficiente A la fórmula (2) del núm. 70. Luego designando por m la parte del meridiano comprendida entre las latitudes φ y φ', se tendrá:

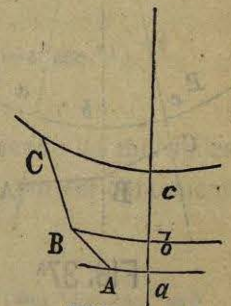


FIG. 36 A

$$m = \frac{\varphi' - \varphi}{A} = k \cos. u - \frac{B}{A} k^2 \,\text{sen.}^2 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

y la suma de las m dará el arco total que abraza la triangulación, en cuyos vértices extremos supongo que se ha determinado directamente la latitud con el fin de hallar la amplitud del mismo arco.

Conviene tomar de la Tabla del número 71 los valores de A y B para la latitud media $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$.

Debe notarse que los tres procedimientos que he expuesto para calcular la extensión de un arco, deben dar resultados sensiblemente independientes del valor de los elementos que caracterizan al elipsoide terrestre; pues si bien en el último figuran las cantidades A y B, que dependen del radio ecuatorial a y de la excentricidad e^2, es en un término muy pequeño, en el que, por consiguiente, bastaría emplear valores aproximativos, sin que por eso se alterase el resultado de una manera apreciable. Se comprende que de esa manera es posible hallar con exactitud la extensión de un arco del meridiano para compararlo en seguida con su amplitud astronómica y determinar así los elementos del elipsoide, como se verá en el Capítulo siguiente.

115.—De una manera análoga se procede para calcular la extensión de un arco de paralelo. Sean A, B, etc., (fig. 37ª) los vértices de una triangulación dirigida de Oriente á Poniente, y PP' el paralelo de latitud λ cuya extensión se desea determinar. Designando por φ, L, y φ', L' las latitudes y las longitudes de A y B respectivamente, por N la normal de A, por N_o la del paralelo y por u el azimut de $AB = k$, se tienen las dos ecuaciones:

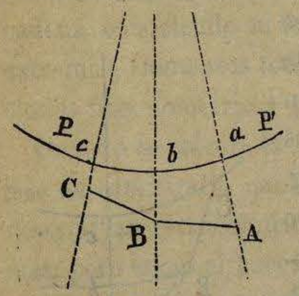


FIG. 37ª

$$a = (L' - L) N_o \cos.\lambda \,\text{sen.}\, 1''$$

$$L' - L = \frac{k \,\text{sen.}\, u}{N \cos.\varphi' \,\text{sen.}\, 1''}$$

la primera de las cuales expresa la extensión del arco del paralelo de latitud λ, que abraza una amplitud $L' - L$ (número 14); y la segunda suministra esta amplitud en función de k y u (número 71). Eliminando entre ellas á $L' - L$, resultará:

$$p = \frac{N_o \cos.\lambda}{N \cos.\varphi'} k \,\text{sen.}\, u \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

fórmula que sirve para calcular la parte del paralelo correspondiente á cada lado trigonométrico, comprendida entre los meridianos de sus vértices. En consecuencia, la suma de las p dará todo el arco limitado por los meridianos extremos, y si se determina astronómicamente la diferencia de longitud de éstos, podrán compararse la amplitud y la extensión totales para calcular la que corresponde á 1°.

Aunque en la ecuación (6) entran las normales correspondientes á las latitudes λ y φ, que dependen del radio ecuatorial y de la excentricidad de la tierra, no por eso sería inexacto el valor de p si no se conocieran con precisión esos elementos; porque en la relación de las normales se elimina el radio del ecuador, y el término que depende de la excentricidad, queda multiplicando á una cantidad muy pequeña. En efecto, puesto que se tiene:

$$N_o = \frac{a}{(1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \qquad N = \frac{a}{(1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

la relación de las normales será:

$$\frac{N_o}{N} = \frac{(1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} = (1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

Desarrollando hasta los términos en e^2, y haciendo las multiplicaciones sin apreciar las potencias superiores de e, por ser sumamente pequeñas, resulta:

$$\frac{N_o}{N} = (1 - \tfrac{1}{2} e^2 \,\text{sen.}^2 \varphi)(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \,\text{sen.}^2 \lambda) = 1 + \tfrac{1}{2} e^2 (\text{sen.}^2 \lambda - \text{sen.}^2 \varphi)$$

y como las latitudes φ de los puntos trigonométricos nunca difieren mucho de la del paralelo, se infiere que es siempre muy pequeño el factor de e^2. Además, si la triangulación se ejecuta de manera que corte al paralelo, las latitudes de algunos vértices serán mayores y las de otros menores que la de éste, y entonces se tendrá la ventaja de que varíe el signo del multiplicador de e^2, de modo que el conjunto de los valores de p será sensiblemente independiente de la excentricidad.